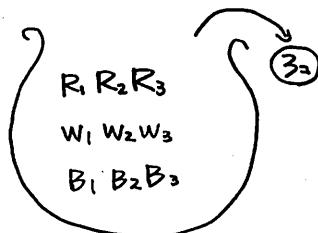


[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題45]

赤球、白球、青球がそれぞれ3個ずつ入っている袋がある。この袋から3個の球を同時に取り出すとき、次の確率を求めよ。

- (1) 赤球、白球、青球各1個である確率
 (2) 少なくとも1個は赤球である確率

(1)



計9コ

$$\textcircled{\text{全}} \quad {}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}$$

$$\textcircled{\text{事}} \quad {}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 27 \text{ (通り)}$$

R W B

$$\therefore \frac{27}{84} = \frac{9}{28}$$

(2)

余事象「赤球が1つも出ない」

白球 又は 青球 が出るというので

$${}_6C_3 = 20 \text{ (通り)}$$

$$\therefore 1 - \frac{20}{84} = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$

1 から 10 までの番号のついた 10 枚のカードから、3 枚のカードを同時に引くとき、3 枚の和が偶数である確率を求めよ。

④ ${}_{10}C_3 = 120$ (通り)

⑤ 目の和が偶数 となるのは

取り出した 3 数が

$\{\text{偶}, \text{偶}, \text{偶}\}, \{\text{偶}, \text{奇}, \text{奇}\}$ であり

$${}_5C_3 + {}_5C_1 \times {}_5C_2$$

$$= 10 + 5 \times 10$$

$$= 60 \text{ (通り)}$$

よて

$$\frac{60}{120} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題47]

A, Bの2人がじゃんけんを1回だけする。2人とも6回に3回はグー, 2回はチョキ, 1回はパーを出すとき, Aが勝つ確率を求めよ。

$$\left. \begin{array}{l} \text{1回で A, B 2人ともそれぞれ} \\ \text{グー} \quad \text{——} \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \text{チョキ} \quad \text{——} \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\ \text{パー} \quad \text{——} \quad \frac{1}{6} \end{array} \right\}$$

Aが勝つ確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} \\ &= \frac{6+2+3}{36} \\ &= \underline{\underline{\frac{11}{36}}} \end{aligned}$$

1 から 40 までの番号をつけた 40 枚のカードが 2 組ある。これら 80 枚のカードを袋に入れてよくかき混ぜて、同時に 3 枚を取り出す。

- (1) 3 つの番号がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。
 (2) 3 つの番号の積が 3 の倍数である確率を求めよ。
 (3) 3 つの番号の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(2013 愛媛大)

(1)

$$\textcircled{全} {}_{80}C_3 = \frac{80 \cdot 79 \cdot 78}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 80 \cdot 79 \cdot 13 \text{ (通り)}$$

$\textcircled{事}$ 3 の倍数は 26 枚あるので

$${}_{26}C_3 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 26 \cdot 25 \cdot 4 \text{ (通り)}$$

$$\begin{array}{l} \text{よて} \\ \text{2+0} \end{array} \frac{26 \cdot 25 \cdot 4}{80 \cdot 79 \cdot 13} = \frac{5}{158}$$

 $\{C, C, C\}$ のとき

$${}_{26}C_3 = 2600 \text{ (通り)}$$

よて

$$2600 + 26 \cdot 28 \cdot 26 + 126 \cdot 26 + 2600$$

$$= 26(100 + 28 \cdot 26 + 126 + 100)$$

$$= 26(100 + 728 + 126 + 100)$$

$$= 26 \times 1054 \text{ (通り)}$$

よて

$$\begin{array}{l} \text{2+0} \end{array} \frac{26 \cdot 1054}{80 \cdot 79 \cdot 13} = \frac{527}{1580}$$

(2)

$\textcircled{事}$ 少なくとも 1 枚、3 の倍数であるとい、

余事象「3 枚とも 3 の倍数でない」

$${}_{54}C_3 = \frac{54 \cdot 53 \cdot 52}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 53 \cdot 52 \text{ (通り)}$$

$$\text{よて} \quad 1 - \frac{9 \cdot 53 \cdot 52}{20 \cdot 80 \cdot 79 \cdot 13}$$

$$= 1 - \frac{477}{1580}$$

$$= \frac{1103}{1580}$$

(3)

80 枚のカードを 3 で割った余りで分類する。

A: 余り 0, B: 余り 1, C: 余り 2

とて

$$n(A) = 26, n(B) = 28, n(C) = 26$$

和が 3 の倍数 となるような集合の組は

$\{A, A, A\}, \{A, B, C\}, \{B, B, B\}, \{C, C, C\}$

である。

$\{A, A, A\}$ のとき

$${}_{26}C_3 = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2600 \text{ (通り)}$$

$\{A, B, C\}$ のとき

$$26 \cdot 28 \cdot 26 \text{ (通り)}$$

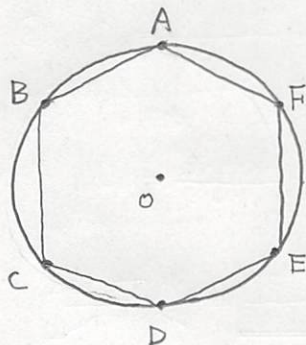
$\{B, B, B\}$ のとき

$${}_{28}C_3 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \cdot 26 \text{ (通り)}$$

点Oを中心とする半径1の円に内接している正六角形ABCDEFがある。A, B, C, D, E, F, Oの7点から異なる3点を同時に選ぶとき

- (1) 選んだ3点が一直線上に並ぶ確率を求めよ。
- (2) 選んだ3点を結ぶと正三角形ができる確率を求めよ。
- (3) 選んだ3点を結ぶと面積が $\frac{\sqrt{3}}{3}$ より大きい三角形ができる確率を求めよ。

(2015 首都大学東京)



(1)

$$\textcircled{\text{全}} {}_7C_3 = 35 \text{ (通り)}$$

$$\textcircled{\text{事}} \{A, O, D\}, \{B, O, E\}, \{C, O, F\}$$

の3通り

$$\therefore \frac{3}{35}$$

$$\textcircled{\text{事}} \{A, B, O\}, \{B, C, O\}, \{C, D, O\}, \{D, E, O\}, \\ \{E, F, O\}, \{F, A, O\}, \{A, C, E\}, \{B, D, F\}$$

の8通り

$$\therefore \frac{8}{35}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{l} S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ S(\triangle ABD) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ S(\triangle ACE) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4} > \frac{\sqrt{3}}{3} \\ S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{3} \\ S(\triangle OAC) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{\sqrt{3}}{3} \end{array} \right)$$

 $\triangle ABD$ と合同なもの

$$\begin{aligned} \triangle ADB &\equiv \triangle ADC \equiv \triangle ADE \equiv \triangle ADF \\ &\equiv \triangle BEC \equiv \triangle BED \equiv \triangle BEF \equiv \triangle BEA \\ &\equiv \triangle CFD \equiv \triangle CFE \equiv \triangle CFA \equiv \triangle CFB \end{aligned}$$

の12通り

 $\triangle ACE$ と合同なもの

$$\triangle ACE \equiv \triangle BDF$$

の2通り

よって

$$\frac{12+2}{35} = \frac{14}{35} = \frac{2}{5}$$

A, B, C, D, Eの5人の名刺が、1枚ずつ別々の封筒に入れてある。この5人が、それぞれ別々の封筒を1つ選ぶとき

- (1) 5人とも他の人の名刺が入った封筒を選ぶ確率を求めよ。
 (2) ちょうど2人だけ自分の名刺が入った封筒を選ぶ確率を求めよ。

(2016 北里大)

(1)

A	B	C	D	E
b	a	d	e	c
a	a	e	c	d
b	c	a	e	d
b	c	d	e	a
b	c	e	a	d
b	d	a	e	c
b	d	e	a	c
b	d	e	c	a
b	e	a	c	d
a	e	d	a	c
a	e	d	c	a

AがBの封筒を選ぶのは 11通り

AがC, D, Eの封筒を選ぶときも
 同様なので $11 \times 4 = 44$ (通り)

④ $5! = 120$ (通り)

よって

$$\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$$

(2)

AとBだけが自分の封筒を選ぶとき

C	D	E
d	e	c
e	c	d

の2通り

どの2人かを考えて

$${}_5C_2 \times 2 = 20 \text{ (通り)}$$

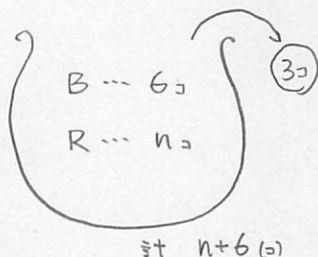
よって

$$\frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

青球6個と赤球 n 個($n \geq 2$)が入っている袋から、3個の球を同時に取り出すとき、青球が1個で赤球が2個である確率を P_n とする。

- (1) P_n を n の式で表せ。
- (2) $P_n > P_{n+1}$ を満たす最小の n を求めよ。
- (3) P_n を最大にする n の値を求めよ。

(2010 富山大)



$$(1) \textcircled{\text{全}} \quad {}_{n+6}C_3 = \frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{6}$$

$$\textcircled{\text{赤}} \quad {}_6C_1 \times {}_nC_2 = 6 \times \frac{n(n-1)}{2} = 3n(n-1)$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad P_n &= \frac{3n(n-1) \times 6}{(n+6)(n+5)(n+4)} \\ &= \frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)} \end{aligned}$$

$$(2) \quad P_{n+1} = \frac{18(n+1)n}{(n+7)(n+6)(n+5)} \quad \text{であり}$$

$$P_n > P_{n+1} \quad \text{より}$$

$$\frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)} > \frac{18(n+1)n}{(n+7)(n+6)(n+5)}$$

$$\frac{n-1}{n+4} > \frac{n+1}{n+7}$$

$$(n-1)(n+7) > (n+1)(n+4)$$

$$n^2 + 6n - 7 > n^2 + 5n + 4$$

$$n > 11$$

$$n \in \mathbb{N} \quad \text{なので}$$

$$\underline{\underline{\min n = 12}}$$

(3)

(2) より

$$\begin{cases} n \geq 12 & \text{のとき} & P_n > P_{n+1} \\ n = 11 & \text{のとき} & P_n = P_{n+1} \\ n \leq 10 & \text{のとき} & P_n < P_{n+1} \end{cases}$$

なので

$$P_2 < P_3 < \dots < P_{10} < P_{11} = P_{12} > P_{13} > \dots$$

よって

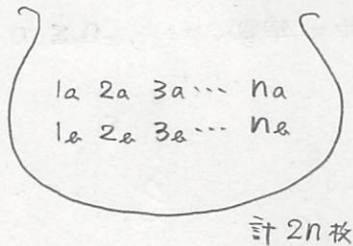
$$\underline{\underline{n = 11, 12}}$$

1が書かれたカードが2枚, 2が書かれたカードが2枚, …… n が書かれたカードが2枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1枚ずつ左から順に並べる。

このとき, カードに書かれている数の列を $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ とする。 $a_k \geq a_{k+1}$ ($1 \leq k < 2n$) となる最小の k を X とする。

- (1) $X=1$ となる確率を求めよ。
 (2) $X=n$ となる確率を求めよ。
 (3) m は $1 \leq m < n$ を満たす整数とする。 $X \geq m$ となる確率を求めよ。

(2003 一橋大)



- (1) $X=1$ とは
 $a_1 \geq a_2$ となる確率を考えるとよい。

① 全 $2n(2n-1)$ 通り

② $a_1 = a_2$ のとき

どの数を選びかて n 通り

その2数の並び方は $2!$ 通り

よって $2n$ 通り。

$a_1 < a_2$ のときと $a_1 > a_2$ のときは

対称性からそれぞれ

$$\frac{2n(2n-1) - 2n}{2}$$

$$= n(2n-1) - n$$

$$= n(2n-2)$$

$$= 2n(n-1) \text{ (通り)}$$

よって,

$a_1 \geq a_2$ となるのは

$$2n + 2n(n-1) = 2n^2 \text{ (通り)}$$

よって

$$\frac{2n^2}{2n(2n-1)} = \frac{n}{2n-1}$$

(2)

$X=n$ とは

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{n-1} < a_n \leq a_{n+1}$$

となる確率を考えるとよい。

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

$$= (1, 2, 3, \dots, n-1, n)$$

a_k ($n+1 \leq k \leq 2n$) は任意なので

$$\frac{2^n \cdot n!}{(2n)!}$$

(3)

$X \geq m$ のとき

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 < \dots < a_m \leq a_{m+1} \\ a_1 < \dots < a_m < a_{m+1} \leq a_{m+2} \\ a_1 < \dots < a_m < a_{m+1} < a_{m+2} \leq a_{m+3} \\ \vdots \\ a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n \leq a_{n+1} \end{array} \right.$$

よって,

$a_1 < a_2 < \dots < a_m$ かつ a_k ($m+1 \leq k \leq 2n$) は任意

となるよいため

$$\frac{{}_nC_m \cdot 2^m \cdot (2n-m)!}{(2n)!}$$

$$= \frac{n! \cdot 2^m}{m! (n-m)!} \times \frac{(2n-m)!}{(2n)!}$$

$$= \frac{2^m n! (2n-m)!}{m! (n-m)! (2n)!}$$

n を2以上の自然数とする。さいころを n 回振り、出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1) $X=1$ である確率を求めよ。

(2) $X=5$ である確率を求めよ。

(2017 京都大)

(1)

$M=2, L=1$ のとき

1と2の目だけがぬるとよい。

ただし、一方の目だけがぬるときを除くので

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n \times 2 = \frac{2^n - 2}{6^n}$$

$$(M, L) = (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

のときも同様であり、

$$\frac{2^n - 2}{6^n} \times 5 = \frac{5(2^n - 2)}{6^n}$$

(2)

$M=6, L=1$ となるとよい。

	$L=1$	$L \geq 2$	計
$M=6$		$\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n$	$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$
$M \leq 5$		$\left(\frac{4}{6}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$
計	$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$	$\left(\frac{5}{6}\right)^n$	1

表より

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{4}{6}\right)^n\right)$$

$$= \frac{6^n - 2 \cdot 5^n + 4^n}{6^n}$$

さいころを3回投げて出た目の数を順に p_1, p_2, p_3 とし, x の2次方程式 $2p_1x^2 + p_2x + 2p_3 = 0$ (*) を考える。

- (1) 方程式(*)が実数解をもつ確率を求めよ。
 (2) 方程式(*)が実数でない2つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta = 1$ が成り立つ確率を求めよ。
 (3) 方程式(*)が実数でない2つの複素数解 α, β をもち, かつ $\alpha\beta < 1$ が成り立つ確率を求めよ。 (2015 東北大)

(1)

(*) が 実数解 をもつためには

判別式 $D \geq 0$ となることよ。

$$D = p_2^2 - 4 \cdot 2p_1 \cdot 2p_3$$

$$= p_2^2 - 16p_1p_3 \geq 0$$

$$p_2^2 \geq 16p_1p_3$$

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

条件を満たす α は

$$\begin{cases} p_1p_3 = 1 & \alpha \text{ とき } p_2 = 4, 5, 6 \\ p_1p_3 = 2 & \alpha \text{ とき } p_2 = 6 \end{cases}$$

α ときである。

よて

$$\frac{3 + 2 \times 1}{6^3} = \frac{5}{216}$$

(2)

$D < 0$ α とき

$$(1) \text{ よ } p_2^2 < 16p_1p_3$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{解と係数の関係より} \\ \alpha\beta = \frac{2p_3}{2p_1} = \frac{p_3}{p_1} \end{array} \right)$$

$$\alpha\beta = 1 \text{ よ } \frac{p_3}{p_1} = 1$$

$$p_1 = p_3$$

条件を満たす α は

$$\begin{cases} p_1 = p_3 = 1 & \alpha \text{ とき } p_2 = 1, 2, 3 \\ p_1 = p_3 = 2, 3, 4, 5, 6 & \alpha \text{ とき } p_2 = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{cases}$$

α ときである。

よて

$$\frac{3 + 5 \times 6}{216} = \frac{33}{216} = \frac{11}{72}$$

(3)

$D < 0$ かつ $\alpha\beta < 1$ α とき

$$p_2^2 < 16p_1p_3 \text{ かつ } p_1 < p_3$$

ここで

$$p_2^2 < 16p_1p_3 \text{ となる確率は}$$

$$1 - \frac{5}{216} = \frac{211}{216}$$

であり、この中で

$$p_1 = p_3 \text{ となる確率は}$$

$$(2) \text{ よ } \frac{11}{72} = \frac{33}{216}$$

また、 $p_1 < p_3$ と $p_1 > p_3$ となる

確率は対称性から等しくなる

よて、求める確率は

$$\left(\frac{211}{216} - \frac{33}{216} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{178}{216} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{89}{216}$$