[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題56]

(1) 2点(−1, 4), (2, 3)から等距離にある直線 $y=4x$ 上の点の座標を求めよ。

(2) 3つの直線 $4x-y+7=0$, $4x-5y-13=0$, $4x+3y-5=0$ が囲む三角形の重心の座標と面積を求めよ。

(1) 直線 $y=4x$ 上の点 $(x, 4x)$ とおくと

2点 $(-1,4)$, $(2,3)$ から等距離にあるので

$$\sqrt{(x+1)^2+(4x-4)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(4x-3)^2}$$

両辺 2乗して

$$17x^2-30x+17=17x^2-28x+13$$

$$-2x=-4$$

$$x=2$$

よって、求める点 $(2,8)$

(2) 解法1

$$\begin{cases} 4x-y+7=0 & \cdots ① \\ 4x-5y-13=0 & \cdots ② \\ 4x+3y-5=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①, ②の交点 $A(-3,-5)$

②, ③の交点 $B(2,-1)$

③, ①の交点 $C(-1,3)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(5,4) \\ \overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(2,8) \end{cases}$$

よって

△ABCの重心Gは

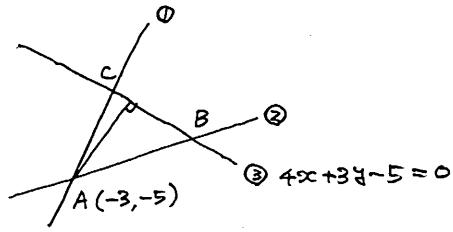
$$G\left(-\frac{2}{3}, -1\right)$$

$$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\left|5\times 8-4\times 2\right|$$

$$=\frac{32}{2}$$

$$=16$$

(2) 解法2 (面積)




$$BC=\sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$$

$$=\sqrt{9+16}$$

$$=5$$

$A(-3,-5)$ と ③ $4x+3y-5=0$ との距離 $d$ は

$$d=\frac{|-12-15-5|}{\sqrt{16+9}}$$

$$=\frac{32}{5}$$

よって

$$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\times BC\times d$$

$$=\frac{1}{2}\times 5\times\frac{32}{5}$$

$$=16$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題57]

2直線 $2x+y-1=0$, $3x-2y+2=0$ の交点をPとする。次の直線の方程式を求めよ。

(1) Pを通り直線 $3x-y=0$ に平行な直線

(2) Pを通り直線 $x+2y=0$ に垂直な直線

(1)

2直線 $2x+y-1=0$ と $3x-2y+2=0$

の交点を通る直線は

$(2x+y-1)+k(3x-2y+2)=0$

(ただし、$3x-2y+2=0$ を除く)

で表される.

$(2+3k)x+(1-2k)y+(-1+2k)=0$ ——①

が $3x-y=0$ と平行となるので

$(2+3k)(-1)-(1-2k)\cdot 3=0$

$-2-3k-3+6k=0$

$3k=5$

$k=\frac{5}{3}$

このとき ① は

$(2+5)x+(1-\frac{10}{3})y+(-1+\frac{10}{3})=0$

$7x-\frac{7}{3}y+\frac{7}{3}=0$

よって $\underline{3x-y+1=0}$

(2)

① が $x+2y=0$ と垂直となるので

$(2+3k)+(1-2k)\cdot 2=0$

$2+3k+2-4k=0$

$-k=-4$

$k=4$

このとき ① は

$(2+12)x+(1-8)y+(-1+8)=0$

$14x-7y+7=0$

よって $\underline{2x-y+1=0}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題58]

直線 $\ell : (k+1)x+(k-1)y-2k=0$ ($k$は実数) は，$k$ の値によらず，ある定点を通る。その定点の座標を求めよ。また，$\ell$ と原点との距離が1となるときの $k$ の値を求めよ。

解法1

$\ell : (k+1)x+(k-1)y-2k=0$

$(x+y-2)k+(x-y)=0$

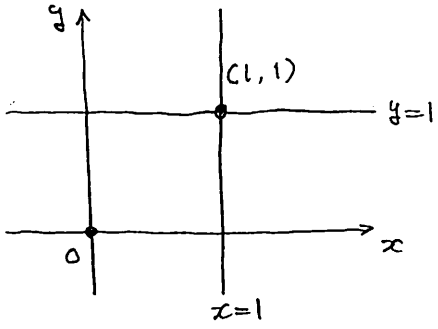
$k$ について の恒等式 とみて

$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

これを解いて

$x=1,\ y=1$

よって，定点 $(1,1)$




$\ell$ と原点との距離が1となるためには，$\ell$ が $x$ 軸，または $y$ 軸と平行となることが必要。

(i) $x$ 軸と平行となるとき，

$k+1=0$

$k=-1$

このとき

$\ell : -2y+2=0$

$y=1$ (条件を満たす。)

(ii) $y$ 軸と平行となるとき

$k-1=0$

$k=1$

このとき

$\ell : 2x-2=0$

$x=1$ (条件を満たす。)

(i)，(ii) より

$k=\pm 1$

解法2 (後半)

$\ell$ と原点との距離 $d$ は

$$d=\frac{|-2k|}{\sqrt{(k+1)^2+(k-1)^2}}$$

$$=\frac{2|k|}{\sqrt{2k^2+2}}$$

$d=1$ なので

$2|k|=\sqrt{2k^2+2}$

両辺 2乗して

$4k^2=2k^2+2$

$2k^2=2$

$k^2=1$

$k=\pm 1$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A162]

平面の3点O(0, 0), A(63, 0), B(15, 20)に対し，△OABの次の点の座標を，それぞれ求めよ。

(1) 重心　(2) 外心　(3) 内心　(4) 垂心　（立命館大）

(1)

重心Gは

$$G\left(\frac{63+15}{3}, \frac{20}{3}\right)$$

$$=\left(26, \frac{20}{3}\right)$$

(2) 解法1

△OABの外接円の方程式は

$x^2+y^2+ax+by+c=0$

とでき，3点O(0,0), A(63,0), B(15,20)を通るので

$$\begin{cases} c=0 & \cdots ① \\ 63^2+63a+c=0 & \cdots ② \\ 15^2+20^2+15a+20b+c=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①, ②より

$63(63+a)=0$

$a=-63$

③に代入して

$15^2+20^2-15\times63+20b=0$

$45+80-189+4b=0$

$4b=64$

$b=16$

よって，

$x^2+y^2-63x+16y=0$

$\left(x-\frac{63}{2}\right)^2-\left(\frac{63}{2}\right)^2+(y+8)^2-64=0$

$\left(x-\frac{63}{2}\right)^2+(y+8)^2=\left(\frac{63}{2}\right)^2+64$

つまり，外心 $\left(\frac{63}{2}, -8\right)$

解法2

線分OAの垂直二等分線 $x=\frac{63}{2}$

線分OBの垂直二等分線

$y-10=-\frac{15}{20}\left(x-\frac{15}{2}\right)$

上の2式を連立して

$y=-\frac{3}{4}\left(\frac{63}{2}-\frac{15}{2}\right)+10$

$=-\frac{3}{4}\times24+10$

$=-8$

よって，外心 $\left(\frac{63}{2}, -8\right)$

(3) 解法1

内心I(X,Y)とおく．

直線OA：$y=0$

直線OB：$y=\frac{20}{15}x$ $(\Leftrightarrow 4x-3y=0)$

直線AB：$y=\frac{20}{-48}(x-63)$

$y=-\frac{5}{12}(x-63)$

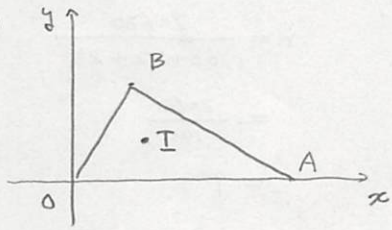
$12y=-5x+315$

$(\Leftrightarrow 5x+12y-315=0)$

点Iから3直線OA, OB, ABへの距離は等しいので

$$|Y|=\frac{|4X-3Y|}{\sqrt{16+9}}=\frac{|5X+12Y-315|}{\sqrt{25+144}}$$

$$|Y|=\frac{|4X-3Y|}{5}=\frac{|5X+12Y-315|}{13}$$




上図より，I(X,Y)は

$Y\geqq0$, $y\leqq\frac{4}{3}x$, $y\leqq-\frac{5}{12}(x-63)$

を満たすので

$Y\geqq0$, $4X-3Y\geqq0$, $5X+12Y-315\leqq0$

$$Y=\frac{4X-3Y}{5}=-\frac{5X+12Y-315}{13}$$

(左辺)=(中辺)より

$5Y=4X-3Y$

$X=2Y$ ……㋐

(左辺)=(右辺)より

$13Y=-5X-12Y+315$

$5X+25Y=315$

㋐を代入して

$10Y+25Y=315$

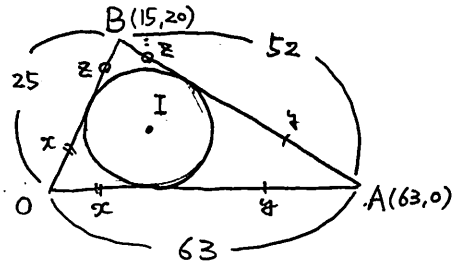
$35Y=315$

$Y=9$

このとき㋐より $X=18$

よって，内心I(18,9)　（裏に続く）

## 解法2




$OB=\sqrt{15^2+20^2}=5\sqrt{3^2+4^2}=25$

$AB=\sqrt{48^2+(-20)^2}=4\sqrt{12^2+5^2}=52$

$s=\frac{25+52+63}{2}=\frac{140}{2}=70$

$S(\triangle OAB)=\sqrt{s(s-63)(s-52)(s-25)}$

$=\sqrt{70\times7\times18\times45}$

$=630$

内接円の半径 $r$ として

$r=\frac{2\times630}{63+52+25}$

$=\frac{2\times630}{140}$

$=9$

図のように $x,y,z$ とすると

$$\begin{cases} x+y=63 \\ y+z=52 \\ z+x=25 \end{cases} \quad (+$$

$2(x+y+z)=140$

$x+y+z=70$

よって $x=18$

つまり

内心 $I(18,9)$

## 解法3

$OA=63$, $OB=25$, であり $k,l\in\mathbb{R}$ として

$\overrightarrow{OI}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)$

$=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{63}+\frac{\overrightarrow{OB}}{25}\right)$

$=\frac{k}{63}(63,0)+\frac{k}{25}(15,20)$

$=(k,0)+\left(\frac{3}{5}k,\frac{4}{5}k\right)$

$=\left(\frac{8}{5}k,\frac{4}{5}k\right)$ ——④

$\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AI}$

$=\overrightarrow{OA}+l\left(\frac{\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AO}|}+\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)$

$=\overrightarrow{OA}+l\left(\frac{-\overrightarrow{OA}}{63}+\frac{-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{52}\right)$

$=\left(1-\frac{l}{63}-\frac{l}{52}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{l}{52}\overrightarrow{OB}$

$=\left(1-\frac{l}{63}-\frac{l}{52}\right)(63,0)+\frac{l}{52}(15,20)$

$=\left(63-l-\frac{63}{52}l,0\right)+\left(\frac{15}{52}l,\frac{5}{13}l\right)$

$=\left(63-l-\frac{12}{13}l,\frac{5}{13}l\right)$

$=\left(63-\frac{25}{13}l,\frac{5}{13}l\right)$ ——⑤

④ = ⑤ より

$$\begin{cases} \frac{8}{5}k=63-\frac{25}{13}l \\ \frac{4}{5}k=\frac{5}{13}l \end{cases}$$

これを解いて

$k=\frac{45}{4}$, $l=\frac{117}{5}$

このとき

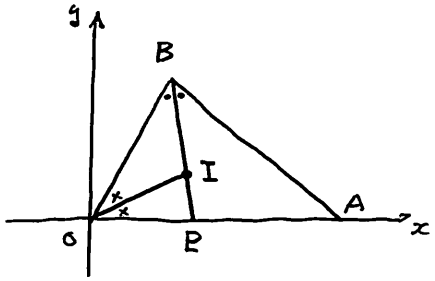
$\overrightarrow{OI}=\left(\frac{8}{5}\times\frac{45}{4},\frac{4}{5}\times\frac{45}{4}\right)$

$=(18,9)$

つまり

内心 $I(18,9)$

解法4




$OA=63$, $OB=25$, $AB=52$

点Iは$\triangle OAB$の内心なので

BPは$\angle OBA$の二等分線であり

$OP:PA=25:52$ より

$$OP=63\times\frac{25}{25+52}$$

$$=63\times\frac{25}{77}$$

$$=\frac{225}{11}$$

OIは$\angle BOP$の二等分線であり

$$BI:IP=25:\frac{225}{11}$$

$$=11:9$$

よって

$$\overrightarrow{OI}=\frac{9\overrightarrow{OB}+11\overrightarrow{OP}}{11+9}$$

$$=\frac{1}{20}\left(9(15,20)+11\left(\frac{225}{11},0\right)\right)$$

$$=\frac{1}{20}(360,180)$$

$$=(18,9)$$

つまり、内心 I(18,9)

直線ABの傾き$=-\frac{5}{12}$ であり

$OH\perp AB$ なので

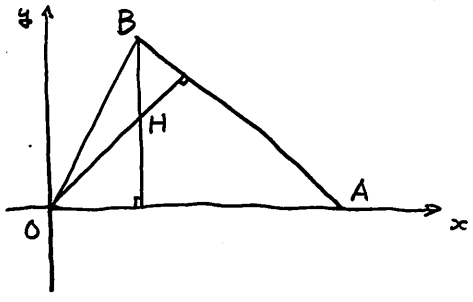
直線OH：$y=\frac{12}{5}x$

よって、2直線の交点 (15,36)

つまり、垂心 H(15,36)

(4)

垂心H とおく.




直線BH：$x=15$.

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A163]

$a$ を定数とし，座標平面上の異なる3直線

$2x+2y=7$ ……①，　$ax-y=1$ ……②，　$a^2x-y=a^2$ ……③

を考える。

(1) 3直線①，②，③がただ1点で交わるとき，定数 $a$ の値を求めよ。

(2) 3直線①，②，③が平面を6個の部分に分けるとき，定数 $a$ の値を求めよ。　(2010 岐阜聖徳学園大)

(1)

① $2x+2y=7$

②×2 $2ax-2y=2$ (+

$(2a+2)x=9$

①，② が交点をもつためには

$2a+2\neq 0$　つまり　$a\neq -1$

このとき

$x=\dfrac{9}{2a+2}$

② より

$y=ax-1$

$=\dfrac{9a}{2a+2}-1$

$=\dfrac{7a-2}{2a+2}$

よって，①，② の交点は

$\left(\dfrac{9}{2a+2},\ \dfrac{7a-2}{2a+2}\right)$

ただ1点で交わるためには，③ がこの点を通るとよい．

$\dfrac{9a^2}{2a+2}-\dfrac{7a-2}{2a+2}=a^2$

$9a^2-7a+2=2a^3+2a^2$

$2a^3-7a^2+7a-2=0$

| | 2 | −7 | 7 | −2 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | 2 | −5 | 2 |
| | 2 | −5 | 2 | 0 |

$(a-1)(2a^2-5a+2)=0$

$(a-1)(2a-1)(a-2)=0$

$a=\dfrac{1}{2},1,2$

(i) $a=\dfrac{1}{2}$ のとき

① $y=-x+\dfrac{7}{2}$

② $y=\dfrac{1}{2}x-1$

③ $y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}$

となり 適する．

(ii) $a=1$ のとき

① $y=-x+\dfrac{7}{2}$

② $y=x-1$

③ $y=x-1$

② と ③ が一致し，ただ1点で交わることに不合理

(iii) $a=2$ のとき

① $y=-x+\dfrac{7}{2}$

② $y=2x-1$

③ $y=4x-4$

となり 適する．

(i)～(iii) より

$a=\dfrac{1}{2},2$

(2)

平面を6個の部分に分けるのは

(I)

(II)

のいずれかに限られる

(I) ①，②，③ がただ1点で交わるとき

(1) より　$a=\dfrac{1}{2},2$

(II) ①，②，③ のうち1組のみが平行のとき

(i) ①//② のとき

$a=-1$

このとき

① $y=-x+\dfrac{7}{2}$

② $y=-x-1$

③ $y=x-1$

となり 適する．

(ii) ②//③ のとき

$a^2=a$　より　$a=0,1$

(ア) $a=0$ のとき

① $y=-x+\dfrac{7}{2}$

② $y=-1$

③ $y=0$

となり 適する

(裏に続く)

(ii) $a=1$ のとき

①$y=-x+\frac{7}{2}$

②$y=x-1$

③$y=x-1$

となり，題意を満たさない．

(iii) ①//③ のとき

$a^2=-1$

これを満たす $a\in\mathbb{R}$ は存在しない．

(I)，(II) より

$\underline{a=-1,0,\frac{1}{2},2}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A164]　　(2013　神戸女子大)

$ax^2-xy-y^2+10x+2y+8=0$ $(a\neq 0)$ が2直線を表すとする。

(1) $a$ の値を求めよ。

(2) この2直線と点A$(0,\ -2)$ を通る直線 $\ell$ とで囲まれた図形の面積が18であるとき，直線 $\ell$ の方程式を求めよ。

(1)

$ax^2-xy-y^2+10x+2y+8=0$

$y^2+(x-2)y-ax^2-10x-8=0$

$y$ の判別式 $D_y$ とおくと

$D_y=(x-2)^2-4(-ax^2-10x-8)$

$=x^2-4x+4+4ax^2+40x+32$

$=(4a+1)x^2+36x+36$

$D_y=0$ が $x$ の重解をもつとよく，

判別式 $D_x=0$ となるとよい．

$4a+1\neq 0$ つまり $a\neq -\frac{1}{4}$

の条件のもとで

$D_x/4=324-(4a+1)\times 36=0$

$9-4a-1=0$

$-4a=-8$

$a=2$

これは $a\neq -\frac{1}{4}$ を満たす．

よって　$\underline{a=2}$

(2)　解法1

$2x^2-xy-y^2+10x+2y+8=0$

$2x^2+(-y+10)x-(y^2-2y-8)=0$

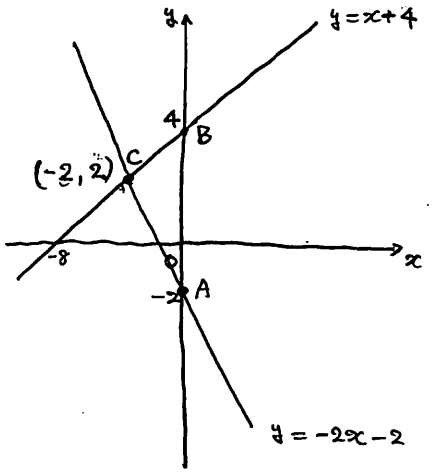
$2x^2+(-y+10)x-(y-4)(y+2)=0$

$\begin{pmatrix} 2 & \times & y+2 & \longrightarrow & y+2 \\ 1 & & -y+4 & \longrightarrow & -2y+8 \end{pmatrix}$

$(2x+y+2)(x-y+4)=0$

よって　$y=-2x-2$，$y=x+4$

また，交点 $(-2,\ 2)$ である．




A$(0,-2)$ を通る直線 $\ell$ は

$y+2=mx$

つまり　$y=mx-2$　$(\Leftrightarrow mx-y-2=0)$

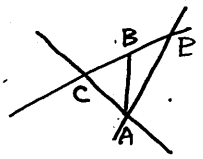
とおける．

B$(0,4)$，C$(-2,2)$　とおくと

$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\times 6\times 2=6<18$

$\ell$ と直線 $y=x+4$ の交点 P$(X,\ Y)$ とおくと

(i) $X>0$ のとき




$S(\triangle APC)=S(\triangle ABC)+S(\triangle ABP)$

$18=6+\frac{1}{2}\times 6\times X$

$18=6+3X$

$-3X=-12$

$X=4$

このとき $Y=8$

つまり $\ell$ は点 $(4,8)$ を通るので

$8=4m-2$

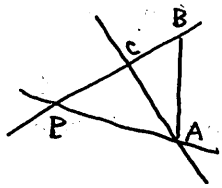
$-4m=-10$

$m=\frac{5}{2}$

このとき

$\ell:\ y=\frac{5}{2}x-2$

(ii) $X<0$ のとき




$S(\triangle ACP)=S(\triangle ABP)-S(\triangle ABC)$

$18=\frac{1}{2}\times 6\times(-X)-6$

$18=-3X-6$

$3X=-24$

$X=-8$

このとき $Y=-4$

(裏に続く)

$l$ は $P(-8,-4)$ を通るので

$$-4=-8m-2$$
$$8m=2$$
$$m=\frac{1}{4}$$

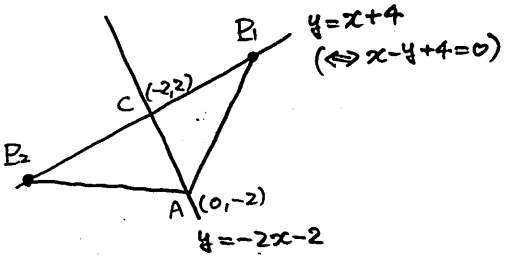
このとき

$$l: y=\frac{1}{4}x-2$$

よって

$$l: y=\frac{5}{2}x-2,\ y=\frac{1}{4}x-2$$

解法2 (後半)




点A(0,-2) から直線 $x-y+4=0$ までの距離 $d$ は

$$d=\frac{|2+4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$$

$S(\triangle ACP)=18$ より

$$\frac{1}{2}\times CP\times 3\sqrt{2}=18$$
$$CP=6\sqrt{2}$$

直線CPの傾き $=1$ であるので

$$\sqrt{2}\,|X+2|=6\sqrt{2}$$
$$|X+2|=6$$
$$X+2=-6,6$$
$$X=-8,4$$

$X=-8$ のとき、$Y=-4$ であり

このとき $l: y=\frac{1}{4}x-2$

$X=4$ のとき、$Y=8$

このとき $l: y=\frac{5}{2}x-2$

つまり

$$l: y=\frac{1}{4}x-2,\ y=\frac{5}{2}x-2$$

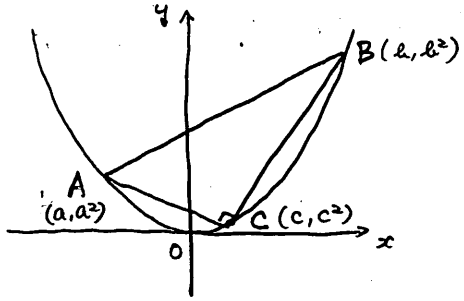
[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A165]

$a$, $b$, $c$は実数とし，$a<b$とする。平面上の相異なる3点A$(a,\ a^2)$，B$(b,\ b^2)$，C$(c,\ c^2)$が，辺ABを斜辺とする直角三角形を作っているとする。

(1) $a$を$b$，$c$を用いて表せ。

(2) $b-a\geqq 2$が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺ABの長さの最小値と，そのときのA，B，Cの座標をそれぞれ求めよ。




(1) 解法1

三平方のTh より

$AB^2=AC^2+BC^2$

$(b-a)^2+(b^2-a^2)^2=(c-a)^2+(c^2-a^2)+(c-b)^2+(c^2-b^2)^2$

$a^2-2ab+b^2+a^4-2a^2b^2+b^4$

$=a^2-2ac+c^2+a^4-2a^2c^2+c^4$

$+b^2-2bc+c^2+b^4-2b^2c^2+c^4$

$-2ab-2a^2b^2=-2ac+2c^2-2a^2c^2+2c^4-2bc-2b^2c^2$

$ab+a^2b^2=ac-c^2+a^2c^2-c^4+bc+b^2c^2$

$(b^2-c^2)a^2+(b-c)a+c^4+(-b^2+1)c^2-bc=0$

ここで

$c^4+(-b^2+1)c^2-bc$

$=c\{c^3+(-b^2+1)c-b\}$

| | $b$ | 1 | 0 | $-b^2+1$ | $-b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $b$ | $b^2$ | $b$ | |
| | 1 | $b$ | 1 | 0 | |

$=c(c-b)(c^2+bc+1)$

$(b+c)(b-c)a^2+(b-c)a-c(b-c)(c^2+bc+1)=0$

$b\neq c$ なので

$(b+c)a^2+a-c(c^2+bc+1)=0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $b+c$ | × | $c^2+bc+1$ | $\longrightarrow c^2+bc+1$ |
| 1 | | $-c$ | $\longrightarrow -c^2-bc$ |

$\{(b+c)a+c^2+bc+1\}(a-c)=0$

$a\neq c$ なので

$(b+c)a+c^2+bc+1=0$

$(b+c)a=-c^2-bc-1$

ここで

$b+c=0$ とすると，$c=-b$

$0=-b^2+b^2-1$

$0=-1$ となり不合理

$b+c\neq 0$ なので

$$a=-\frac{c^2+bc+1}{b+c}$$

(2)

(証明)

$$b-a=b+\frac{c^2+bc+1}{b+c}$$

$$=\frac{b^2+bc+c^2+bc+1}{b+c}$$

$$=\frac{b^2+2bc+c^2+1}{b+c}$$

$$=\frac{(b+c)^2+1}{b+c}$$

$$=b+c+\frac{1}{b+c}$$

ここで

$a<b$ より $b-a>0$

つまり

$$b+c+\frac{1}{b+c}>0$$

$b+c<0$ とすると

$(b+c)^2+1<0$ となり不合理

$b+c>0$ なので

(相加)≧(相乗)

$$b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\times\frac{1}{b+c}}$$

$$b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2$$

つまり $b-a\geqq 2$ ■

(裏に続く)

(3)

$$AB^2 = (b-a)^2 + (b^2-a^2)^2$$
$$= (b-a)^2 + (b-a)^2(b+a)^2$$
$$= (b-a)^2\{1+(b+a)^2\}$$

ここで

(2) より $b-a \geqq 2$

$1+(b+a)^2 \geqq 1$

なので

$AB^2$ が最小となるには

$b-a=2$ かつ $b+a=0$

つまり

$a=-1$, $b=1$ のとき

このとき (1) より

$$-1 = -\frac{c^2+c+1}{1+c}$$

$$c+1 = c^2+c+1$$

$$c^2 = 0$$

$$c = 0$$

よって

$A(-1,1)$, $B(1,1)$, $C(0,0)$ のとき

$\min AB = 2$

(1) 解法2

$CA \perp CB$ より

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

(ここで

$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} = (-c+a, -c^2+a^2)$

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = (-c+b, -c^2+b^2)$

なので)

$(-c+a)(-c+b) + (-c^2+a^2)(-c^2+b^2) = 0$

$(a-c)(b-c) + (a+c)(a-c)(b+c)(b-c) = 0$

$a \neq c$, $b \neq c$ なので

$1 + (a+c)(b+c) = 0$

$(a+c)(b+c) = -1$

$b+c \neq 0$ より

$$a+c = -\frac{1}{b+c}$$

$$a = -c - \frac{1}{b+c}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題21]

2直線 $ax+by=b$, $bx-ay=a$ の交点 $(p,\ q)$ について考える。ただし，$a^2+b^2\neq 0$ とする。

(1) $|p|\leqq 1$ かつ $|q|\leqq 1$ であることを示せ。

(2) $p$, $q$ がともに1に等しくなることがあるか。理由をつけて答えよ。 (2006 奈良大)

(1)

**証明1**

点 $(p,q)$ は 2直線 $ax+by=b$, $bx-ay=a$ の交点なので

$$\begin{cases} ap+bq=b & \cdots ① \\ bp-aq=a & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times a$ $\quad a^2p+abq=ab$

② $\times b$ $\quad b^2p-abq=ab$ (+

$(a^2+b^2)p=2ab$

$a^2+b^2\neq 0$ なので

$$p=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

① $\times b$ $\quad abp+b^2q=b^2$

② $\times a$ $\quad abp-a^2q=a^2$ (−

$(a^2+b^2)q=b^2-a^2$

$a^2+b^2\neq 0$ なので

$$q=\frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

ここで

$$p^2+q^2=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{a^4+2a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=1$$

$p^2+q^2=1$ なので

$|p|\leqq 1$ かつ $|q|\leqq 1$ ■

(2)

**証明1**

(1) で $p^2+q^2=1$ が成り立つので

$p=\cos\theta$, $q=\sin\theta$

を満たす $\theta$ が存在する.

$p=q=1$ のとき

$\cos\theta=\sin\theta=1$

これを満たす $\theta$ は存在しない.

よって. $p$, $q$ がともに1に等しくなることはない。 ■

(1)

**証明2**

$$\begin{cases} ap+bq=b \\ bp-aq=a \end{cases} \quad \text{より}$$

$$p=\frac{2ab}{a^2+b^2},\quad q=\frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}$$

$$1-p^2=1-\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}\geqq 0$$

よって $p^2\leqq 1$ つまり $|p|\leqq 1$

$$1-q^2=1-\frac{a^4-2a^2b^2+b^4}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{a^4+2a^2b^2+b^4-a^4+2a^2b^2-b^4}{(a^2+b^2)^2}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\geqq 0$$

よって $q^2\leqq 1$ つまり $|q|\leqq 1$ ■

(2)

**証明2**

$p=1$ のとき $\frac{2ab}{a^2+b^2}=1$

$2ab=a^2+b^2$

$a^2-2ab+b^2=0$

$(a-b)^2=0$

$a=b$ ——— ①

$q=1$ のとき $\frac{-a^2+b^2}{a^2+b^2}=1$

$-a^2+b^2=a^2+b^2$

$2a^2=0$

$a=0$ ——— ②

①, ② より $a=b=0$

これは $a^2+b^2\neq 0$ に不合理

よって. $p$, $q$ がともに1に等しくなることはない。 ■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B166]

$i$は虚数単位とし，実数$a$，$b$は$a^2+b^2>0$を満たす定数とする。複素数$(a+bi)(x+yi)$の実部が2に等しいような座標平面上の点$(x,\ y)$全体の集合を$L_1$とし，また$(a+bi)(x+yi)$の虚部が$-3$に等しいような座標平面上の点$(x,\ y)$全体の集合を$L_2$とする。

(1) $L_1$と$L_2$はともに直線であることを示せ。

(2) $L_1$と$L_2$は互いに垂直であることを示せ。

(3) $L_1$と$L_2$の交点の座標を求めよ。

(2014　大阪大)

(1)　(証明)

$(a+bi)(x+yi)$

$=ax+ayi+bxi-by$

$=(ax-by)+(ay+bx)i$

$L_1$の実部$=2$なので

$ax-by=2$ ――――①

$L_2$の虚部$=-3$なので

$bx+ay=-3$ ――――②

①，②より

$L_1$と$L_2$はともに直線である。■

(2)　(証明)

($L_1$の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}=(a,-b)$

$L_2$の法線ベクトル $\overrightarrow{n_2}=(b,a)$

であり，

$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=ab-ab=0$

よって　$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$

つまり，　$L_1\perp L_2$ ■

(3)　解法1

①$\times a$　　$a^2x-aby=2a$

②$\times b$　　$b^2x+aby=-3b$　(+

$(a^2+b^2)x=2a-3b$

$a^2+b^2\neq0$　なので

$x=\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2}$

①$\times b$　　$abx-b^2y=2b$

②$\times a$　　$abx+a^2y=-3a$　(−

$-(a^2+b^2)y=3a+2b$

$a^2+b^2\neq0$　なので

$y=-\dfrac{3a+2b}{a^2+b^2}$

よって，

交点 $\left(\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2},\ -\dfrac{3a+2b}{a^2+b^2}\right)$

解法2

$L_1$と$L_2$の交点$(x,y)$は

$(a+bi)(x+yi)=2-3i$

を満たす。

$x+yi=\dfrac{2-3i}{a+bi}$

$=\dfrac{(2-3i)(a-bi)}{a^2-b^2i^2}$

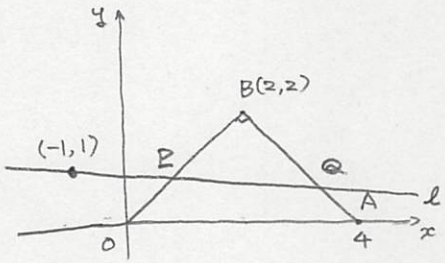
$=\dfrac{(2a-3b)+(-3a-2b)i}{a^2+b^2}$

実部と虚部を比較して

$x=\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{-3a-2b}{a^2+b^2}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B167]

3点O(0, 0), A(4, 0), B(2, 2)を頂点とする三角形OABの面積を，直線$y=mx+m+1$が2等分するとき，定数$m$の値を求めよ。 (2006 早稲田大)




$l: y=mx+m+1$

$=m(x+1)+1$ は

定点 $(-1,1)$ を通る

傾き $m$ の直線 である。

$S(\triangle OAB)=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$ なので

直線 $l$ と辺 OB, OA との交点を

それぞれ P, Q とおくと

$S(\triangle BPQ)=2$

となるとよい。

$l$ とOBの交点は

OB: $y=x$ より

$x=mx+m+1$

$(1-m)x=m+1$

辺OB と交わるためには $m\neq 1$

$x=\frac{1+m}{1-m}$

$BP:BO=\left(2-\frac{1+m}{1-m}\right):2$

$2BP=2\sqrt{2}\times\frac{1-3m}{1-m}$

$BP=\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1-m}$

$l$ とABの交点は

AB: $y=-x+4$ より

$-x+4=mx+m+1$

$(1+m)x=3-m$

辺AB と交わるためには $m\neq -1$

$x=\frac{3-m}{1+m}$

$BQ:BA=\left(\frac{3-m}{1+m}-2\right):2$

$2BQ=2\sqrt{2}\times\frac{1-3m}{1+m}$

$BQ=\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1+m}$

よって

$S(\triangle BPQ)=\frac{1}{2}\times BP\times BQ$ より

$2=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1-m}\times\frac{\sqrt{2}(1-3m)}{1+m}$

$4(1-m)(1+m)=2(1-3m)^2$

$4-4m^2=2-12m+18m^2$

$22m^2-12m-2=0$

$11m^2-6m-1=0$

$m=\frac{3\pm\sqrt{20}}{11}$

$=\frac{3\pm 2\sqrt{5}}{11}$

$m<1$ より

$m=\frac{3-2\sqrt{5}}{11}$

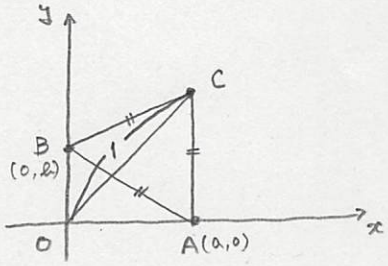
[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B168]

座標平面上の原点をOとする。点A$(a,\ 0)$，点B$(0,\ b)$および点Cが$OC=1$，$AB=BC=CA$を満たしながら動く。

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$とする。$s$と$t$の関係を表す等式を求めよ。

(2) △ABCの面積のとりうる値の範囲を求めよ。

(2015 一橋大)




(i)

$C(\cos\theta, \sin\theta)$ とできる.

$AB=BC=CA$ より

$AB^2=BC^2=CA^2$

$a^2+b^2=\cos^2\theta+(\sin\theta-b)^2=(\cos\theta-a)^2+\sin^2\theta$

$a^2+b^2=1-2b\sin\theta+b^2=1-2a\cos\theta+a^2$

よって.

$\begin{cases} a^2+b^2=1-2b\sin\theta+b^2 & \text{——①} \\ a^2+b^2=1-2a\cos\theta+a^2 & \text{——②} \end{cases}$

i) $a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ のとき

①, ② より

$\begin{cases} \sin\theta=\dfrac{1-a^2}{2b} \\ \cos\theta=\dfrac{1-b^2}{2a} \end{cases}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$\dfrac{1-2a^2+a^4}{4b^2}+\dfrac{1-2b^2+b^4}{4a^2}=1$

$a^2-2a^4+a^6+b^2-2b^4+b^6=4a^2b^2$

$(a^2+b^2)-2(a^4+b^4)+(a^6+b^6)=4a^2b^2$

ここで

$a^2+b^2=s$, $ab=t$ より

$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$

$=s^2-2t^2$

$a^6+b^6=(a^2+b^2)^3-3a^2b^2(a^2+b^2)$

$=s^3-3st^2$

$s-2(s^2-2t^2)+(s^3-3st^2)=4t^2$

$s-2s^2+s^3-3st^2=0$

$a\neq 0$ かつ $b\neq 0$ より $s=a^2+b^2\neq 0$

$1-2s+s^2-3t^2=0$

$3t^2=(s-1)^2$

$t^2=\dfrac{1}{3}(s-1)^2$ ——③

(ii) $a=0$ のとき. $A(0,0)$ であり

$B(0,1)$ or $B(0,-1)$ となり $b=\pm 1$

このとき

$\begin{cases} s=0+1=1 \\ t=0\times(\pm 1)=0 \end{cases}$

これは ③ を満たす.

(iii) $b=0$ のとき $B(0,0)$ であり.

$A(1,0)$ or $A(-1,0)$ となり $a=\pm 1$

このとき

$\begin{cases} s=1+0=1 \\ t=(\pm 1)\times 0=0 \end{cases}$

これは ③ を満たす.

(i) ～ (iii) より

$\underline{\underline{t^2=\dfrac{1}{3}(s-1)^2}}$

(2)

$\begin{cases} a^2+b^2=s \\ a^2b^2=t^2=\dfrac{1}{3}(s-1)^2 \end{cases}$

なので.

$a^2$ と $b^2$ を解にもつ2次方程式は

$x^2-sx+\dfrac{1}{3}(s-1)^2=0$

$3x^2-3sx+(s-1)^2=0$

これが2つの0以上の解をもつための条件は

$\begin{cases} \text{判別式 } D\geq 0 & \text{——④} \\ 3s\geq 0 & \text{——⑤} \\ (s-1)^2\geq 0 & \text{——⑥} \end{cases}$

④ より

$9s^2-12(s-1)^2\geq 0$

$3s^2-4(s^2-2s+1)\geq 0$

$-s^2+8s-4\geq 0$

$s^2-8s+4\leq 0$

$4-2\sqrt{3}\leq s\leq 4+2\sqrt{3}$

⑤ より $s\geq 0$

⑥ より 解はすべての実数

④～⑥ より

$4-2\sqrt{3}\leq s\leq 4+2\sqrt{3}$

(裏面へ)

（ここで
$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AB^2 \sin 60^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} S$$
）

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2\sqrt{3}) \leqq \frac{\sqrt{3}}{4} S \leqq \frac{\sqrt{3}}{4}(4+2\sqrt{3})$$

$$\frac{2\sqrt{3}-3}{2} \leqq S(\triangle ABC) \leqq \frac{2\sqrt{3}+3}{2}$$