

さいころを4回振るとき、1の目が2回出る確率を求めよ。また、1または2の目が3回以上出る確率を求めよ。

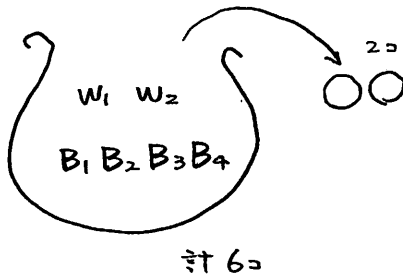
<1の目が2回出る>

$$\begin{aligned}
 & {}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 {}_2C_2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\
 &= 6 \times 1 \times \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} \\
 &= \frac{25}{216}
 \end{aligned}$$

<1または2の目が3回以上>

$$\begin{aligned}
 & {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 {}_1C_1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\
 &= 4 \times 1 \times \frac{2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \\
 &= \frac{8}{81} + \frac{1}{81} \\
 &= \frac{9}{81} \\
 &= \frac{1}{9}
 \end{aligned}$$

白玉2個、黒玉4個が入った袋から、1個ずつ順に2個の玉を取り出す。ただし、取り出した玉はもとに戻さない。2番目の玉が黒玉のとき、1番目の玉も黒玉である確率を求めよ。



2番目の玉が黒玉となるのは

$W \rightarrow B$ or $B \rightarrow B$ であり.

$$\begin{aligned} & \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{8}{30} + \frac{12}{30} \\ &= \frac{20}{30} \end{aligned}$$

よって

求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{12}{30}}{\frac{20}{30}} = \frac{12}{20} = \underline{\underline{\frac{3}{5}}}$$

3つの選択肢から1つだけある正解を選ぶ問題が問1から問8まで8題ある。各問題とも選択肢をでたために選ぶとき、次の確率を求めよ。

- (1) 8題すべて誤りとなる確率
- (2) 問1から問4までに2題以上正解し、かつ問5から問8までに1題以上正解する確率
- (3) 5題以上正解し、かつちょうど5題連続正解する確率

(2003 法政大)

(1)

$$\begin{array}{|l} \hline 1 \text{ 題につき} \\ \hline \text{正解} \quad \text{---} \quad \frac{1}{3} \\ \text{誤り} \quad \text{---} \quad \frac{2}{3} \\ \hline \end{array}$$

$${}^8C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^8 = \frac{256}{6561}$$

(2)

問1から問4までに

$$\begin{array}{|l} \hline 0 \text{ 題正解} \quad \text{となる} \alpha \text{ は} \\ {}^4C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \\ \hline 1 \text{ 題正解} \quad \text{となる} \alpha \text{ は} \\ {}^4C_1 \left(\frac{1}{3}\right) {}^3C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81} \\ \hline \end{array}$$

よって、2題以上正解する α は

$$1 - \frac{16}{81} - \frac{32}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}$$

問5から問8までに

$$\begin{array}{|l} \hline 0 \text{ 題正解} \quad \text{となる} \alpha \text{ は} \\ {}^4C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \\ \hline \end{array}$$

よって、1題以上正解する α は

$$1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$$

よって、求める確率は

$$\frac{11}{27} \times \frac{65}{81} = \frac{715}{2187}$$

(3)

i) 5題だけ正解するとき

$$\begin{array}{|l} \hline \text{① ② ③ ④ ⑤} \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ \text{1 ② ③ ④ ⑤} \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ \text{1 2 ③ ④ ⑤} \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ \text{1 2 3 ④ ⑤} \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 4 = \frac{32}{6561}$$

ii) 6題だけ正解するとき

$$\begin{array}{|l} \hline \text{① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧} \\ \text{① ② ③ ④ ⑤ ⑥ 7 ⑧} \\ \text{1 ② ③ ④ ⑤ ⑥ 7 ⑧} \\ \text{① 2 ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ 8} \\ \text{① 2 3 ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧} \\ \text{1 ② 3 ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧} \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 6 = \frac{24}{6561}$$

iii) 7題だけ正解するとき

$$\begin{array}{|l} \hline \text{① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧} \\ \text{① ② 3 ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧} \\ \hline \end{array}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7 \left(\frac{2}{3}\right) \times 2 = \frac{4}{6561}$$

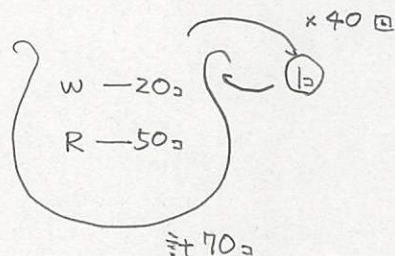
(i) ~ (iii) より

$$\begin{aligned} & \frac{32}{6561} + \frac{24}{6561} + \frac{4}{6561} \\ &= \frac{60}{6561} \\ &= \frac{20}{2187} \end{aligned}$$

袋の中に白球が20個、赤球が50個入っている。この袋の中から球を1球取り出し、色を調べてから袋に戻す。これを40回繰り返す。このとき、白球が n 回取り出される確率を p_n とする。

(1) $0 \leq n \leq 39$ のとき、 $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ を n の式で表せ。

(2) 白球が取り出される確率が最大になるのは、白球が何回取り出されるときであるか答えよ。(2017 早稲田大)



(1)

$$\begin{array}{l} \text{1回で} \\ W - \frac{20}{70} = \frac{2}{7} \\ R - \frac{50}{70} = \frac{5}{7} \end{array}$$

$$\begin{aligned} p_n &= {}_{40}C_n \left(\frac{2}{7}\right)^n {}_{40-n}C_{40-n} \left(\frac{5}{7}\right)^{40-n} \\ &= \frac{40!}{n!(40-n)!} \times \frac{2^n \times 5^{40-n}}{7^n \times 7^{40-n}} \\ &= \frac{40! \cdot 2^n \cdot 5^{40-n}}{7^{40} n! (40-n)!} \end{aligned}$$

なので

$$p_{n+1} = \frac{40! \cdot 2^{n+1} \cdot 5^{39-n}}{7^{40} (n+1)! (39-n)!}$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{40! \cdot 2^{n+1} \cdot 5^{39-n}}{7^{40} (n+1)! (39-n)!} \times \frac{7^{40} n! (40-n)!}{40! \cdot 2^n \cdot 5^{40-n}} \\ &= \frac{2(40-n)}{5(n+1)} \end{aligned}$$

(2)

$$p_n < p_{n+1} \quad n \text{ とき}$$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} > 1 \quad \text{であり}$$

$$\frac{2(40-n)}{5(n+1)} > 1$$

$$80 - 2n > 5n + 5$$

$$-7n > -75$$

$$n < \frac{75}{7} = 10 + \frac{5}{7}$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \text{なので}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, 10$$

$$p_n > p_{n+1} \quad n \text{ とき}$$

$$\text{同様に} \quad n = 11, 12, 13, \dots, 39$$

よって

$$p_0 < p_1 < p_2 < \dots < p_{10} < p_{11} > p_{12} > \dots > p_{39} > p_{40}$$

つまり

$$n = 11 \quad \text{のときであり}$$

白球が11回取り出されるときである。

ある花の1個の球根が1年後に3個, 2個, 1個, 0個(消滅)になる確率はそれぞれ $\frac{3}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ であるとする。

1個の球根が2年後に2個になっている確率を求めよ。

(2013 早稲田大)

(i) 1個 $\xrightarrow{\frac{3}{10}}$ 3個 $\longrightarrow$ 2個 となる時
(A, B, C)

2年後の(A, B, C)の個数の組は

(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2),

(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)

のいずれかであり、

$$\frac{3}{10} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times 3 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{10} \times 3 \right)$$

$$= \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{250} + \frac{3}{250} \right)$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{3}{125}$$

$$= \frac{9}{1250}$$

(ii) 1個 $\xrightarrow{\frac{2}{5}}$ 2個 $\longrightarrow$ 2個 となる時
(A, B)

2年後の(A, B)の個数の組は

(2, 0), (0, 2), (1, 1)

のいずれかであり、

$$\frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{10} \times 2 + \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{25} \right)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{25}$$

$$= \frac{6}{125}$$

(iii) 1個 $\longrightarrow$ 1個 $\longrightarrow$ 2個 となる時
 $\frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$

(i) ~ (iii) より

$$\frac{9}{1250} + \frac{6}{125} + \frac{2}{25}$$

$$= \frac{9}{1250} + \frac{60}{1250} + \frac{100}{1250}$$

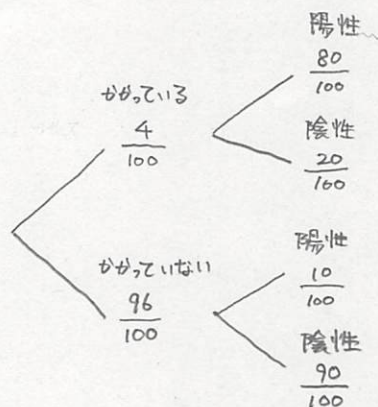
$$= \frac{169}{1250}$$

ある病気 X にかかっている人が 4% いる集団 A がある。病気 X を診断する検査で、病気 X にかかっている人が正しく陽性と判定される確率は 80% であり、病気 X にかかっていない人が誤って陽性と判定される確率は 10% である。

- (1) 集団 A のある人がこの検査を受けたところ陽性と判定された。この人が病気 X にかかっている確率はいくらか。
 (2) 集団 A のある人がこの検査を受けたところ陰性と判定された。この人が実際には病気 X にかかっている確率はいくらか。

(2015 岐阜薬科大)

(1)



陽性と判定される確率は

$$\begin{aligned} & \frac{4}{100} \times \frac{80}{100} + \frac{96}{100} \times \frac{10}{100} \\ &= \frac{320 + 960}{10000} \\ &= \frac{1280}{10000} \end{aligned}$$

病気 X にかかっている人が陽性と判定される確率は

$$\frac{4}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{320}{10000}$$

よて、求める確率は

$$\frac{\frac{320}{10000}}{\frac{1280}{10000}} = \frac{320}{1280} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

(2)

陰性と判定される確率は

$$1 - \frac{1280}{10000} = \frac{8720}{10000}$$

病気 X にかかっている人が陰性と判定される確率は

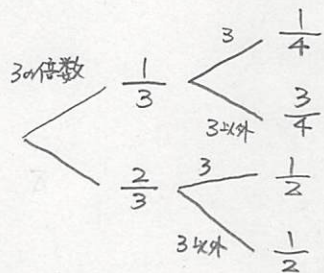
$$\frac{4}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{80}{10000}$$

よて、求める確率は

$$\frac{\frac{80}{10000}}{\frac{8720}{10000}} = \frac{80}{8720} = \underline{\underline{\frac{1}{109}}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題18]

1 から 4 までの数字が書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。さいころを投げて、3 の倍数の目が出たときには、4 枚のカードの中から 1 枚、それ以外の目が出たときには、奇数が書かれたカードの中から 1 枚、無作為に選ぶ。選ばれたカードに書かれた数字が 3 であったとき、さいころの出た目が 2 以下である確率を求めよ。 (1998 宮崎大)



3 のカードを選ぶ確率は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

2 以下目の目が出て、3 のカードを選ぶ確率は

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

よって、求める確率は

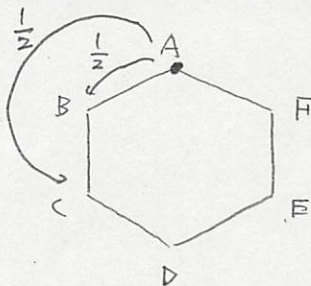
$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}} = \underline{\underline{\frac{2}{5}}}$$

1辺の長さが1の正六角形の頂点を時計まわりの順にA, B, C, D, E, Fとする。動点Pは最初は点A上にある。コインを投げ、表が出たら2, 裏が出たら1だけPを正六角形上で時計まわりに動かすゲームを考える。動点Pが最初にちょうど点A上に戻ったときゲーム終了とする。

(1) ちょうど1周してゲーム終了となる確率を求めよ。

(2) ちょうど2周してゲーム終了となる確率を求めよ。

(2012 愛知学院大)



(2)

$$A \rightarrow F \rightarrow B \rightarrow A$$

と進むとよい。

$$P_7 = \frac{1}{2} P_5 = \frac{21}{64}$$

$$P_8 = \frac{1}{2} P_7 = \frac{21}{128}$$

$$P_9 = \frac{1}{2} P_7 + \frac{1}{2} P_8$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{63}{128}$$

$$= \frac{63}{256}$$

$$P_{10} = \frac{1}{2} P_8 + \frac{1}{2} P_9$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{105}{256}$$

$$= \frac{105}{512}$$

$$P_{11} = \frac{1}{2} P_9 + \frac{1}{2} P_{10}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{231}{512}$$

$$= \frac{231}{1024}$$

$$P_{12} = \frac{1}{2} P_{10} + \frac{1}{2} P_{11}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{441}{1024}$$

$$= \frac{441}{2048}$$

(1) **解法1**

Aからnだけ進んだ点にある確率を P_n とおく。

$$P_1 = \frac{1}{2}, P_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$P_3 = P_1 \cdot \frac{1}{2} + P_2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{4}$$

$$= \frac{5}{8}$$

$$P_4 = \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} P_3$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{11}{8}$$

$$= \frac{11}{16}$$

$$P_5 = \frac{1}{2} P_3 + \frac{1}{2} P_4$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{21}{16}$$

$$= \frac{21}{32}$$

$$P_6 = \frac{1}{2} P_4 + \frac{1}{2} P_5$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{43}{32}$$

$$= \frac{43}{64}$$

解法2

表が m 回, 裏が n 回出たとする。

$$2m + n = 6 \quad \text{を満足するとよく、}$$

これを満たすのは

$$(m, n) = (0, 6), (1, 4), (2, 2), (3, 0)$$

ゆえに

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_5C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{43}{64}$$

ある駐車場には4つの駐車枠A, B, C, Dがアルファベット順に1列に並んでいる。そして自動車は、4台が順に入場して、空いている枠に次の確率で駐車する。

(i) BとCのうち先着の自動車が隣の枠に駐車している枠、およびDには、等しい確率で駐車する。

(ii) Aに駐車する確率、およびBとCのうち両隣が空いている枠に駐車する確率は、(i)の確率の3倍である。

このとき、次の確率を求めよ。ただし、1台目の自動車が入場するときには、4つの枠はすべて空いている。

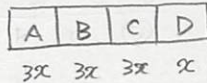
(1) 1台目の自動車がAに駐車する確率

(2) 3台目の自動車が入場したとき、BとDに自動車が駐車している確率

(3) 4台目の自動車が入場したとき、Cに自動車が駐車していない確率

(2017 旭川医科大)

(1)

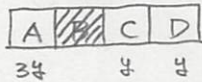


$$10x = 1$$

$$x = \frac{1}{10}$$

(2)

1台目がBに駐車する確率 $\frac{3}{10}$



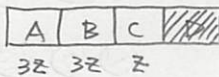
$$5y = 1$$

$$y = \frac{1}{5}$$

よて B → D と駐車する確率は

$$\frac{3}{10} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{50}$$

1台目がDに駐車する確率 $\frac{1}{10}$



$$7z = 1$$

$$z = \frac{1}{7}$$

よて D → B と駐車する確率は

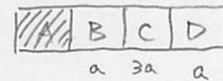
$$\frac{1}{10} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{70}$$

よてに

$$\frac{3}{50} + \frac{3}{70} = \frac{36}{350} = \frac{18}{175}$$

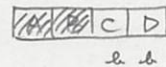
(3)

i) 1台目がAに駐車するとき $\frac{3}{10}$



$$5a = 1 \quad \text{よて} \quad a = \frac{1}{5}$$

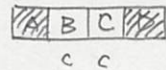
A → B のとき



$$2b = 1$$

$$b = \frac{1}{2}$$

A → D のとき



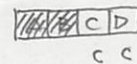
$$2c = 1$$

$$c = \frac{1}{2}$$

よてに

$$\frac{3}{10} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{100}$$

(ii) B → A のとき $\frac{3}{10} \times \frac{3}{5}$

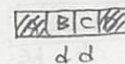


$$2c = 1 \quad \text{よて} \quad c = \frac{1}{2}$$

よてに

$$\frac{3}{10} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{100}$$

(iii) D → A のとき $\frac{1}{10} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{70}$

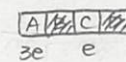


$$2d = 1 \quad \text{よて} \quad d = \frac{1}{2}$$

よてに

$$\frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{140}$$

(iv) (B or D) → A のとき



$$4e = 1 \quad \text{よて} \quad e = \frac{1}{4}$$

よてに

$$\frac{18}{175} \times \frac{3}{4} = \frac{27}{350}$$

(i) ~ (iv) よて

$$\begin{aligned} & \frac{6}{100} + \frac{9}{100} + \frac{3}{140} + \frac{27}{350} \\ &= \frac{42+63+15+54}{700} \\ &= \frac{174}{700} = \frac{87}{350} \end{aligned}$$