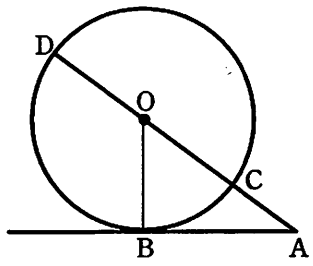
[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題53]

右の図において，点Oは円の中心，ABは円の接線，点Bは接点である。
AB＝8，AC＝4のとき，円の半径rとBCの長さを求めよ。



方べきのTh より

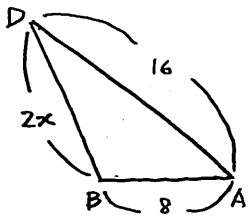
$AC \cdot AD = AB^2$

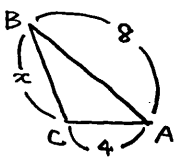
$4 \cdot (4+2r) = 64$

$16+8r=64$

$8r=48$

$\underline{\underline{r=6}}$

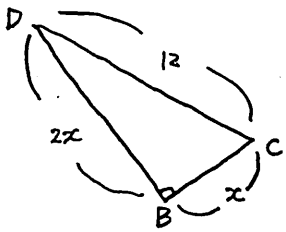




$BC=x$ とおくと $BD=2x$ とできる。

CDは 円の直径 なので

$\angle CBD=90°$ であり



三平方のTh より

$144=4x^2+x^2$

$x^2=\frac{144}{5}$

$x>0$ より

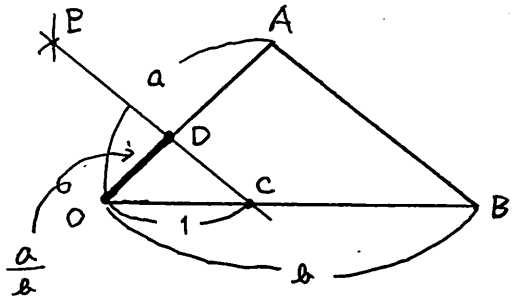
$x=\frac{12}{\sqrt{5}}$

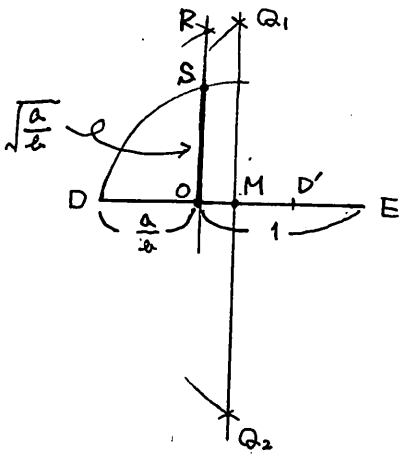
つまり

$\underline{\underline{BC=\frac{12}{\sqrt{5}}}}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題54]

長さ1，a，b の線分が与えられたとき，長さ $\sqrt{\frac{a}{b}}$ の線分を作図せよ。



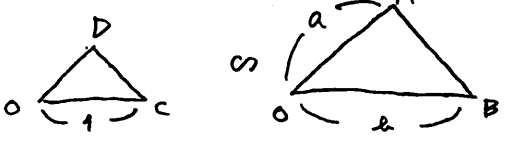


$OA=a$, $OB=b$,
となる 2点 A, B をとる.
半直線 OB 上に $OC=1$
となる点 C をとる.
$CP=BA$ かつ $AP=BC$
となる点 P をとり
直線 CP と直線 OA の交点 D
とすると. $OD=\frac{a}{b}$ である.

点 O に関して点 D と反対側の
同一直線上に $OE=1$ となる
点 E をとり. $DQ_i=EQ_i$ $(i=1,2)$
を満たす 2点 Q_1, Q_2 をとると.
線分 Q_1Q_2 と線分 DE の交点 M
とする.
点 M を中心とする. 半径 DM $(=EM)$
の円を描く.
線分 OE 上に $OD'=OD$ となる点 D
をとり, $DR=D'R$ となる点 R をとる.
直線 OR と円の交点を S とおくと
$OS=\sqrt{\frac{a}{b}}$

<$OD=\frac{a}{b}$ であることの証明>

□ PCBA は平行四辺形なので
CD // BA であり.



$OD:1=a:b$

$bOD=a$

よって $OD=\frac{a}{b}$ ■

<$OS=\sqrt{\frac{a}{b}}$ であることの証明>

方べきの Th より

$OD\cdot OE=OS^2$

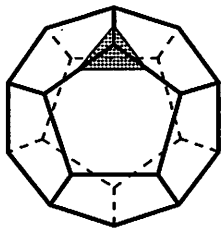
$\frac{a}{b}\cdot 1=OS^2$

$OS>0$ より

$OS=\sqrt{\frac{a}{b}}$ ■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題55]

正十二面体の各辺の中点を通る平面で，すべてのかどを切り取ってできる多面体の面の数 f，辺の数 e，頂点の数 v を，それぞれ求めよ。



正十二面体の

- 面の数　12
- 辺の数　$\frac{12\times5}{2}=30$
- 頂点の数　$\frac{12\times5}{3}=20$

であり．

頂点の数だけ面が増えるので

$f=12+20=32$

(頂点の数)×3 だけ辺が増える一方，

もともとあった辺がすべて消失するので

$e=20\times3=60$

オイラーの多面体Th より

$f+v-e=2$ なので

$32+v-60=2$

$v=30$

よって

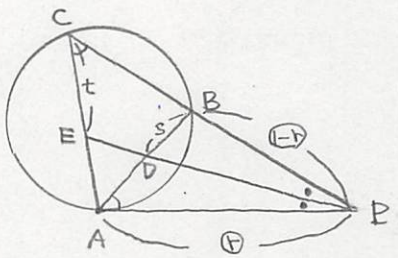
$\underline{f=32,\ e=60,\ v=30}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A156]

円周上の点Aにおける円の接線上に点Aと異なる点Pをとる。点Pを通る直線が点Pから近い順に2点B，Cで円と交わっている。∠APBの二等分線と線分AB，ACとの交点をそれぞれD，Eとする。PA：PB＝r：$(1-r)$とおき，BD＝s，CE＝tとおく。ただし，$0<r<1$とする。

(1) 線分ADの長さをrとsで表せ。

(2) PB：PC＝2：3のとき，rの値を求めよ。また，線分AEの長さをtで表せ。 (2012 大分大)



(1)

PDは∠APBの二等分線なので

$AD:DB=r:(1-r)$

$AD:s=r:(1-r)$

$(1-r)AD=rs$

$$AD=\frac{rs}{1-r}$$

(2)

$PA:PB=r:(1-r)$

$=2r:2(1-r)$

$PB:PC=2:3$

$=2(1-r):3(1-r)$

よって

$PA:PB:PC=2r:2(1-r):3(1-r)$

つまり

$PA=2rk$

$PB=2(1-r)k$ $(k>0)$

$PC=3(1-r)k$

とできる。

方べきの定理より

$PA^2=PB\cdot PC$

$4r^2k^2=2(1-r)k\cdot 3(1-r)k$

$4r^2=6(1-r)^2$

$2r^2=3-6r+3r^2$

$r^2-6r+3=0$

$r=3\pm\sqrt{6}$

$0<r<1$ より

$r=3-\sqrt{6}$

PEは∠APCの二等分線なので

$AE:EC=PA:PC$

$AE:t=2r:3(1-r)$

$3(1-r)AE=2rt$

$$AE=\frac{2rt}{3(1-r)}$$

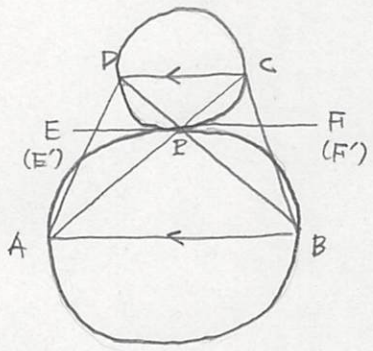
$$=\frac{2(3-\sqrt{6})}{3(\sqrt{6}-2)}t$$

$$=\frac{2(3\sqrt{6}-6+6-2\sqrt{6})}{3\times 2}t$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{3}t$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A157]

四辺形ABCDにおいて，ACとBDの交点をPとする。AB∥DCであるとき，△PABと△PCDのそれぞれの外接円は互いに外接することを示せ。 (2006 倉敷芸術科学大)



(証明)

点Pにおける△PABの外接円の接線を引き，それを上図のように直線EFとすると

接弦Thにより

$\angle PAB = \angle FPB$ ——— ①

また，

点Pにおける△PCDの外接円の接線を引き，それを上図のように直線E'F'とすると

接弦Thにより

$\angle PCD = \angle DPE'$ ——— ②

ここで

AB∥DC なので

$\angle PAB = \angle PCD$ ——— ③

①，②，③ より

$\angle FPB = \angle DPE'$

これは

直線EFと直線E'F'が一致することを意味する．

つまり

直線EFは△PABと△PCDの外接円の共通接線であるため，

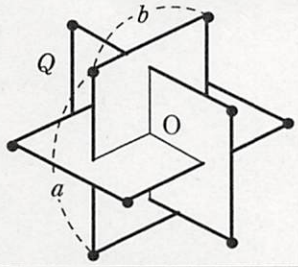
外接円はお互いに外接する．■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A158]

長辺の長さが a，短辺の長さが b である3枚の合同な長方形がある。この3枚を，対角線の交点Oを共有し，互いに直交するように組み合わせた立体 Q を作る。また，Q の12個の頂点の近いものどうしを結んで得られる凸多面体を P とする。

(1) P の面の数を答えよ。

(2) P の面がすべて正三角形になるとき，$\frac{a}{b}$ の値を求めよ。



(1999 武蔵野美術大)

(1)

面はすべて三角形であり，面がx枚存在するとき，1つの頂点には5枚の面が集まっているので

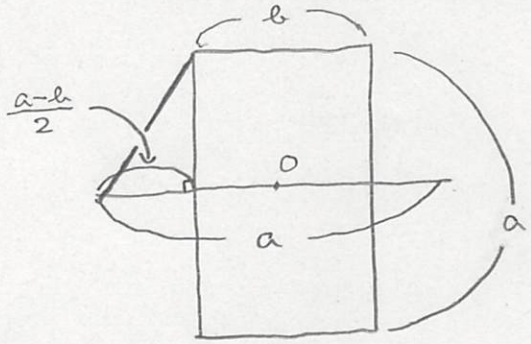
$$\frac{3x}{5}=12$$

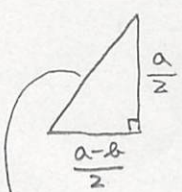
$$x=20$$

よって　20枚

(2)

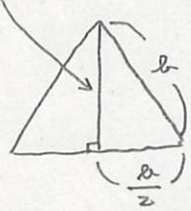
正三角形の一辺は b であり





左図で三平方の定理より

$$\text{斜辺}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2a^2-2ab+b^2}}{2}$$



← 正三角形

$$\frac{\sqrt{3}b}{2}=\frac{\sqrt{2a^2-2ab+b^2}}{2}$$

$$3b^2=2a^2-2ab+b^2$$

$$2a^2-2ab-2b^2=0$$

$$a^2-ab-b^2=0$$

両辺を $b^2(>0)$ で割ると

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-1=0$$

$$\frac{a}{b}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

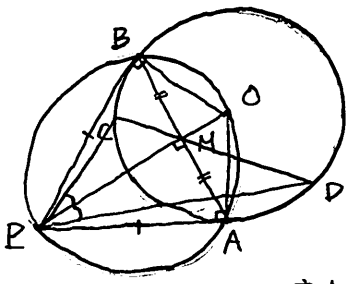
$\frac{a}{b}>0$ より

$$\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題20]

円Oに円外の点Pから接線PA，PBを引き，ABとPOの交点Mを通る円Oの弦CDを引く。このとき，OPは∠CPDを2等分することを示せ。ただし，弦ABは直径でないとし，C，Dは直線PO上にないものとする。

(証明)



2点A，Bは円の接点なので

$\angle PAO = \angle PBO = 90°$

となり，

□PAOBは円に内接する．

方べきのThより

$MA \cdot MB = MP \cdot MO$ ——①

また．方べきのThより

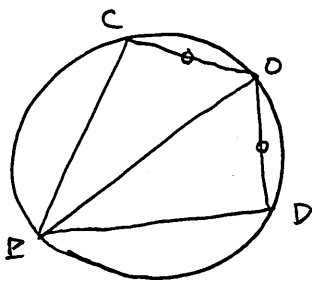
$MA \cdot MB = MC \cdot MD$ ——②

①，②より

$MP \cdot MO = MC \cdot MD$

方べきのThの逆より

□PDOCは円に内接する．



ここで $\overset{\frown}{OC} = \overset{\frown}{OD}$ なので

$\angle CPO = \angle DPO$

つまり

OPは$\angle CPD$を2等分する．■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B159]

△ABCの外心をO，内心をIとし，△ABCの外接円，内接円の半径をそれぞれR，rとする。また，直線AIと△ABCの外接円の交点で，点Aと異なる点をDとする。このとき，次を示せ。

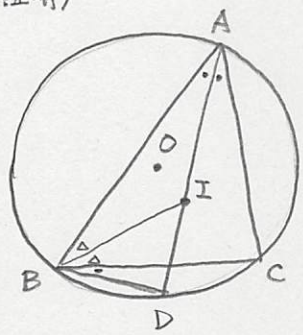
(1) $DB=DI$

(2) $AI\cdot DI=2Rr$

(3) △ABCが正三角形でないとき $OI^2=R^2-2Rr$

(2012 宮崎大)

(1) (証明)



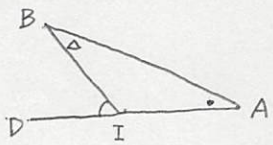
点Iは△ABCの内心なので

$\begin{cases}\angle BAI=\angle CAI=\alpha & \cdots①\\ \angle ABI=\angle CBI=\beta & \cdots②\end{cases}$

とできる.

円周角のTh より

$\angle CAI=\angle CBD\ (=\alpha)$ ……③



また.

$\angle BID=\angle BAI+\angle ABI$

$=\alpha+\beta$ (①, ①, ②) ……④

②, ② より

$\angle IBD=\alpha+\beta$ ……⑤

④, ⑤ より

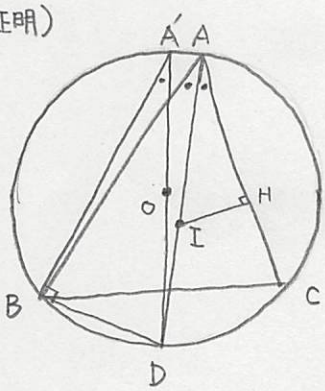
$\angle BID=\angle IBD$

つまり △DBI は.

$DB=DI$ なる

二等辺三角形 である. ■

(2) (証明)



直線DOと△ABCの外接円の交点で

点Dと異なる点をA'とすると.

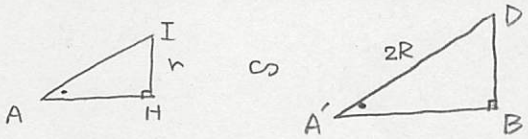
円周角のTh より

$\angle BA'D=\angle BAD=\alpha$

また. A'Dは直径なので $\angle A'BD=90°$

ここで

点Iから辺ACに下ろした垂線の足Hとする.



$AI:IH=A'D:DB$ より

$AI\cdot DB=A'D\cdot IH$

(1)で $DB=DI$ なので

$AI\cdot DI=2Rr$ ■

(3) (証明)

直線OIと△ABCの外接円との2交点

をP, Qとおくと

方べきのTh より

$IP\cdot IQ=IA\cdot ID$

$(IO+OP)\cdot(OQ-OI)=AI\cdot DI$

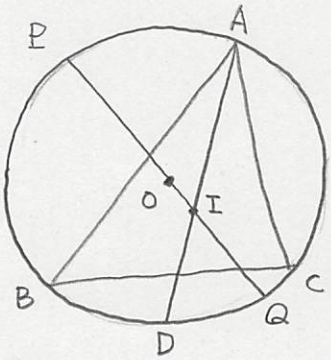
$(IO+R)(R-OI)=2Rr$ (①, (2)より)

$R^2-OI^2=2Rr$

よって

$OI^2=R^2-2Rr$ ■

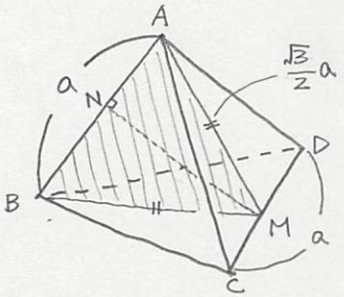
オイラー・チャップルのTh



[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B160]

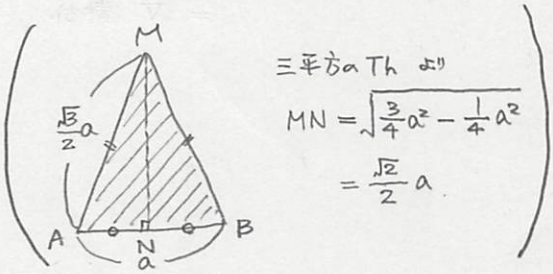
1辺の長さが a の正四面体 P_0 から，各辺の中点を結んでできる立体を取り除いて立体 P_1 を作る。この P_1 は4個の正四面体で構成される立体となる。次に，この立体 P_1 を構成する4個の正四面体のそれぞれについて P_0 から P_1 を作ったのと同様の操作を施して，立体 P_2 を作る。この立体 P_2 は16個の正四面体から構成される立体となる。以下同様に P_3，……，P_n を作る。このとき，立体 P_n の表面積と体積を求めよ。 (2009 早稲田大)

P_0



表面積 $S_0 = \left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\sin 60^\circ\right)\times 4$

$= \sqrt{3}a^2$



三平方の Th より

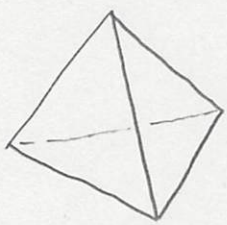
$MN = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}a$

体積 $V_0 = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)\times a$

$= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

P_0



∽

P_1

相似比 $1 : \frac{1}{2}$

面積比 $1 : \frac{1}{4}$

体積比 $1 : \frac{1}{8}$

個数 $1 : 4$

立体 P_n と P_{n+1} についても

立体 P_0 と P_1 と同様の

関係が成り立っている．

よって

$S_n = S_0 = \sqrt{3}a^2$

$V_n = V_0\times\left(\frac{1}{8}\times 4\right)^n$

$= \frac{\sqrt{2}}{12}a^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$= \frac{\sqrt{2}a^3}{3\cdot 2^{n+2}}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B161]

次の2つの条件を満たす四角形のうち，面積が最小のものの面積を求めよ。 (2015 京都大)

(A) 少なくとも2つの内角は90°である。

(B) 半径1の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の4つの辺すべてに接することをいう。

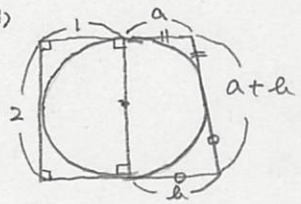
(A), (B) を共に満たすのは

(i) 2つの90°が隣り合う

(ii) 2つの90°が向かい合う

に分けて考えるとよい.

(i)



図のように a, b をとると.

$a>0$, $b>0$, $a+b\geqq 2$

四角形の面積 S は

$S=2\times 1+\frac{1}{2}\times(a+b)\times 2$

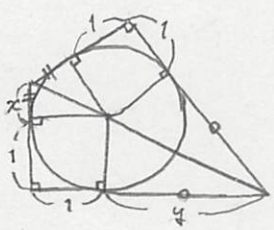
$=a+b+2$

$\geqq 2+2=4$

(等号成立は $a=b=1$ のとき)

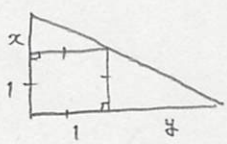
よって $\min S=4$

(ii)



図のように x, y をとると.

$x>0$, $y>0$ であり



$\frac{1}{2}(x+1)(y+1)=\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}y$

$xy+x+y+1=x+2+y$

$xy=1$

$S=\left\{\frac{1}{2}(x+y)+1\right\}\times 2$

$=x+y+2$

($x>0$, $y>0$ なので

(相加)≧(相乗)

$x+y\geqq 2\sqrt{xy}$

$x+y\geqq 2$

(等号成立は $x=y=1$ のとき))

よって

$S\geqq 2+2=4$

よって $\min S=4$.

(i), (ii) より

$\min S=4$