

点 $(-1, 0)$ を通る傾き m の直線と、円 $(x-3)^2 + y^2 = 8$ との共有点の個数は、 m とともにどう変わるか。

解法1

点 $(-1, 0)$ を通る傾き m の直線は

$$y = m(x+1)$$

とてきるのて

$$(x-3)^2 + y^2 = 8 \quad \text{と連立して}$$

$$(x-3)^2 + m^2(x+1)^2 = 8$$

$$(1+m^2)x^2 + (-6+2m^2)x + 1+m^2 = 0$$

判別式 D とて

$$D/4 = (-3+m^2)^2 - (1+m^2)^2$$

$$= (-2+2m^2)(-4)$$

$$= -8(m^2-1)$$

$$D/4 > 0 \text{ のとき}$$

$$m^2-1 < 0$$

$$-1 < m < 1$$

$$D/4 = 0 \text{ のとき}$$

$$m = \pm 1$$

$$D/4 < 0 \text{ のとき}$$

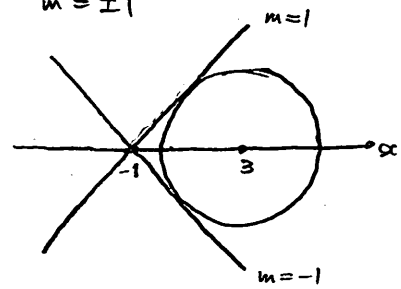
$$m < -1, 1 < m$$

よて

$$\begin{cases} -1 < m < 1 & \text{のとき} & 2\text{個} \\ m = \pm 1 & \text{のとき} & 1\text{個} \\ m < -1, 1 < m & \text{のとき} & 0\text{個} \end{cases}$$

$$m^2 = 1$$

$$m = \pm 1$$



図より

$$\begin{cases} -1 < m < 1 & \text{のとき} & 2\text{個} \\ m = \pm 1 & \text{のとき} & 1\text{個} \\ m < -1, 1 < m & \text{のとき} & 0\text{個} \end{cases}$$

解法2

点 $(-1, 0)$ を通る傾き m の直線は

$$y = m(x+1) \Leftrightarrow mx - y + m = 0$$

とてき

この直線と円 A の中心 $(3, 0)$ との距離 d は

$$d = \frac{|3m + m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{4|m|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

$$\text{半径 } r = 2\sqrt{2}$$

接するとき $d = r$ であり、

$$\frac{4|m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}|m| = \sqrt{m^2 + 1}$$

両辺 2乗して

$$2m^2 = m^2 + 1$$

点A(2, 4)を通り、円C: $x^2 + y^2 = 2$ に接する直線の方程式を求めよ。また、直線 $x + y = 1$ が円Cによって切り取られる弦の長さを求めよ。

解法1

接点 (x, y) とおくと $x^2 + y^2 = 2$ ①

接線 $xx + yy = 2$

これが点A(2, 4)を通るので

$$2x + 4y = 2$$

$$x = -2y + 1 \quad \text{②}$$

①, ②より

$$(-2y + 1)^2 + y^2 = 2$$

$$5y^2 - 4y - 1 = 0$$

$$(5y + 1)(y - 1) = 0$$

$$y = -\frac{1}{5}, 1$$

$$y = -\frac{1}{5} \text{ のとき } x = \frac{7}{5} \text{ であり}$$

$$\text{接線 } \frac{7}{5}x - \frac{1}{5}y = 2$$

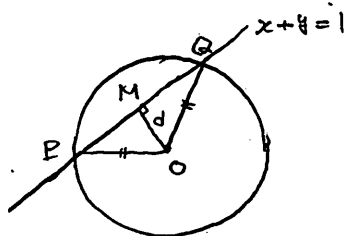
$$7x - y = 10$$

$$y = 1 \text{ のとき } x = -1 \text{ であり}$$

$$\text{接線 } -x + y = 2$$

以上より

$$\text{接線 } 7x - y = 10, -x + y = 2$$



図のように点O, P, Q, Mをとる

中心(0,0)と直線 $x + y - 1 = 0$

との距離dは

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{半径 } r = \sqrt{2}$$

$\triangle OPM$ で三平方の定理より

$$PM^2 + \frac{1}{2} = 2$$

$$PM^2 = \frac{3}{2}$$

$$PM > 0 \text{ より } PM = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

よって

$$\underline{PQ = \sqrt{6}}$$

解法2 (前半)

$x = 2$ は接線ではない

点A(2, 4)を通る直線は

$$y - 4 = m(x - 2)$$

$$mx - y - 2m + 4 = 0$$

とできる。

この直線と円の中心(0,0)との

距離dは

$$d = \frac{|-2m+4|}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$\text{半径 } r = \sqrt{2}$$

接するから $d = r$ より

$$\frac{|-2m+4|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{2}$$

$$|2m-4| = \sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$$

両辺2乗して

$$4m^2 - 16m + 16 = 2m^2 + 2$$

$$2m^2 - 16m + 14 = 0$$

$$m^2 - 8m + 7 = 0$$

$$(m-1)(m-7) = 0$$

$$m = 1, 7$$

よって

$$\underline{\text{接線 } x - y + 2 = 0, 7x - y - 10 = 0}$$

円 $x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 50 = 0$ は定数 a がどんな値をとっても2つの定点を通ることを示せ。また、この円と円 $x^2 + y^2 + x + y - 21 = 0$ の2交点を通る直線が点 $(-1, 2)$ を通るように a の値を定めよ。

(証明)

$$x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 50 = 0$$

$$(-6x + 2y + 20)a + (x^2 + y^2 - 50) = 0$$

a について a の恒等式 とおいて

$$\begin{cases} -6x + 2y + 20 = 0 \\ x^2 + y^2 - 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 10 \\ x^2 + y^2 = 50 \end{cases}$$

連立して

$$x^2 + (3x - 10)^2 = 50$$

$$10x^2 - 60x + 50 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$(x-1)(x-5) = 0$$

$$x = 1, 5$$

$$\begin{cases} x=1 & a \text{ とき } y = -7 \\ x=5 & a \text{ とき } y = 5 \end{cases}$$

よって 2点 $(1, -7), (5, 5)$ を通る。

2円の交点を通る直線は

$$(x^2 + y^2 - 6ax + 2ay + 20a - 50) - (x^2 + y^2 + x + y - 21) = 0$$

$$(-6a-1)x + (2a-1)y + (20a-29) = 0$$

よって、この直線が点 $(-1, 2)$ を通るから

$$6a+1 + 4a-2 + 20a-29 = 0$$

$$30a = 30$$

$$\underline{\underline{a = 1}}$$

xy 平面上に2点 $A(5-2\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$ と $B(5+2\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2})$ があり、線分 AB を直径とする円を C とする。

(1) 円 C の方程式を求めよ。

(2) 円 C 上に中心をもち、 x 軸と y 軸の両方に接する円の方程式を求めよ。

(2011 西南学院大)

(1) **解法1**

線分 AB の中点 M とおくと。

$$M(5, 1) \quad \text{とあり。}$$

$$AM = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4 \quad (= \text{半径})$$

よって

$$C: (x-5)^2 + (y-1)^2 = 16$$

解法2

円 C 上の点 $P(x, y)$ とおくと。

$$AP \perp BP \quad \text{より} \quad \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (x-5+2\sqrt{2}, y-1-2\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{BP} = (x-5-2\sqrt{2}, y-1+2\sqrt{2}) \end{array} \right)$$

$$(x-5)^2 - 8 + (y-1)^2 - 8 = 0$$

よって

$$C: (x-5)^2 + (y-1)^2 = 16$$

よって

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25 \end{cases}$$

(ii) 円の中心が第4象限にあるとき

中心 $(r, -r)$, 半径 r とてき。

中心 $(r, -r)$ は円 C 上にあるので

$$(r-5)^2 + (-r-1)^2 = 16$$

$$2r^2 - 8r + 10 = 0$$

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

$$\text{判別式 } D/4 = 4 - 5 = -1 < 0$$

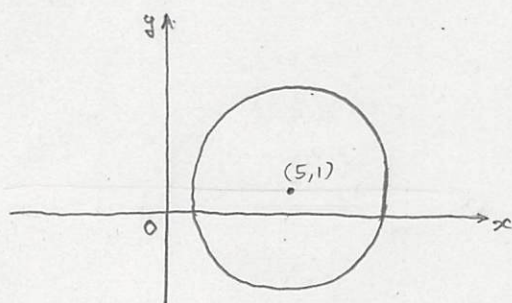
よって

実数解は存在しない。

(i), (ii) より

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$$

(2)



(i) 円の中心が第1象限にあるとき

中心 (r, r) , 半径 r とてき。

中心 (r, r) は円 C 上にあるので

$$(r-5)^2 + (r-1)^2 = 16$$

$$2r^2 - 12r + 10 = 0$$

$$r^2 - 6r + 5 = 0$$

$$(r-1)(r-5) = 0$$

$$r = 1, 5$$

2つの円 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$, $(x-4)^2 + (y-6)^2 = r^2$ について考える。ただし、 r は正の定数とする。

- (1) 2つの円が共有点をもたないための r の必要十分条件を求めよ。
 (2) $r=4$ のとき、2つの円の交点を通る直線の方程式を求めよ。
 (3) $r=6$ のとき、2つの円の交点、および原点を通る円の方程式を求めよ。

(2013 愛知大)

(1)

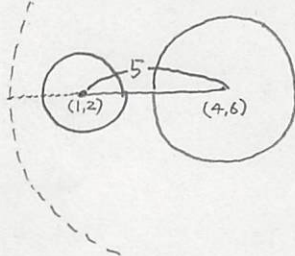
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ は}$$

中心 $(1, 2)$, 半径 2 の円

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = r^2 \text{ は}$$

中心 $(4, 6)$, 半径 r の円

$$\text{中心間の距離} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



2円が共有点をもたないための

r の必要十分条件は

$$r > 5 + 2 \text{ または } r < 5 - 2$$

つまり

$$\underline{0 < r < 3, 7 < r}$$

これが原点を通るので

$$1 + 16k = 0$$

$$k = -\frac{1}{16}$$

このとき

$$(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1) - \frac{1}{16}(x^2 + y^2 - 8x - 12y + 16) = 0$$

$$16x^2 + 16y^2 - 32x - 64y + 16 - x^2 - y^2 + 8x + 12y - 16 = 0$$

$$15x^2 + 15y^2 - 24x - 52y = 0$$

よって

$$\underline{\underline{x^2 + y^2 - \frac{8}{5}x - \frac{52}{15}y = 0}}$$

(2)

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4 \text{ より}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

$r=4$ のとき

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 16 \text{ より}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 36 = 0$$

2円の交点を通る直線は

$$(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1) - (x^2 + y^2 - 8x - 12y + 36) = 0$$

$$\underline{\underline{6x + 8y - 35 = 0}}$$

(3)

$r=6$ のとき

$$(x-4)^2 + (y-6)^2 = 36 \text{ より}$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 16 = 0$$

2円の交点を通る円は

$$(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1) + k(x^2 + y^2 - 8x - 12y + 16) = 0$$

で表される。

ただし、 $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 16 = 0$ を除く。

点 $(0, k)$ を通る傾き 1 の直線が、中心 $(0, 1)$ 、半径 1 の円 C と異なる 2 点 P, Q で交わるとする。

(1) 実数 k の値の範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ が円 C に内接する正三角形の 1 辺となるとき、実数 k の値を求めよ。

(2011 南山大)

(1)

点 $(0, k)$ を通る傾き 1 の直線は

$$y = x + k \Leftrightarrow x - y + k = 0$$

とでき、

この直線と点 $(0, 1)$ の距離 d は

$$d = \frac{|-1+k|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{2}}$$

半径 $r = 1$

異なる 2 点で交わる時 $d < r$ なので

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}} < 1$$

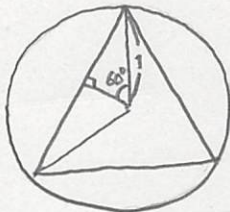
$$|k-1| < \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} < k-1 < \sqrt{2}$$

よって

$$\underline{\underline{1-\sqrt{2} < k < 1+\sqrt{2}}}$$

(2)



条件を満たすとき $d = \frac{1}{2}$ なので

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$|k-1| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$k-1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって

$$\underline{\underline{k = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}}}$$

2つの円 $x^2 + y^2 = 1$ ……①, $x^2 + y^2 - 2kx + 3k = 0$ ……②について考える。ただし、 k は定数とする。

- (1) ②が円の方程式を表すための k の値の範囲を求めよ。
 (2) (1)で、円①, ②が異なる2つの共有点をもつとき、 k の値の範囲を求めよ。
 (3) $k=4$ のとき、円①, ②の共通接線の方程式をすべて求めよ。

(2017 早稲田大)

(1)

$$\textcircled{2} \quad x^2 + y^2 - 2kx + 3k = 0$$

$$(x-k)^2 + y^2 = k^2 - 3k$$

これが円を表すためには

$$k^2 - 3k > 0$$

$$k(k-3) > 0$$

よって

$$\underline{k < 0, 3 < k}$$

(2)

①, ②を連立して

$$1 - 2kx + 3k = 0$$

$$2kx = 3k + 1$$

$k \neq 0$ より

$$x = \frac{3k+1}{2k}$$

異なる2つの共有点をもつためには

$$-1 < \frac{3k+1}{2k} < 1$$

$$-2k^2 < k(3k+1) < 2k^2$$

$$\begin{cases} 5k^2 + k > 0 \\ k^2 + k < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k(5k+1) > 0 \\ k(k+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k < -\frac{1}{5}, 0 < k \\ -1 < k < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -1 < k < -\frac{1}{5}$$

$$k < 0, 3 < k \text{ より}$$

$$\underline{-1 < k < -\frac{1}{5}}$$

(3)

$$k=4 \text{ のとき}$$

$$\textcircled{2} \quad x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4$$

中心 $(4, 0)$, 半径 2 の円

①上での接点 (X, Y) において $X^2 + Y^2 = 1$ ……③

$$\text{接線 } l: Xx + Yy = 1$$

これと②の円の中心 $(4, 0)$ との距離 d は

$$d = \frac{|4X - 1|}{\sqrt{X^2 + Y^2}} = |4X - 1|$$

半径 $r = 2$

であり、

接するとき $d = r$ となるので

$$|4X - 1| = 2$$

$$4X - 1 = -2, 2$$

$$4X = -1, 3$$

$$X = -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$$

$$X = -\frac{1}{4} \text{ のとき } Y = \pm \frac{\sqrt{15}}{4} \text{ であり、}$$

$$l: -\frac{1}{4}x \pm \frac{\sqrt{15}}{4}y = 1$$

$$x \mp \sqrt{15}y + 4 = 0$$

$$X = \frac{3}{4} \text{ のとき } Y = \pm \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ であり}$$

$$l: \frac{3}{4}x \pm \frac{\sqrt{7}}{4}y = 1$$

$$3x \pm \sqrt{7}y - 4 = 0$$

よって、

共通接線は

$$\underline{x \pm \sqrt{15}y + 4 = 0, 3x \pm \sqrt{7}y - 4 = 0}$$

正の実数 t に対して方程式 $x^2 + y^2 - 2tx - 4ty + 4t^2 = 0$ で表される円を C_t とする。 t がどのような値でも C_t と接する直線の方程式を求めよ。

(2015 日本女子大)

解法1

$$C_t: x^2 + y^2 - 2tx - 4ty + 4t^2 = 0$$

$$(x-t)^2 + (y-2t)^2 = t^2$$

中心 $(t, 2t)$; 半径 t の円

t がどのような値でも C_t と接するためには $t = 1, 2$ のときも接することが必要

$t = 1$ のとき

$$C_1: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

接点 (X, Y) とおくと

$$(X-1)^2 + (Y-2)^2 = 1 \quad \text{①}$$

が成り立ち、

$$\text{接線 } (X-1)(x-1) + (Y-2)(y-2) = 1$$

$$(X-1)x + (Y-2)y - X - 2Y + 4 = 0 \quad \text{②}$$

$t = 2$ のとき

$$C_2: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$$

中心 $(2, 4)$, 半径 2 の円

直線 ② と点 $(2, 4)$ との距離 d は

$$d = \frac{|2X - 2 + 4Y - 4 - X - 2Y + 4|}{\sqrt{(X-1)^2 + (Y-2)^2}} = |X + 2Y - 2| \quad (\because \text{①より})$$

半径 $r = 2$

接するとき $d = r$ となる

$$|X + 2Y - 2| = 2$$

$$X + 2Y - 2 = -2, 2$$

$$X = -2Y, X = -2Y + 4$$

i) $X = -2Y$ のとき

①より

$$(-2Y-1)^2 + (Y-2)^2 = 1$$

$$5Y^2 = -4$$

これを満たす $Y \in \mathbb{R}$ は存在しない。

ii) $X = -2Y + 4$ のとき

①より

$$(-2Y+3)^2 + (Y-2)^2 = 1$$

$$5Y^2 - 16Y + 12 = 0$$

$$(5Y-6)(Y-2) = 0$$

$$Y = \frac{6}{5}, 2$$

$$(i) Y = \frac{6}{5} \text{ のとき } X = \frac{8}{5}$$

このとき ②は

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} - \frac{12}{5} + 4 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x$$

$$(ii) Y = 2 \text{ のとき } X = 0$$

このとき ②は

$$-x - 4 + 4 = 0$$

$$x = 0$$

以上により

$$y = \frac{3}{4}x, x = 0 \quad (\text{必要})$$

逆に、

$$y = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x - 4y = 0$$

と点 $(t, 2t)$ との距離 d_1 は

$$d_1 = \frac{|3t - 8t|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-5t|}{5} = t \quad (\because t > 0)$$

半径 $r_t = t$

$d_1 = r_t$ を満たす t で接する。

$x = 0$ と点 $(t, 2t)$ との距離 d_2 は

$$d_2 = t$$

半径 $r_t = t$

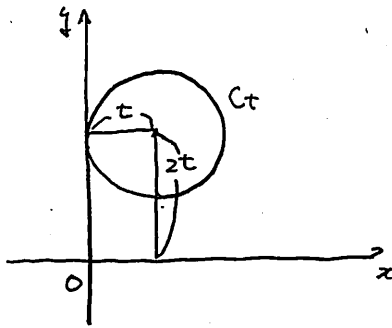
$d_2 = r_t$ を満たす t で接する。

よって

$$\text{接線 } y = \frac{3}{4}x, x = 0$$

(裏に続く)

解法2



$x=0$ は接線である。

$$y=ax+b \iff ax-y+b=0$$

点 $(t, 2t)$ と距離 d は

$$d = \frac{|at-2t+b|}{\sqrt{a^2+1}}$$

半径 $r=t$

接するとき $d=r$ となる

$$\frac{|at-2t+b|}{\sqrt{a^2+1}} = t$$

$$|at-2t+b| = t\sqrt{a^2+1}$$

両辺2乗して

$$(a-2)^2 t^2 + 2(a-2)bt + b^2 = (a^2+1)t^2$$

$$(-4a+3)t^2 + 2(a-2)bt + b^2 = 0$$

t について恒等式とみ?

$$\begin{cases} -4a+3=0 \\ 2(a-2)b=0 \\ b^2=0 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = \frac{3}{4}, b=0$$

$$\text{よって } y = \frac{3}{4}x$$

以上より

$$\underline{\underline{\text{接線 } x=0, y=\frac{3}{4}x}}$$

放物線 $y=x^2$ と円 $x^2+(y-3)^2=\frac{r^2}{4}$ (r は正の定数) について考える。

(2016 岩手大)

- (1) $r=6$ のとき、放物線と円の共有点の座標をすべて求めよ。
 (2) r がすべての正の実数値をとって変化するとき、放物線と円の共有点の個数はどのように変わるか、調べよ。

(1)

 $r=6$ のとき

$$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-3)^2=9 \end{cases}$$

より、

$$y+(y-3)^2=9$$

$$y^2-5y+9=0$$

$$y(y-5)=0$$

$$y=0, 5$$

 $y=0$ のとき

$$x^2=0 \quad \text{より} \quad x=0$$

 $y=5$ のとき

$$x^2=5 \quad \text{より} \quad x=\pm\sqrt{5}$$

よって

共有点 $(0,0), (\sqrt{5},5), (-\sqrt{5},5)$

(2)

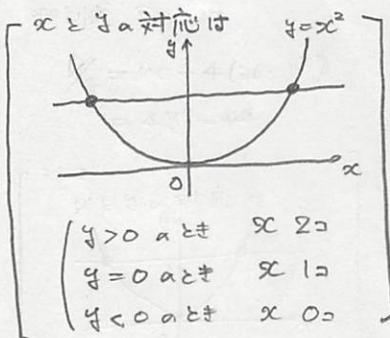
$$\begin{cases} y=x^2 \\ x^2+(y-3)^2=\frac{r^2}{4} \end{cases}$$

より、

$$y+(y-3)^2=\frac{r^2}{4}$$

$$y^2-5y+9-\frac{r^2}{4}=0$$

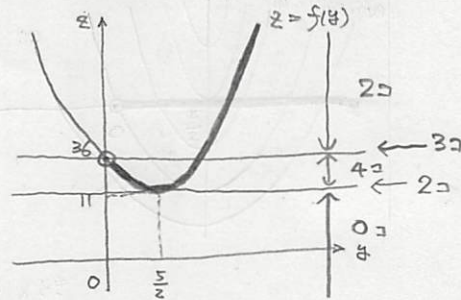
$$4y^2-20y+36=r^2$$



$$f(y)=4y^2-20y+36$$

$$=4\left(y-\frac{5}{2}\right)^2+11$$

とおくと

 $z=f(y)$ と $z=r^2$ の関係

共有点を調べると、

$$\begin{cases} r^2 > 36 & \text{のとき} & 2\text{点} \\ r^2 = 36 & \text{のとき} & 3\text{点} \\ 11 < r^2 < 36 & \text{のとき} & 4\text{点} \\ r^2 = 11 & \text{のとき} & 2\text{点} \\ r^2 < 11 & \text{のとき} & 0\text{点} \end{cases}$$

 $r > 0$ のとき

$$\begin{cases} \sqrt{11} < r < 6 & \text{のとき} & 4\text{点} \\ r = 6 & \text{のとき} & 3\text{点} \\ r = \sqrt{11}, 6 < r & \text{のとき} & 2\text{点} \\ 0 < r < \sqrt{11} & \text{のとき} & 0\text{点} \end{cases}$$

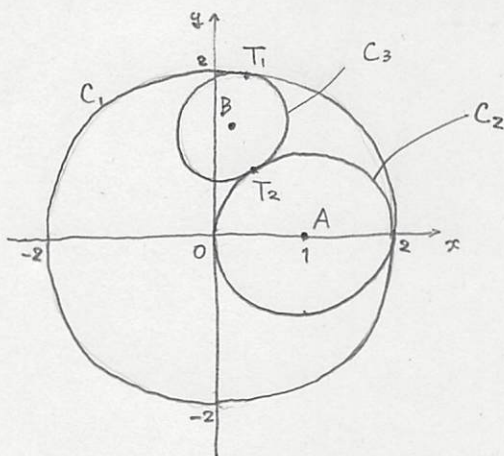
[2018スタンダードⅡAB受 問題B174]

座標平面において原点を中心とする半径2の円を C_1 とし、点 $(1, 0)$ を中心とする半径1の円を C_2 とする。また、点 (a, b) を中心とする半径 t の円 C_3 が、 C_1 に内接し、かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし、 b は正の実数とする。

(1) a, b を t を用いて表せ。また、 t がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき、 b の最大値を求めよ。

(2009 東京大)



(1)

$$A(1,0), B(a,b),$$

C_1 と C_3 の接点 T_1 , C_2 と C_3 の接点 T_2 と置く。

$$AT_2 + T_2B = AB \quad \text{なぞ}"$$

$$1+t = \sqrt{(a-1)^2 + b^2}$$

$$t \geq 0 \quad \text{なぞ}" \quad \text{両辺2乗して}$$

$$1+2t+t^2 = a^2 - 2a + 1 + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 2a = t^2 + 2t \quad \text{--- ①}$$

$$OB + BT_1 = OT_1 \quad \text{なぞ}"$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} + t = 2$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 2 - t$$

$$t < 2 \quad \text{なぞ}" \quad \text{両辺2乗して}$$

$$a^2 + b^2 = 4 - 4t + t^2 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{① - ② より}$$

$$-2a = 6t - 4$$

$$a = -3t + 2$$

$$\text{② より}$$

$$9t^2 - 12t + 4 + b^2 = 4 - 4t + t^2$$

$$b^2 = -8t^2 + 8t$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{なぞ}" \\ b > 0 \quad \text{より} \quad b^2 > 0 \\ -8t^2 + 8t > 0 \\ t(t-1) < 0 \\ 0 < t < 1 \\ \text{よって} \quad 0 < t < 1 \end{array} \right)$$

$$b > 0 \quad \text{より} \quad b = 2\sqrt{2t(1-t)}$$

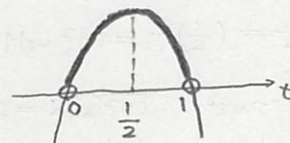
$$\text{よって} \quad a = -3t + 2, \quad b = 2\sqrt{2t(1-t)}, \quad 0 < t < 1$$

(2)

$$f(t) = t(1-t) \quad \text{なぞ}"$$

$$b = 2\sqrt{2f(t)} \quad \text{なぞ}"$$

$$f(t) \text{ の Max } a \text{ と } b \text{ も Max}$$



$$t = \frac{1}{2} \quad a \text{ と } b \text{ も Max}$$

$$\text{Max } b = 2\sqrt{2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

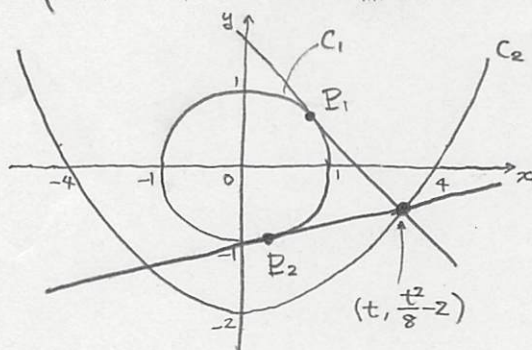
xy平面上に曲線 $C_1: y = \frac{x^2}{8} - 2$ と原点を中心とする半径1の円 C_2 がある。

(2013 一橋大)

- (1) t を実数とする。曲線 C_1 上の点 $(t, \frac{t^2}{8} - 2)$ から円 C_2 へ引いた2本の接線が、それぞれ点 P_1, P_2 で C_2 と接する。
 P_1, P_2 を通る直線 ℓ の方程式を求めよ。
 (2) (1) で求めた直線 ℓ は、 t の値にかかわらず、ある円に接することを示し、その円の方程式を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned}
 C_1: y &= \frac{x^2}{8} - 2 \quad \text{より} \\
 x^2 &= 8y + 16 \\
 C_2: x^2 + y^2 &= 1 \quad \text{と連立して} \\
 8y + 16 + y^2 &= 1 \\
 y^2 + 8y + 15 &= 0 \\
 (y+3)(y+5) &= 0 \\
 y &= -3, -5 \\
 \text{これは } C_2 \text{ で } -1 \leq y \leq 1 \text{ を満たさない。} \\
 \text{つまり、} C_1 \text{ と } C_2 \text{ は交点をもたない。}
 \end{aligned}$$



C_2 上の点 $P_1(x_1, y_1)$ における接線は

$$x_1 x + y_1 y = 1 \quad \text{で表される。}$$

これは点 $(t, \frac{t^2}{8} - 2)$ を通るとき

$$x_1 t + y_1 (\frac{t^2}{8} - 2) = 1 \quad \text{--- ①}$$

$P_2(x_2, y_2)$ における接線も同様に

$$x_2 t + y_2 (\frac{t^2}{8} - 2) = 1 \quad \text{--- ②}$$

①, ② より、

2点 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ を通る直線 ℓ は

$$\underline{tx + (\frac{t^2}{8} - 2)y = 1}$$

(2) 証明1

点 (x_3, y_3) から直線 ℓ までの

距離 d は

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{|tx_3 + (\frac{t^2}{8} - 2)y_3 - 1|}{\sqrt{t^2 + (\frac{t^2}{8} - 2)^2}} \\
 &= \frac{|tx_3 + (\frac{t^2}{8} - 2)y_3 - 1|}{\sqrt{\frac{t^4}{64} + \frac{t^2}{2} + 4}} \\
 &= \frac{|tx_3 + (\frac{t^2}{8} - 2)y_3 - 1|}{\sqrt{(\frac{t^2}{8} + 2)^2}} \\
 &= \frac{|tx_3 + (\frac{t^2}{8} - 2)y_3 - 1|}{\frac{t^2}{8} + 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここで} \\
 \frac{y_3}{8} : (-2y_3 - 1) &= \frac{1}{8} : 2 \quad \text{と17.} \\
 \frac{-2y_3 - 1}{8} &= \frac{2y_3}{8} \\
 -4y_3 &= 1 \\
 y_3 &= -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$(x_3, y_3) = (0, -\frac{1}{4})$ と17.

$$\begin{aligned}
 d &= \left| \frac{-\frac{t^2}{32} + \frac{1}{2} - 1}{\frac{t^2}{8} + 2} \right| \\
 &= \left| \frac{-t^2 - 16}{4t^2 + 64} \right| \\
 &= \left| \frac{-(t^2 + 16)}{4(t^2 + 16)} \right| \\
 &= \frac{1}{4} \quad (= \text{一定})
 \end{aligned}$$

となるから

中心 $(0, -\frac{1}{4})$ 、半径 $\frac{1}{4}$ の円と接する

その円の方程式は

$$\underline{x^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}}$$

直線 $tx + (\frac{t^2}{8} - 2)y = 1$

の包絡線 という。

(2) 証明2

直線 l が, t の値に関わらず, ある円に接するならば, その円は

l で $t=0, 4, -4, 8$ とは得られる4直線に接することが必要

l は

$$t=0 \text{ のとき } y = -\frac{1}{2}$$

$$t=4 \text{ のとき } x = \frac{1}{4}$$

$$t=-4 \text{ のとき } x = -\frac{1}{4}$$

$$t=8 \text{ のとき } y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

これらに接する円は

$$x^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$$

に限る.

この円の中心 $(0, -\frac{1}{4})$ と直線 l との

距離 d は

$$d = \frac{\left| -\frac{1}{4}(\frac{t^2}{8} - 2) - 1 \right|}{\sqrt{t^2 + (\frac{t^2}{8} - 2)^2}} = \frac{1}{4}$$

したがって, t の値に関わらず

点 $(0, -\frac{1}{4})$ との距離 $d = \frac{1}{4}$

であり, これは円の半径 $\frac{1}{4}$ と一致.

よって

$$\text{円} : x^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16}$$