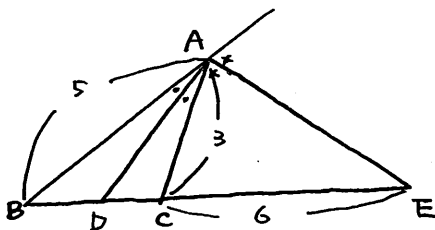


△ABC の ∠A およびその外角の二等分線と直線 BC との交点をそれぞれ D, E とする。

(1)  $AB > BD$ ,  $AC > CD$  を示せ。

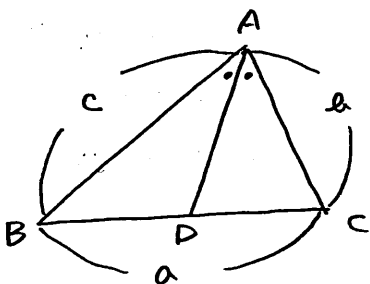
(2)  $AB=5$ ,  $AC=3$ ,  $CE=6$  のとき,  $BC$ ,  $BD$  の長さを求めよ。



$$\begin{aligned} AC - CD &= b - \frac{ab}{b+c} \\ &= \frac{b^2 + bc - ab}{b+c} \\ &= \frac{b(b+c-a)}{b+c} > 0 \end{aligned}$$

∴  $AC > CD$  ■

(1) **証明1**



$$AB = c, BC = a, CA = b$$

とすると

AD は ∠BAC の二等分線なので

$$BD : DC = c : b$$

∴

$$\begin{cases} BD = a \times \frac{c}{b+c} = \frac{ac}{b+c} \\ CD = a \times \frac{b}{b+c} = \frac{ab}{b+c} \end{cases}$$

$$AB - BD = c - \frac{ac}{b+c}$$

$$= \frac{bc + c^2 - ac}{b+c}$$

$$= \frac{c(b+c-a)}{b+c} > 0$$

$$\left( \textcircled{\text{②}} \triangle ABC \text{ の成立条件から} \right. \\ \left. b+c > a \right)$$

∴

$$AB > BD$$

(2)

$$BC = x \text{ とおくと}$$

AE は ∠BAC の外角の二等分線なので

$$BE : CE = 5 : 3$$

$$(x+6) : 6 = 5 : 3$$

$$3x + 18 = 30$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

$$\therefore \underline{BC = 4}$$

AD は ∠BAC の二等分線なので

$$BD : DC = 5 : 3$$

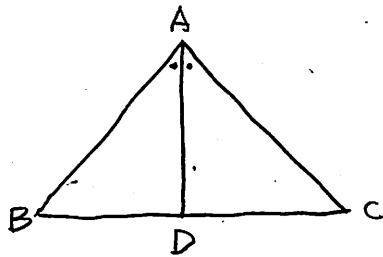
∴

$$BD = 4 \times \frac{5}{5+3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{2}}}$$

(裏に続く)

(1) 証明 2



$$\begin{aligned}\angle ADB &= \angle CAD + \angle ACD \\ &= \angle BAD + \angle ACD \\ &> \angle BAD\end{aligned}$$

よて

$$AB > BD$$

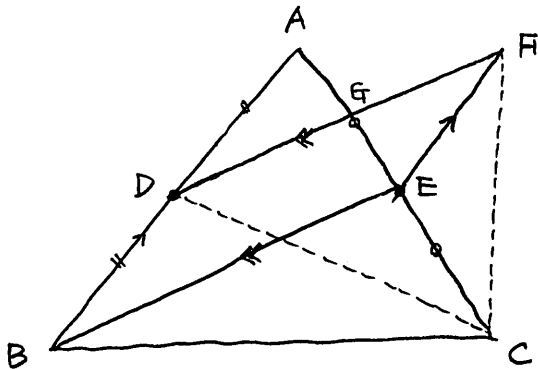
また

$$\begin{aligned}\angle ADC &= \angle BAD + \angle ABD \\ &= \angle CAD + \angle ABD \\ &> \angle CAD\end{aligned}$$

よて

$$AC > CD$$

△ABCにおいて、辺AB、ACの中点をそれぞれD、Eとし、Eを通りABに平行な直線と、Dを通りBEに平行な直線との交点をFとする。このとき、Eは△CFDの重心であることを証明せよ。



(証明)

AEとDFの交点をGとしておく。

$BD \parallel EF$  かつ  $BE \parallel DF$  なので

□BEFDは平行四辺形であり、

$BD = EF$  がいえる。

また

$BD = DA$  とあわせて、

$DA = EF$  かつ  $DA \parallel EF$  なので

□ADEFも平行四辺形である。

平行四辺形の対角線はそれぞれ

中点で交わるので

$AG = GE$ 。

よって

$AE = EC$  とあわせて

$AG : GE : EC = 1 : 1 : 2$

つまり

$CE : EG = 2 : 1$

点GはDFの中点でもあるので

点Eは△CFDの中線CGを

頂点側から2:1に内分している。

よって

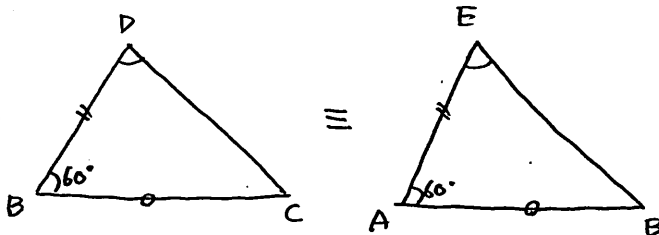
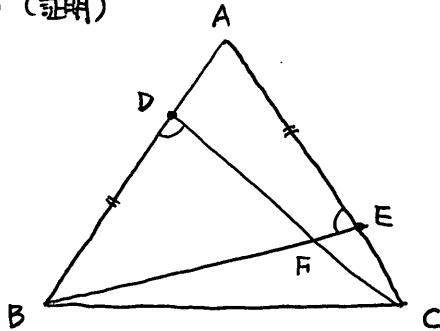
点Eは△CFDの重心である。 ■

正三角形ABCで、辺AB、AC上に、それぞれ点D、Eをとり、 $BD=AE$  となるようにする。BEとCDの交点をFとすると、次のことを証明せよ。

(1)  $\angle BDC = \angle AEB$

(2)  $\angle FDE = \angle FAE$

(1) (証明)



①  $\triangle DBC$  と  $\triangle EAB$  において、

$$\left[ \begin{array}{l} BD = AE \\ \angle DBC = \angle EAB = 60^\circ \\ BC = AB \quad (\text{正三角形}) \end{array} \right]$$

よって、  
合同条件：二辺挟角相等 より、

よって  
 $\angle BDC = \angle AEB$  ■

(2) (証明)

$\square ADFE$  は (1) の結果により  
円に内接する。

よって  
円周角の定理により  
 $\angle FDE = \angle FAE$  ■

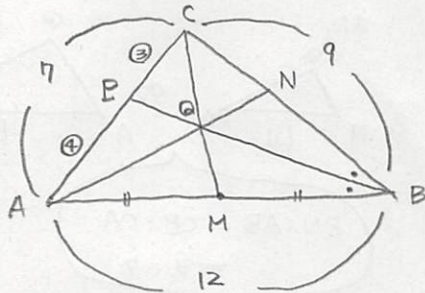
AB=12, BC=9, AC=7である△ABCにおいて、辺ABの中点をM、∠Bの二等分線と辺ACの交点をP、直線CMとBPの交点をQ、直線AQと辺BCの交点をNとする。

(1) △ABCの面積をSとすると、△ABQと△AQCの面積をSで表せ。

(2) 面積比  $\frac{\triangle QNP}{\triangle CNP}$  の値を求めよ。

(2015 大阪学院大)

(1) 解法1



BPは∠ABCの二等分線なので

$$AP:PC = 12:9 = 4:3$$

メネラウスの定理より

$$\frac{CQ}{QM} \cdot \frac{MB}{BA} \cdot \frac{AP}{PC} = 1$$

$$\frac{CQ}{QM} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = 1$$

$$\frac{CQ}{QM} = \frac{3}{2}$$

よって

$$S(\triangle ABQ) = \frac{2}{5} S$$

メネラウスの定理より

$$\frac{BQ}{QP} \cdot \frac{PC}{CA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$

$$\frac{BQ}{QP} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{BQ}{QP} = \frac{7}{3}$$

よって

$$S(\triangle AQC) = \frac{3}{10} S$$

(2) 解法1

チェバの定理より

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$$

$$\frac{BN}{NC} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{4}{3}$$

つまり BN:NC = 4:3

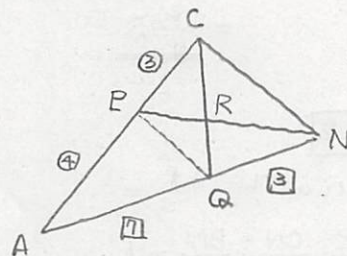
メネラウスの定理より

$$\frac{AQ}{QN} \cdot \frac{NC}{CB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$$

$$\frac{AQ}{QN} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{AQ}{QN} = \frac{7}{3}$$

つまり AQ:QN = 7:3



CQとNPの交点Rをとると

メネラウスの定理より

$$\frac{QR}{RC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NQ} = 1$$

$$\frac{QR}{RC} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3} = 1$$

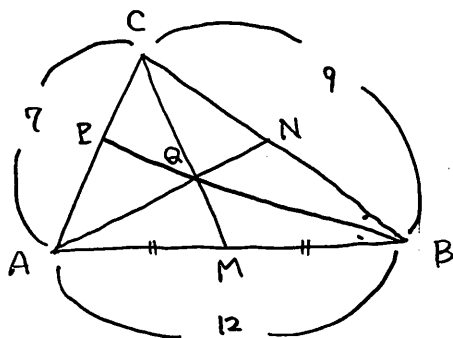
$$\frac{QR}{RC} = \frac{2}{5}$$

よって

$$\frac{\triangle QNP}{\triangle CNP} = \frac{QR}{RC} = \frac{2}{5}$$

(裏に続く)

(1) 解法2



BM = 6 であり

BQ は  $\angle ABC$  の二等分線 である

$$CQ : QM = 9 : 6 \\ = 3 : 2$$

よって  $S(\triangle ABQ) = \frac{2}{5} S$

また

$$S(\triangle AQC) = \frac{3}{5} S(\triangle AMC) \\ = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} S \\ = \frac{3}{10} S$$

(2) 解法2

チェバの定理 より

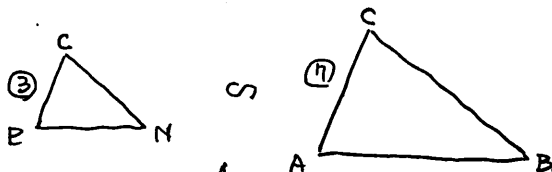
$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{BM}{MA} = 1$$

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CN}{NB} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{NB}{CN}$$

よって

EN // AB である



BE は  $\angle ABC$  の二等分線 である

$$CE : EA = 9 : 12 \\ = 3 : 4$$

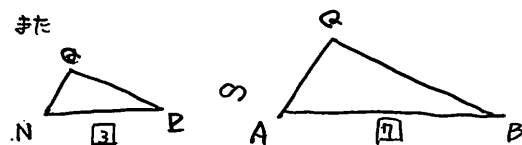
よって

$$S(\triangle CNE) : S(\triangle ABC) = 3^2 : 12^2$$

$$49 S(\triangle CNE) = 9 S$$

$$S(\triangle CNE) = \frac{9}{49} S$$

また



$$EN : AB = EQ : QA \\ = 3 : 7$$

よって

$$S(\triangle QNE) : S(\triangle QAB) = 3^2 : 7^2$$

$$49 S(\triangle QNE) = 9 \times \frac{2}{5} S$$

$$S(\triangle QNE) = \frac{18}{49 \times 5} S$$

よって

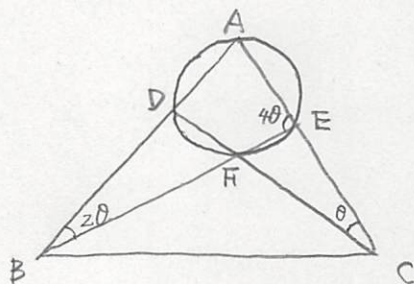
$$\frac{S(\triangle QNE)}{S(\triangle CNE)} = \frac{\frac{18}{49 \times 5} S}{\frac{9}{49} S}$$

$$= \frac{18}{9 \times 5}$$

$$= \frac{2}{5}$$

△ABCにおいて辺AB上に点Dを、辺AC上に点Eをとり、線分BEと線分CDの交点をFとする。点A, D, E, Fが同一円周上にあり、 $\angle AEB = 2\angle ABE = 4\angle ACD$  という関係が成り立つとき、 $\angle BAC$ の値を求めよ。

(2014 鹿児島大)



$$\angle ACD = \theta \quad \text{とおく}$$

$$\angle ABE = 2\theta, \angle AEB = 4\theta$$

であり、

$$\angle ACD + \angle EFC = \angle AEF \quad \text{より}$$

$$\theta + \angle EFC = 4\theta$$

$$\angle EFC = 3\theta = \angle DFB$$

$$\angle ADF = \angle DFB + \angle ABE$$

$$= 3\theta + 2\theta$$

$$= 5\theta$$

□ADFEは円に内接するので

$$\angle AEB + \angle ADF = 180^\circ$$

$$4\theta + 5\theta = 180^\circ$$

$$9\theta = 180^\circ$$

$$\theta = 20^\circ$$

このとき

$$\angle EFC = 3\theta = 60^\circ \quad \text{なので}$$

$$\underline{\underline{\angle BAC = 60^\circ}}$$

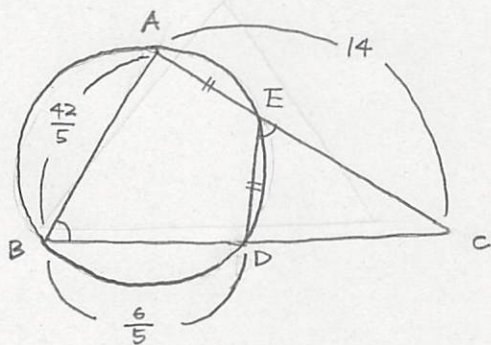
$\triangle ABC$  の辺  $BC$  上に点  $D$ , 辺  $AC$  上に点  $E$  があり, 四角形  $ABDE$  が円  $O$  に内接している。

$AE=DE$ ,  $AB=\frac{42}{5}$ ,  $AC=14$ ,  $BD=\frac{6}{5}$  であるとき

(1) 線分  $AE$  と線分  $CD$  の長さを求めよ。

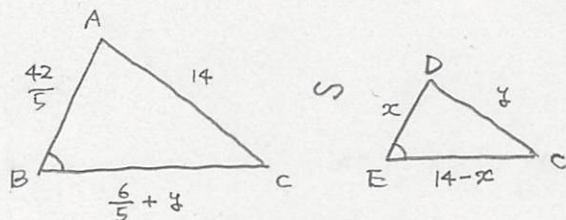
(2) 円  $O$  の半径を求めよ。

(2010 静岡大)



(1)

$AE=DE=x$ ,  $CD=y$  とおく



$$\frac{42}{5} : x = 14 : y = \left(\frac{6}{5} + y\right) : (14 - x)$$

①                      ②                      ③

① = ② より

$$\frac{42}{5} y = 14x$$

$$y = \frac{5}{3}x$$

② = ③ より (ちがいの Th と同値)

$$\left(\frac{6}{5} + y\right) y = 14(14 - x)$$

$$\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{3}x\right) \frac{5}{3}x = 14(14 - x)$$

$$2x + \frac{25}{9}x^2 = 196 - 14x$$

$$\frac{25}{9}x^2 + 16x - 196 = 0$$

$$25x^2 + 144x - (2 \times 3 \times 7^2) = 0$$

$$\begin{pmatrix} 25 & 2 \cdot 147 & -294 \\ 1 & -2 \cdot 3 & -150 \end{pmatrix}$$

$$(25x + 294)(x - 6) = 0$$

$$x > 0 \text{ より } x = 6$$

$$\text{よって } y = \frac{5}{3} \times 6 = 10$$

つまり

$$\underline{\underline{AE = 6, CD = 10}}$$

(2)

$$\begin{cases} AB^2 = \left(\frac{42}{5}\right)^2 = \frac{1764}{25} \\ BC^2 = \left(\frac{6}{5} + 10\right)^2 = \left(\frac{56}{5}\right)^2 = \frac{3136}{25} \\ AC^2 = 196 \end{cases} \quad \text{よって}$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \text{が成り立ち}$$

三平方の Th の逆より

$\triangle ABC$  は  $AC$  を斜辺にもつ  
直角三角形

$$\text{つまり } \angle ABC = 90^\circ$$

よって

$AD$  が直径に一致する

$$AD = AE \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

よって

$$\underline{\underline{(\text{半径}) = 3\sqrt{2}}}$$

$$\frac{x}{\frac{42}{5}} = \frac{y}{14} = \frac{14-x}{\frac{6}{5} + y} = k (> 0) \text{ とおく}$$

$$x = \frac{42}{5}k, y = 14k, 14 - x = \left(\frac{6}{5} + y\right)k$$

これから  $x, y$  を消去して

$$14 - \frac{42}{5}k = \left(\frac{6}{5} + 14k\right)k$$

$$70 - 42k = 6k + 70k^2$$

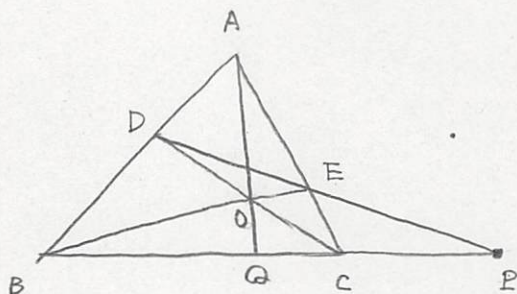
$$70k^2 + 48k - 70 = 0$$

$$35k^2 + 24k - 35 = 0$$

(あとは省略)

△ABCの辺BCの延長上の定点をPとする。Pを通り辺ABとDで、辺CAとEで交わる任意の直線を引いたとき、BEとCDの交点はある定直線上にあることを示せ。

(一橋大)



(証明)

BEとCDの交点をO,

AOとBCの交点をQ とおく

チェバの定理より

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{--- ①}$$

メネラウスの定理より

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD}{DB} = 1 \quad \text{--- ②}$$

① ÷ ② より

$$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{PC}{BP} = 1$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BP}{PC}$$

よって

$$BQ : QC = BP : PC$$

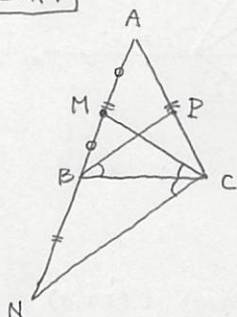
点QはBCをBP:PCに内分する点であり、

点Oは定直線AQ上にある。 ■

AB=AC である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし、辺 AB を延長した直線上に点 N を、AN:NB=2:1 となるようにとる。このとき、 $\angle BCM = \angle BCN$  となることを示せ。ただし、点 N は辺 AB 上にはないものとする。

(2008 京都大)

証明1



AC の中点 E とすると、

$$\angle BCM = \angle CBE \quad \text{--- ①}$$

 $\triangle ANC$  で

2点 B, E はそれぞれ

AN, AC の中点 である

中点連結定理により

$$BE \parallel NC$$

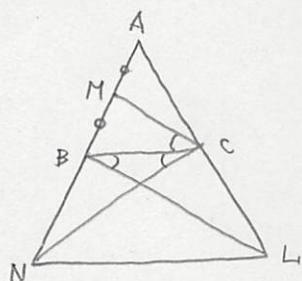
このとき

$$\angle CBE = \angle BCN \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$$\angle BCM = \angle BCN \quad \blacksquare$$

証明2



AN=AL となるように辺 AC の延長上に点 L をとる。

 $\triangle ABL$  で

2点 M, C はそれぞれ

AB, AL の中点 である

中点連結定理により

$$NC \parallel BL$$

このとき

$$\angle BCM = \angle CBL \quad \text{--- ①}$$

また

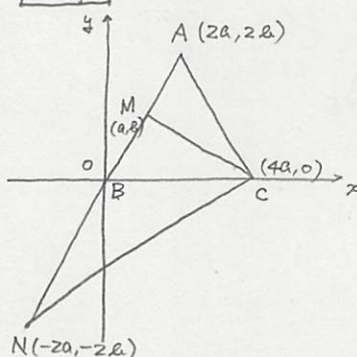
$$\triangle BCN \cong \triangle CBL \quad \text{より}$$

$$\angle BCN = \angle CBL \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$$\angle BCM = \angle BCN \quad \blacksquare$$

証明3



$$\vec{OA} = (2a, 2b), \quad \vec{OB} = \vec{0}, \quad \vec{OC} = (4a, 0)$$

とおく

$$\vec{OM} = (a, b), \quad \vec{ON} = (-2a, -2b)$$

とできる。 (ただし、 $a > 0, b > 0$  とする。)

$$\vec{CM} = -\vec{OC} + \vec{OM} = (-3a, b)$$

$$\vec{CB} = -\vec{OC} + \vec{OB} = (-4a, 0)$$

$$\vec{CM} \cdot \vec{CB} = |\vec{CM}| |\vec{CB}| \cos \angle BCM \quad \text{なので}$$

$$\cos \angle BCM = \frac{12a^2}{\sqrt{9a^2 + b^2} \cdot 4a} = \frac{3a}{\sqrt{9a^2 + b^2}}$$

$$\begin{cases} \vec{CB} = (-4a, 0) \\ \vec{CN} = -\vec{OC} + \vec{ON} = (-6a, -2b) \end{cases}$$

$$\vec{CB} \cdot \vec{CN} = |\vec{CB}| |\vec{CN}| \cos \angle BCN \quad \text{なので}$$

$$\cos \angle BCN = \frac{24a^2}{4a \sqrt{36a^2 + 4b^2}} = \frac{3a}{\sqrt{9a^2 + b^2}}$$

ゆえに

$$\cos \angle BCM = \cos \angle BCN$$

 $\angle BCM$  と  $\angle BCN$  はともに $0^\circ$  より  $180^\circ$  より下 である

$$\angle BCM = \angle BCN \quad \blacksquare$$



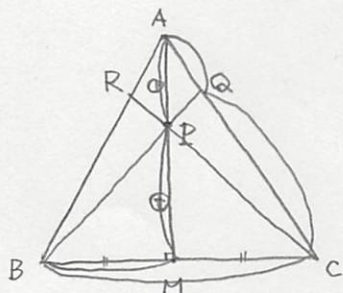
面積1の正三角形ABCにおいて、辺BCの中点をMとする。正の実数 $t$ に対し、線分AMを $1:t$ に内分する点をPとし、さらに直線BPと辺ACの交点をQ、直線CPと辺ABの交点をRとする。

(1)  $\frac{QC}{AQ}$  を $t$ を用いて表せ。

(2)  $\triangle MQR$ の面積が最大となる $t$ の値と、そのときの面積を求めよ。

(2013 早稲田大)

(1)



XネラウスTh より

$$\frac{QC}{AQ} \cdot \frac{BM}{CB} \cdot \frac{PA}{MP} = 1$$

$$\frac{QC}{AQ} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} = 1$$

$$\frac{QC}{AQ} = 2t$$

(2)

(1) より  $AQ:QC = 1:2t$

$\triangle ABC$ の1辺の長さを $a$ とすると

$$S(\triangle MQR) = S(\triangle ABC) - S(\triangle ARQ) - S(\triangle BMR) - S(\triangle CQM)$$

$$= \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{1+2t} \right)^2 \sin 60^\circ$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2ta}{1+2t} \sin 60^\circ \times 2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{1}{(1+2t)^2} - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{2t}{1+2t}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \left\{ 1 - \frac{1}{(1+2t)^2} - \frac{2t}{1+2t} \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{1+4t+4t^2-1-2t-4t^2}{(1+2t)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times \frac{-2t}{(1+2t)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \times \frac{t}{(1+2t)^2}$$

∴

$$\frac{t}{(1+2t)^2} = \frac{t}{1+4t+4t^2}$$

$$= \frac{1}{4t+4+\frac{1}{t}}$$

∴

$$t > 0 \text{ であり } 4t > 0 \text{ かつ } \frac{1}{t} > 0$$

(相加)  $\geq$  (相乗) より

$$4t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{4t \times \frac{1}{t}}$$

$$4t + \frac{1}{t} + 4 \geq 8$$

$$\frac{1}{4t + 4 + \frac{1}{t}} \leq \frac{1}{8}$$

$$\frac{t}{(1+2t)^2} \leq \frac{1}{8}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ 4t = \frac{1}{t} \quad \text{より} \\ \text{つまり } t = \frac{1}{2} \quad \text{より} \end{array} \right)$$

よって

$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき } S(\triangle MQR) \text{ は Max となり}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } S &= \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16} a^2 \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} \therefore \\ \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = 1 \quad \text{より} \\ a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ = \frac{\sqrt{3}}{16} \times \frac{4}{\sqrt{3}} \\ = \frac{1}{4} \end{array} \right)$$

つまり

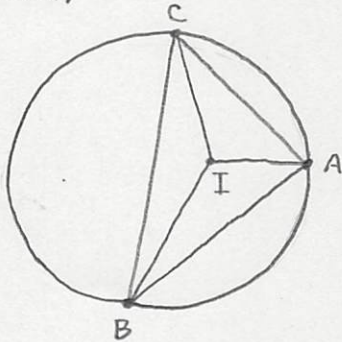
$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき } \text{Max} = \frac{1}{4}$$

円Oの円周上に異なる2点A, Bがある。弧ABのうちの短い方を除いた円周上を点Cが動くものとする。

(1)  $\triangle ABC$  の内接円の中心Iの軌跡は、ある円の一部となることを示せ。

(2)  $\triangle ABC$  の内接円の半径が最大となるのは、 $AC=BC$  となるときであることを示せ。 (2009 茨城大)

(1) (証明)



2点A, B を固定したとき、

円周角は等しいので  $\angle ACB = \theta$  (一定)

$$\begin{cases} \angle ACB = \theta \\ \angle CAB = 2\alpha, \angle CBA = 2\beta \end{cases}$$

とすると、

$$2\theta + 2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ - \theta$$

$\triangle AIB$  で

$$\alpha + \beta + \angle AIB = 180^\circ \quad \text{より}$$

$$\angle AIB = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$= 180^\circ - (90^\circ - \theta)$$

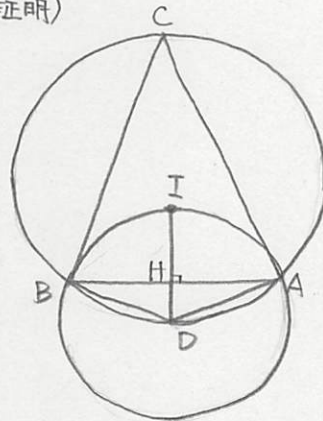
$$= 90^\circ + \theta \quad (= \text{一定})$$

よって

点Iの軌跡は

ABを弦とする円の一部である。 ■

(2) (証明)



点IからABに下ろした垂線の足Hとすると、IHが $\triangle ABC$ の内接円の半径である。

(1)より、Iの軌跡はABを弦とする

円の一部であり、その円の中に

Dとすると、IHが最大となるのは

直線IHが点Dを通るときである。

このとき、直線IHは線分ABの垂直二等分線である。

ゆえに、

$$IA = IB$$

なので

$$\angle IAB = \angle IBA$$

よって

$$\angle CAB = 2\angle IAB$$

$$= 2\angle IBA = \angle CBA$$

すなわち、

$$AC = BC \quad \blacksquare$$