

2 定点  $A(-4, 0)$ ,  $B(2, 0)$  に対して,  $AP:PB=2:1$  となる点  $P$  の軌跡は, 中心  $(\boxed{\phantom{00}}, 0)$ , 半径  $\boxed{\phantom{00}}$  の円である。

$P(x, y)$  とおくと

$$AP:BP = 2:1 \quad \text{より}$$

$$2BP = AP$$

$$2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

両辺を2乗して

$$4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = x^2 + 8x + 16 + y^2$$

$$3x^2 - 24x + 3y^2 = 0$$

$$x^2 - 8x + y^2 = 0$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 16$$

点  $P(x, y)$  は

$$(x-4)^2 + y^2 = 16$$

を満たす。

よって, 求める点  $P$  の軌跡は

中心  $(4, 0)$ , 半径  $4$  の円

放物線  $y = x^2 + 4tx + 2t^2 - 2t + 2$  ( $t$ は正の実数) の頂点  $P$  の座標は  $\left( \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right)$  である。 $t$  がすべての正の実数値をとって変化するとき、頂点  $P$  の描く軌跡は  $\square$  である。

$$y = x^2 + 4tx + 2t^2 - 2t + 2$$

$$= (x + 2t)^2 - 2t^2 - 2t + 2$$

頂点  $(-2t, -2t^2 - 2t + 2)$  より

$P(x, y)$  とおくと

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t^2 - 2t + 2 \end{cases}$$

$$t > 0 \quad \text{なので}$$

$$-2t < 0 \quad \text{つまり} \quad x < 0$$

このとき

$$t = -\frac{1}{2}x \quad \text{なので}$$

$$y = -2\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}x\right) + 2$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

よって、点  $P(x, y)$  は

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \quad (x < 0)$$

を満足す。

つまり、求める点  $P$  の軌跡は

放物弧  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \quad (x < 0)$  である。

連立不等式  $(x-3y-2)(3x+y+2) < 0$ ,  $x^2+y^2-2x+2y \leq 0$  が表す領域を図示せよ。

$$(x-3y-2)(3x+y+2) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3y-2 > 0 \\ 3x+y+2 < 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x-3y-2 < 0 \\ 3x+y+2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y < \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \\ y < -3x - 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} y > \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \\ y > -3x - 2 \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \quad \text{--- ①} \quad \text{と} \quad y = -3x - 2 \quad \text{--- ②}$$

①と②を連立して

$$\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = -3x - 2$$

$$\frac{10}{3}x = -\frac{4}{3}$$

$$x = -\frac{2}{5}, \quad y = -\frac{4}{5}$$

つまり、交点  $(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$ 

$$\text{①と} \quad x^2+y^2-2x+2y=0 \quad \text{--- ③}$$

①と③を連立して

$$x^2 + (\frac{1}{3}x - \frac{2}{3})^2 - 2x + 2(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}) = 0$$

$$9x^2 + x^2 - 4x + 4 - 18x + 6x - 12 = 0$$

$$10x^2 - 16x - 8 = 0$$

$$5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$(5x+2)(x-2) = 0$$

$$x = -\frac{2}{5}, 2$$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{5} \text{ とき } y = -\frac{4}{5} \\ x = 2 \text{ とき } y = 0 \end{cases}$$

つまり、交点  $(-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}), (2, 0)$ 

②と③を連立して

$$x^2 + (-3x-2)^2 - 2x + 2(-3x-2) = 0$$

$$x^2 + 9x^2 + 12x + 4 - 2x - 6x - 4 = 0$$

$$10x^2 + 4x = 0$$

$$x(5x+2) = 0$$

$$x = 0, -\frac{2}{5}$$

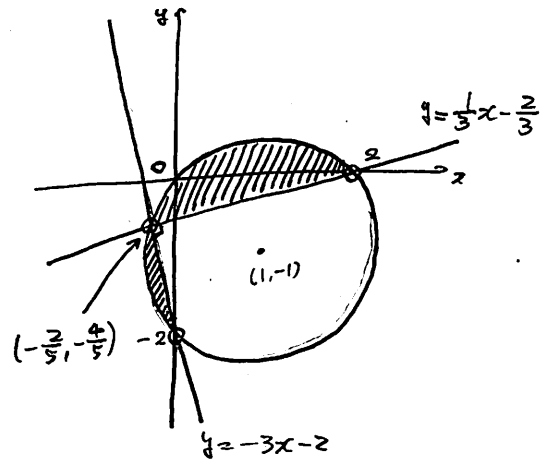
$$\begin{cases} x = 0 \text{ とき } y = -2 \\ x = -\frac{2}{5} \text{ とき } y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

つまり、交点  $(0, -2), (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5})$ 

こゝで

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 2$$



求める領域は図の斜線部

ただし、境界は円周上の点も含め、

直線上の点を含めない。

実数  $a$  が変化するとき,  $xy$  平面上の放物線  $y = x^2 - ax - a^2$  が通りうる領域を図示せよ。

### 解法1

通る点  $(x, y)$  とおくと

$$y = x^2 - ax - a^2$$

$$a^2 + xa - x^2 + y = 0$$

$a$  についての方程式に実数解をもつとよいから

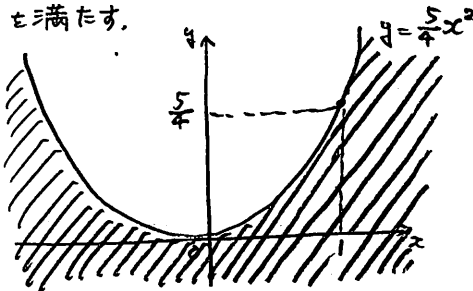
$$\begin{aligned} \text{判別式 } D &= x^2 - 4(-x^2 + y) \\ &= 5x^2 - 4y \geq 0 \end{aligned}$$

$$y \leq \frac{5}{4}x^2$$

よって, 点  $(x, y)$  は

$$y \leq \frac{5}{4}x^2$$

を満たす。



よって,

求める領域は図の斜線部  
ただし, 境界を含む。

### 解法2

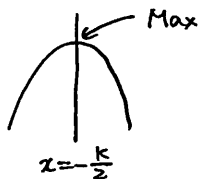
$x = k$  と固定すると

$$y = k^2 - ka - a^2$$

$$= -a^2 - ka + k^2$$

$$= -(a + \frac{k}{2})^2 + \frac{5}{4}k^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{頂点 } (-\frac{k}{2}, \frac{5}{4}k^2) \\ \text{軸: } x = -\frac{k}{2}, \text{ 上に凸} \end{array} \right.$$



$$\text{Max} = \frac{5}{4}k^2 \quad (x = -\frac{k}{2})$$

$$\text{よって } y \leq \frac{5}{4}k^2$$

$k$  を動かすと

$$y \leq \frac{5}{4}x^2$$

座標平面上の円  $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0$  を  $C$  とする。  $x$  軸に接し、円  $C$  と外接するような円の中心  $P$  が描く軌跡を求めよ。

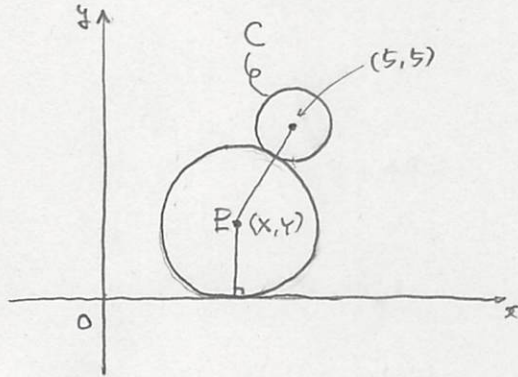
(2013 お茶の水女子大)

**解法1**

$$C: x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0$$

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 1$$

中心  $(5, 5)$ , 半径 1



$P(x, y)$  とおくと、 $y > 0$  であり、

点  $P$  を中心とする円の半径  $Y$  である。

円  $C$  と外接するから

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-5)^2} = Y + 1$$

$Y > 0$  であるから  $Y + 1 > 0$  であり

両辺ともに正であるから2乗してよく

$$(x-5)^2 + (y-5)^2 = (Y+1)^2$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 = Y^2 + 2Y + 1$$

$$-12Y = -x^2 + 10x - 49$$

$$Y = \frac{1}{12}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{49}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(x-5)^2 + 2$$

これは  $Y > 0$  を満たす。

点  $P(x, y)$  は

$$y = \frac{1}{12}(x-5)^2 + 2$$

を満たす。

よって、点  $P$  の軌跡は

$$\text{放物線 } y = \frac{1}{12}(x-5)^2 + 2$$

**解法2** (数学Ⅲ)

点  $P$  は点  $(5, 5)$  と直線  $y = -1$

から等距離にある点の軌跡である。

点  $(5, 5)$  と直線  $y = -1$  とをそれぞれ

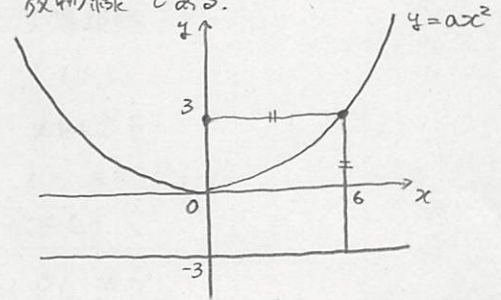
$x$  軸方向に  $-5$ ,  $y$  軸方向に  $-2$

ずつ平行移動すると

点  $(0, 3)$  と直線  $y = -3$  が得られる。

よって焦点  $(0, 3)$ , 準線  $y = -3$  とする。

放物線である。



放物線  $y = ax^2$  が点  $(6, 3)$

を通るとき

$$3 = 36a$$

$$a = \frac{1}{12}$$

よって

$$y = \frac{1}{12}x^2$$

これを  $x$  軸方向に  $+5$ ,  $y$  軸方向に  $+2$

だけ平行移動すると

$$y - 2 = \frac{1}{12}(x-5)^2$$

よって

点  $P$  の軌跡は

$$\text{放物線 } y = \frac{1}{12}(x-5)^2 + 2$$

円  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$  と直線  $y = \frac{1}{2}x$  の2交点 A, B と, その円上を動く点 P によってできる  $\triangle PAB$  の重心 G の軌跡を求めよ。

(2013 愛知学院大)

$G(x, y)$ ,  $P(s, t)$ ,  $A(\alpha, \frac{1}{2}\alpha)$ ,  $B(\beta, \frac{1}{2}\beta)$   
とおく。

点 G は  $\triangle PAB$  の重心 である。

$$\begin{cases} x = \frac{s+\alpha+\beta}{3} \\ y = \frac{1}{3}(t + \frac{\alpha+\beta}{2}) \end{cases} \quad \text{①}$$

点 P は 円  $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9$  上 である。

$$(s-3)^2 + (t-3)^2 = 9 \quad \text{②}$$

$$(x-3)^2 + (y-3)^2 = 9 \quad \text{と} \quad y = \frac{1}{2}x \quad \text{を連立して}$$

$$(x-3)^2 + (\frac{1}{2}x-3)^2 = 9$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 9x + 9 = 0$$

$$5x^2 - 36x + 36 = 0 \quad \text{③}$$

$\alpha, \beta$  は ③ の2次方程式の2解 であるから  
解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{36}{5}, \quad \alpha\beta = \frac{36}{5}$$

よって ① より

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(s + \frac{36}{5}) \\ 3x = s + \frac{36}{5} \\ s = 3x - \frac{36}{5} \\ y = \frac{1}{3}(t + \frac{18}{5}) \\ 3y = t + \frac{18}{5} \\ t = 3y - \frac{18}{5} \end{cases}$$

② より

$$(3x - \frac{36}{5})^2 + (3y - \frac{18}{5})^2 = 9$$

$$(x - \frac{12}{5})^2 + (y - \frac{6}{5})^2 = 1$$

ここで

$\triangle PAB$  が存在するためには

$$P \neq A, B$$

$$s \neq \alpha, \beta \quad \text{であり}$$

$$\begin{cases} \text{③ より} \\ (5s-6)(s-6)=0 \\ s = \frac{6}{5}, 6 \end{cases}$$

$$\text{つまり} \quad s \neq \frac{6}{5}, 6$$

$$\begin{cases} s = \frac{6}{5} \quad \text{のとき} & x = \frac{14}{5}, y = \frac{7}{5} \\ s = 6 \quad \text{のとき} & x = \frac{22}{5}, y = \frac{11}{5} \end{cases}$$

よって

$G(x, y)$  は

$$(x - \frac{17}{5})^2 + (y - \frac{11}{5})^2 = 1$$

$$\text{ただし } (x, y) \neq (\frac{14}{5}, \frac{7}{5}), (\frac{22}{5}, \frac{11}{5})$$

を満たす。

つまり

点 G の軌跡は

$$\text{円 } (x - \frac{17}{5})^2 + (y - \frac{11}{5})^2 = 1$$

$$\text{ただし, 2点 } (\frac{14}{5}, \frac{7}{5}), (\frac{22}{5}, \frac{11}{5}) \text{ を除く。}$$

次の方程式で表される2つの直線  $l_1, l_2$  を考える。

$$l_1: (a-1)(x+1) - (a+1)y = 0, \quad l_2: ax - y - 1 = 0$$

 $a$  が実数全体を動くときの、 $l_1$  と  $l_2$  の交点の軌跡を求めよ。

(2016 福島大)

**解法1**

$$l_1: (a-1)(x+1) - (a+1)y = 0$$

$$(a-1)x - (a+1)y = -1 - a \quad \text{--- ①}$$

$$l_2: ax - y - 1 = 0$$

$$ax - y = 1 \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} \times a \quad a(a-1)x - a(a+1)y = a(-1-a)$$

$$\text{②} \times (a-1) \quad a(a-1)x - (a-1)y = a-1 \quad (-$$

$$(-a^2 - a + a - 1)y = (a-1)(-a-1)$$

$$-(a^2+1)y = -(a^2-1)$$

$$a^2+1 \neq 0 \quad \text{な } a \text{ とき}$$

$$y = \frac{a^2-1}{a^2+1}$$

② に代入して

$$ax - \frac{a^2-1}{a^2+1} = 1$$

$$ax = \frac{2a^2}{a^2+1}$$

(i)  $a \neq 0$   $a$  とき

$$x = \frac{2a}{a^2+1} \quad \text{--- ③}$$

$$y = \frac{a^2-1}{a^2+1} = 1 - \frac{2}{a^2+1} \quad \text{より}$$

$$y-1 = -\frac{2}{a^2+1}$$

$$y-1 \neq 0 \quad \text{な } a \text{ とき}$$

$$\frac{x}{y-1} = -a$$

つまり

$$a = \frac{x}{1-y}$$

よって ③ は

$$x = \frac{\frac{2x}{1-y}}{\left(\frac{x}{1-y}\right)^2 + 1}$$

$$x = \frac{2x(1-y)}{x^2 + (1-y)^2}$$

$$x \neq 0 \quad \text{な } a \text{ とき}$$

$$x^2 + (1-y)^2 = 2(1-y)$$

$$x^2 + 1 - 2y + y^2 = 2 - 2y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

ただし点  $(0,1), (0,-1)$  を除く(ii)  $a=0$   $a$  とき

$$l_1: -(x+1) - y = 0$$

$$y = -x-1$$

$$l_2: -y-1=0$$

$$y = -1$$

 $l_1$  と  $l_2$  は垂直に

$$x=0, y=-1$$

(i), (ii) より

求める交点の軌跡は

$$\text{円 } x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{ただし点 } (0,1) \text{ を除く})$$

**解法2**

$$l_1: (x-y+1)a - (x+y+1) = 0$$

$$l_2: xa - (y+1) = 0$$

(i)  $x \neq 0$   $a$  とき

$$l_2 \text{ より } a = \frac{y+1}{x}$$

$$l_1 \text{ に代入して整理すると } x^2 + y^2 = 1$$

よって  $x=0$  とし  $y=\pm 1$  を得る。

よって

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{ただし、2点 } (0,1), (0,-1) \text{ を除く})$$

(ii)  $x=0$   $a$  とき

$$l_2 \text{ より } y = -1$$

$$l_1 \text{ に代入して } a = 0$$

よって点  $(0,-1)$  は  $a=0$   $a$  とき  $a$  交点。

(i), (ii) より

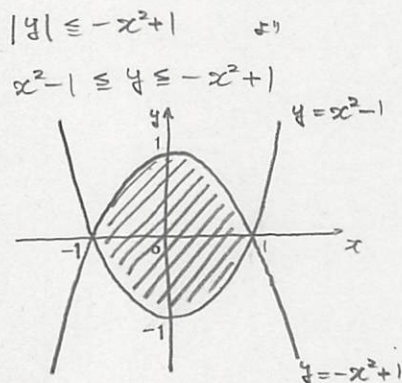
求める交点の軌跡は

$$\text{円 } x^2 + y^2 = 1 \quad (\text{ただし、点 } (0,1) \text{ を除く})$$

$k$  を正の定数とし,  $x, y$  を実数とする。

- (1) 不等式  $|y| \leq -x^2 + 1$  の表す領域を図示せよ。  
 (2) 不等式  $|x| + |y| \leq 1$  の表す領域を図示せよ。  
 (3) 命題「 $|y| \leq -x^2 + 1$  ならば  $|x| + |y| \leq k$ 」が真であるための必要十分条件を  $k$  の不等式を用いて表せ。

(1)



求める領域は図の斜線部  
 ただし、境界を含む。

(2)

$$|x| + |y| \leq 1 \quad \text{--- ①}$$

$$f(x, y) = |x| + |y| - 1 \quad \text{とおく。}$$

$$f(x, -y) = f(-x, y) = f(-x, -y) = f(x, y)$$

を満足する  $a$  で

$$f(x, y) = 0 \quad \text{のグラフは}$$

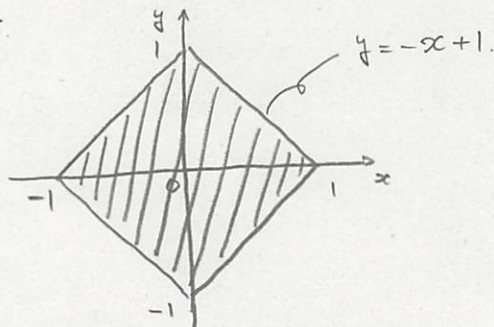
$x$  軸,  $y$  軸, 原点に関して対称である。

$x \geq 0, y \geq 0$  のとき ① は

$$x + y \leq 1$$

$$y \leq -x + 1$$

よって



求める領域は図の斜線部  
 ただし、境界を含む。

(3)

$$P = \{(x, y) \mid |y| \leq -x^2 + 1\}$$

$$Q = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq k\} \quad \text{とおく。}$$

$$P \subset Q \quad \text{となるように。}$$

図形の対称性から

第1象限で  $a$  を考えよう。

$$y = -x + k \quad \text{と} \quad y = -x^2 + 1 \quad \text{を連立して}$$

$$-x + k = -x^2 + 1$$

$$x^2 - x + k - 1 = 0 \quad \text{--- ②}$$

接するとき、判別式  $D = 0$  であり。

$$D = 1 - 4(k - 1)$$

$$= -4k + 5 = 0$$

$$k = \frac{5}{4}$$

よって  $Q$  は

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

よって

$$\underline{k \geq \frac{5}{4}}$$

$xy$  平面上の放物線  $A: y=x^2$ ,  $B: y=-(x-a)^2+b$  は異なる2点  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$  ( $x_1 > x_2$ ) で交わるとする。

(1)  $x_1 - x_2 = 2$  が成り立つとき,  $b$  を  $a$  で表せ。

(2)  $x_1 - x_2 = 2$  を満たしながら  $a, b$  が変化するとき, 直線  $PQ$  の通過する領域を求め図示せよ。 (2003 北海道大)

(1)

$A$  と  $B$  を連立して

$$x^2 = -(x-a)^2 + b$$

$$x^2 = -x^2 + 2ax - a^2 + b$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 2(a^2 - b)}}{2}$$

$$= \frac{a \pm \sqrt{2b - a^2}}{2}$$

$$x_1 > x_2 \quad \text{より} \quad a \geq 0$$

$$x_1 - x_2 = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2} - \frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2}$$

$$= \sqrt{2b - a^2}$$

より

$$x_1 - x_2 = 2 \quad \text{より} \quad a \geq 0$$

$$\sqrt{2b - a^2} = 2$$

両辺を2乗して

$$2b - a^2 = 4$$

$$\underline{\underline{b = \frac{1}{2}a^2 + 2}}$$

(2)

(1)  $a$  とし

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a + \sqrt{4}}{2} = \frac{a+2}{2} \\ x_2 = \frac{a - \sqrt{4}}{2} = \frac{a-2}{2} \end{cases}$$

直線  $PQ$

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{ここで} \\ P, Q \text{ は } A \text{ 上にあるので} \\ y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2^2 \\ \text{を満たす} a \text{ で} \end{array} \right)$$

$$y - x_1^2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} (x - x_1)$$

$$y - x_1^2 = (x_1 + x_2)(x - x_1)$$

$$y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2$$

$$y = ax - \frac{a^2 - 4}{4}$$

$$4y = 4ax - a^2 + 4$$

$$a^2 - 4xa + 4y - 4 = 0$$

$a$  について  $a$  の2次方程式 (\*)

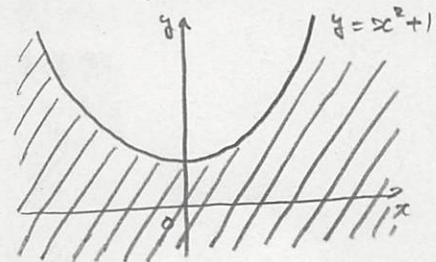
実数解をもつとよい  $a$  で

判別式  $D \geq 0$  とおくとよい。

$$D/4 = 4x^2 - (4y - 4) \geq 0$$

$$x^2 - y + 1 \geq 0$$

$$\text{よって} \quad y \leq x^2 + 1$$



求める領域は図の斜線部  
ただし、境界を含む。

$x$  軸上の点  $P(t, 0)$  と  $y$  軸上の点  $Q(0, 2)$  について考える。点  $P$  が  $x$  軸上を動くとき、線分  $PQ$  の垂直二等分線が通過する領域を求め、図示せよ。

(2013 福岡教育大)

線分  $PQ$  の中点  $(\frac{t}{2}, 1)$

(直線  $PQ$  の傾き)  $= \frac{-2}{t}$  となる

線分  $PQ$  の垂直二等分線は

$$y - 1 = \frac{t}{2} (x - \frac{t}{2})$$

$$y - 1 = \frac{t}{2} x - \frac{t^2}{4}$$

$$4y - 4 = 2tx - t^2$$

$$t^2 - 2xt + 4y - 4 = 0$$

$t$  についての2次方程式が実数解

をもつとよい

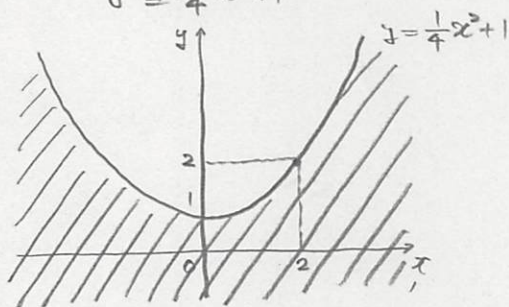
判別式  $D \geq 0$  となる

$$\frac{D}{4} = x^2 - (4y - 4)$$

$$= x^2 - 4y + 4 \geq 0$$

よって

$$y \leq \frac{1}{4}x^2 + 1$$



求める領域は図の斜線部

ただし、境界を含む。

円  $(x-4)^2 + y^2 = 4$  と直線  $y = mx$  が異なる2点 P, Q で交わっている。

- (1) 定数  $m$  のとりうる値の範囲を求めよ。  
 (2)  $m$  を動かしたときの線分 PQ の中点 R の軌跡を求め、それを図示せよ。

(2013 東邦大)

(1)

円の中心  $(4, 0)$ , 半径 2 であり。

点  $(4, 0)$  と直線  $mx - y = 0$  との距離  $d$  は

$$\begin{cases} d = \frac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}} \\ r = 2 \end{cases}$$

異なる2点で交わるとき

$$\frac{|4m|}{\sqrt{m^2+1}} < 2$$

$$|2m| < \sqrt{m^2+1}$$

両辺ともに正なので2乗してよく。

$$4m^2 < m^2 + 1$$

$$3m^2 - 1 < 0$$

$$(\sqrt{3}m+1)(\sqrt{3}m-1) < 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) 解法1

$R(x, y)$ ,  $P(\alpha, m\alpha)$ ,  $Q(\beta, m\beta)$  とおくと。

点 R は線分 PQ の中点なので

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha + \beta}{2} & \text{--- ①} \\ y = \frac{m(\alpha + \beta)}{2} & \text{--- ②} \end{cases}$$

$(x-4)^2 + y^2 = 4$  と  $y = mx$  を連立して

$$(x-4)^2 + m^2x^2 = 4$$

$$(1+m^2)x^2 - 8x + 12 = 0$$

$\alpha$  と  $\beta$  はこの2次方程式の2解であり。

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{8}{1+m^2} \quad \text{--- ③}$$

①, ② に ③ を代入して

$$x = \frac{4}{1+m^2}, \quad y = \frac{4m}{1+m^2}$$

$x \neq 0$  より

$$\frac{y}{x} = m$$

よって

$$x = \frac{4}{1 + \frac{y^2}{x^2}}$$

$$x = \frac{4x^2}{x^2 + y^2}$$

$x \neq 0$  なので

$$x^2 + y^2 = 4x$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

(1)より

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < m < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{y}{x} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$x > 0$  より

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}x < y < \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$x^2 + y^2 = 4x$  と  $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$  を連立して

$$x^2 + \frac{1}{3}x^2 = 4x$$

$$4x^2 = 12x$$

$$x(x-3) = 0$$

$$x = 0, 3$$

よって  $(x, y) = (0, 0), (3, \sqrt{3})$

同様に

$x^2 + y^2 = 4x$  と  $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$  を連立して

$$(x, y) = (0, 0), (3, -\sqrt{3})$$

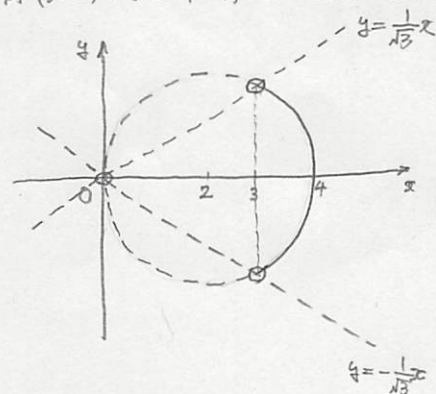
よって、点 R  $(x, y)$  は

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \quad \text{かつ} \quad -\frac{1}{\sqrt{3}}x < y < \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

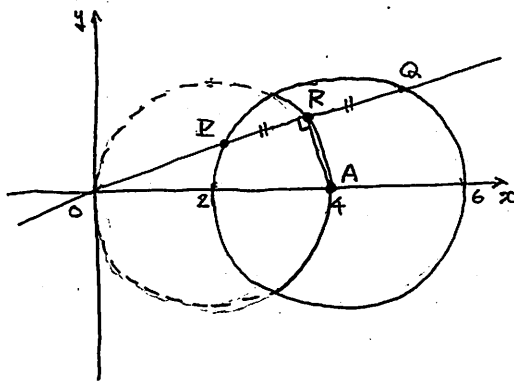
を満たす。

つまり、点 R の軌跡は

円  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  の  $3 < x \leq 4$  の部分



(2) 解法2



$A(4,0)$  とおくと、点  $A$  は外心であるので

$$\angle ORA = 90^\circ$$

つまり、

点  $R$  の軌跡は

線分  $OA$  を直径 とする円のうち、

円:  $(x-4)^2 + y^2 = 4$  の内部の部分である。

線  $OA$  を直径 とする円は

中心  $(2,0)$ 、半径  $2$  の円 であり、

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

よって  $(x-4)^2 + y^2 = 4$  より

$y$  を消去して

$$x = 3.$$

よって、点  $R$  の軌跡は

円:  $(x-2)^2 + y^2 = 4$  の  $3 < x \leq 4$  の部分。

2点A(0, 1), B(1, 1)を結ぶ線分ABが円 $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 1 = 0$ の外部にあるとき,  $a, b$ の満たす条件が表す領域を $ab$ 平面に図示せよ.

(2001 信州大)

**解法1**

線分ABを表す方程式は

$$y = 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 1 = 0 \quad \text{--- ①}$$

と連立して

$$x^2 + 1 - 2ax - 2b - 1 = 0$$

$$x^2 - 2ax - 2b = 0$$

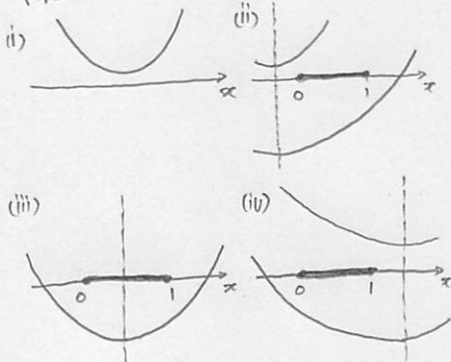
これが  $0 \leq x \leq 1$  で解をもたない

ことが必要

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax - 2b \\ &= (x-a)^2 - a^2 - 2b \end{aligned}$$

とわくと.

(頂点  $(a, -a^2 - 2b)$   
軸:  $x = a$ , 下に凸



(i)  $x$  軸と共有点をもたないとき,  
判別式  $D < 0$  となるとよい.

$$D/4 = a^2 + 2b < 0$$

$$\text{つまり } b < -\frac{1}{2}a^2$$

(ii)  $a < 0$  のとき

$$f(0) > 0 \quad \text{または} \quad f(1) < 0$$

$$-2b > 0 \quad \text{または} \quad 1 - 2a - 2b < 0$$

つまり

$$b < 0 \quad \text{または} \quad b > -a + \frac{1}{2}$$

(iii)  $0 \leq a \leq 1$  のとき

$$f(0) < 0 \quad \text{かつ} \quad f(1) < 0$$

つまり

$$b > 0 \quad \text{かつ} \quad b > -a + \frac{1}{2}$$

(iv)  $1 < a$  のとき

$$f(1) > 0 \quad \text{または} \quad f(0) < 0$$

つまり

$$b < -a + \frac{1}{2} \quad \text{または} \quad b > 0$$

① より

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 + 1$$

$$g(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 \quad \text{とわくと}$$

$$g(0, 1) > a^2 + b^2 + 1 \quad \text{かつ} \quad g(1, 1) > a^2 + b^2 + 1$$

かつ必要

$$g(0, 1) = a^2 + (1-b)^2 > a^2 + b^2 + 1$$

$$a^2 + 1 - 2b + b^2 > a^2 + b^2 + 1$$

$$-2b > 0$$

$$b < 0$$

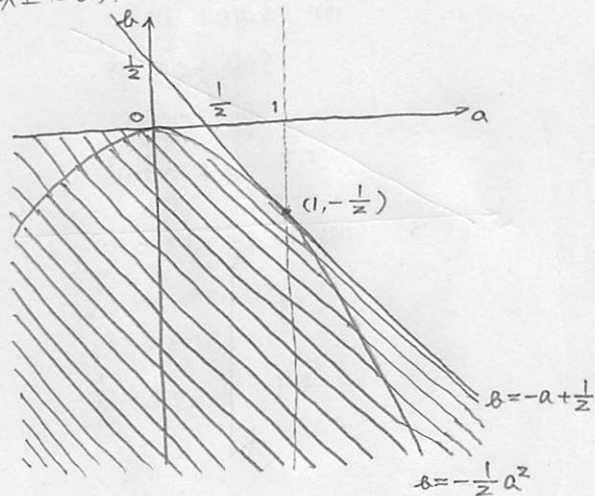
$$g(1, 1) = (1-a)^2 + (1-b)^2 > a^2 + b^2 + 1$$

$$1 - 2a + a^2 + 1 - 2b + b^2 > a^2 + b^2 + 1$$

$$-2b > 2a - 1$$

$$b < -a + \frac{1}{2}$$

以上により.



求める領域は図の斜線部

ただし, 境界を含まない.

### 解法2

線分AB上の点  $(t, 1)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) とするとき

線分ABが円の外部にあるための条件は

$0 \leq t \leq 1$  において、

$$t^2 + 1 - 2at - 2b - 1 > 0$$

$$\text{つまり } t^2 - 2at - 2b > 0$$

が成り立つことである。

$$f(t) = t^2 - 2at - 2b$$

$$= (t-a)^2 - a^2 - 2b$$

とおくと、求める条件は、

(i)  $a < 0$  のとき

$$f(0) > 0 \quad \text{より}$$

$$-2b > 0$$

$$\text{よって } b < 0$$

(ii)  $0 \leq a \leq 1$  のとき

$$f(a) > 0 \quad \text{より}$$

$$-a^2 - 2b > 0$$

$$\text{よって } b < -\frac{1}{2}a^2$$

(iii)  $1 < a$  のとき

$$f(1) > 0 \quad \text{より}$$

$$1 - 2a - 2b > 0$$

$$\text{よって } b < -a + \frac{1}{2}$$

$s, t$  を実数とする。(1)  $x=s+t+1, y=s-t-1$  とおく。 $s, t$  が  $s \geq 0, t \geq 0$  の範囲を動くとき、点  $(x, y)$  の動く範囲を座標平面内に図示せよ。(2)  $x=st+s-t+1, y=s+t-1$  とおく。 $s, t$  が実数全体を動くとき、点  $(x, y)$  の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2012 東北大)

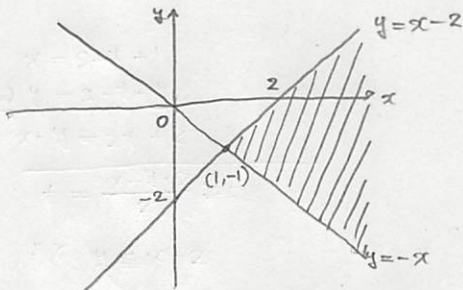
(1)

$$\begin{aligned} x &= s+t+1 \\ +) y &= s-t-1 \\ \hline x+y &= 2s \\ s &= \frac{x+y}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

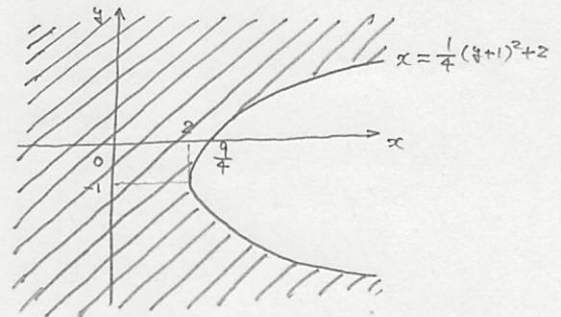
$$\therefore y \geq -x$$

$$\begin{aligned} x &= s+t+1 \\ \rightarrow y &= s-t-1 \\ \hline x-y &= 2t+2 \\ t &= \frac{x-y-2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore y \leq x-2$$



$(x, y)$  の存在領域は図の斜線部  
ただし、境界も含む。



求める領域は図の斜線部  
ただし、境界も含む。

解法2

$$\begin{cases} x = st+s-t+1 & \text{--- ②} \\ y = s+t-1 & \text{--- ③} \end{cases}$$

②より

$$t = y - s + 1$$

②に代入して、

$$x = s(y-s+1) + s - (y-s+1) + 1$$

より

$$s^2 + (-y-3)s + x+y = 0$$

こゝから実数解をもつとき

②, ③ を満たす実数  $s, t$  が存在する。判別式  $D \geq 0$ 

となるように。

$$(-y-3)^2 - 4(x+y) \geq 0$$

$$\therefore x \leq \frac{1}{4}(y+1)^2 + 2$$

(2) 解法1

$$\begin{aligned} x &= st+s-t+1 \\ +) y &= s+t-1 & \text{--- ①} \\ \hline x+y &= st+2s \\ x+y &= s(t+2) \end{aligned}$$

①より

$$y+3 = s + (t+2)$$

 $s, t$  が実数全体を動くとき $s, t+2$  も実数全体を動く。 $s$  と  $t+2$  を解にもつ2次方程式は

$$X^2 - (y+3)X + (x+y) = 0$$

こゝから実数解をもつので

判別式  $D \geq 0$  より

$$(y+3)^2 - 4(x+y) \geq 0$$

$$y^2 + 6y + 9 - 4x - 4y \geq 0$$

$$-4x \geq -y^2 - 2y - 9$$

$$x \leq \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{9}{4}$$

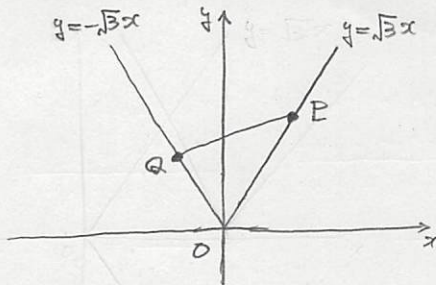
$$x \leq \frac{1}{4}(y+1)^2 + 2$$

座標平面の原点を  $O$  で表す。線分  $y = \sqrt{3}x$  ( $0 \leq x \leq 2$ ) 上の点  $P$  と、線分  $y = -\sqrt{3}x$  ( $-2 \leq x \leq 0$ ) 上の点  $Q$  が、線分  $OP$  と線分  $OQ$  の長さの和が 6 となるように動く。このとき、線分  $PQ$  の通過する領域を  $D$  とする。

(1)  $s$  を  $0 \leq s \leq 2$  を満たす実数とすると、点  $(s, t)$  が  $D$  に入るような  $t$  の範囲を求めよ。

(2)  $D$  を図示せよ。

(2014 東京大)



(1)

$$P(p, \sqrt{3}p), Q(q, -\sqrt{3}q)$$

$$(0 \leq p \leq 2, -2 \leq q \leq 0) \quad \text{と置く.}$$

$$OP + OQ = 6 \quad \text{より}$$

$$|2p| + |2q| = 6.$$

$$p - q = 3.$$

$$q = p - 3$$

$$-2 \leq q \leq 0 \quad \text{より}$$

$$-2 \leq p - 3 \leq 0$$

$$1 \leq p \leq 3.$$

$$0 \leq p \leq 2 \quad \text{とあわせて}$$

$$1 \leq p \leq 2 \quad \text{--- ①}$$

また、直線  $PQ$  の方程式は

$$y - \sqrt{3}p = \frac{\sqrt{3}p + \sqrt{3}q}{p - q} (x - p)$$

$$y - \sqrt{3}p = \frac{2\sqrt{3}p - 3\sqrt{3}}{3} (x - p)$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}p - 3\sqrt{3}}{3} x + \frac{-2\sqrt{3}p^2 + 6\sqrt{3}p}{3}$$

点  $(s, t)$  が線分  $PQ$  上にあるとき

$$q \leq s \leq p \quad \text{より}$$

$$p - 3 \leq s \leq p$$

$$\text{すなわち} \quad s \leq p \leq s + 3 \quad \text{--- ②} \quad \text{あわせて}$$

$$t = \frac{2\sqrt{3}p - 3\sqrt{3}}{3} s + \frac{-2\sqrt{3}p^2 + 6\sqrt{3}p}{3}$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3} p^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} s + 2\sqrt{3}\right) p - \sqrt{3} s$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ p^2 + (-s - 3)p \right\} - \sqrt{3} s$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left\{ \left(p - \frac{s+3}{2}\right)^2 - \frac{s^2 + 6s + 9}{4} \right\} - \sqrt{3} s$$

$$= -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(p - \frac{s+3}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{6} (s^2 + 6s + 9) - \frac{6\sqrt{3}}{6} s$$

$$t = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(p - \frac{s+3}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{6} (s^2 + 9)$$

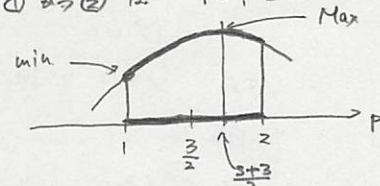
このときの値の範囲を調べる。

$$\left( \begin{array}{l} \text{①, ②} \quad s \geq 0 \quad \text{より} \\ s + 3 > 2. \end{array} \right)$$

$$\text{ii) } 0 \leq s \leq 1 \quad \text{あたり} \quad 3 \leq s + 3 \leq 4 \quad \text{であり}$$

$$\frac{3}{2} \leq \frac{s+3}{2} \leq 2$$

$$\text{①} \rightarrow \text{②} \quad \text{は} \quad 1 \leq p \leq 2$$



$$\left( \begin{array}{l} \text{Max} = \frac{\sqrt{3}}{6} (s^2 + 9) \quad (p = \frac{s+3}{2}) \\ \text{min} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} s + 2\sqrt{3} - \sqrt{3} s \\ = -\frac{\sqrt{3}}{3} s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (p = 1) \end{array} \right)$$

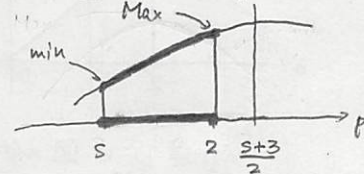
よって

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{6} (s^2 + 9)$$

$$\text{iii) } 1 \leq s \leq 2 \quad \text{あたり} \quad 4 \leq s + 3 \leq 5 \quad \text{であり}$$

$$2 \leq \frac{s+3}{2} \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{①} \rightarrow \text{②} \quad \text{は} \quad s \leq p \leq 2$$



$$\left( \begin{array}{l} \text{Max} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} s + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} s \\ = \frac{\sqrt{3}}{3} s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \quad (p = 2) \\ \text{min} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} s^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} s^2 + 2\sqrt{3} s - \sqrt{3} s \\ = \sqrt{3} s \quad (p = s) \end{array} \right)$$

よって

$$\sqrt{3} s \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3} s + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ii), iii) より

$$\left( \begin{array}{l} 0 \leq s \leq 1 \quad \text{あたり} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{6} (s^2 + 9) \\ 1 \leq s \leq 2 \quad \text{あたり} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} s \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3} s + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{array} \right)$$

(2) 領域  $D$  は  $y$  軸に関して対称である.

また  $S > 2$  かつ

①, ④ を同時に満たす  $P$  は存在しない.

一方

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x^2+9) \quad \text{と} \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

と連立して.

$$\frac{\sqrt{3}}{6}(x^2+9) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$x^2+9 = 2x+8$$

$$x^2-2x+1=0$$

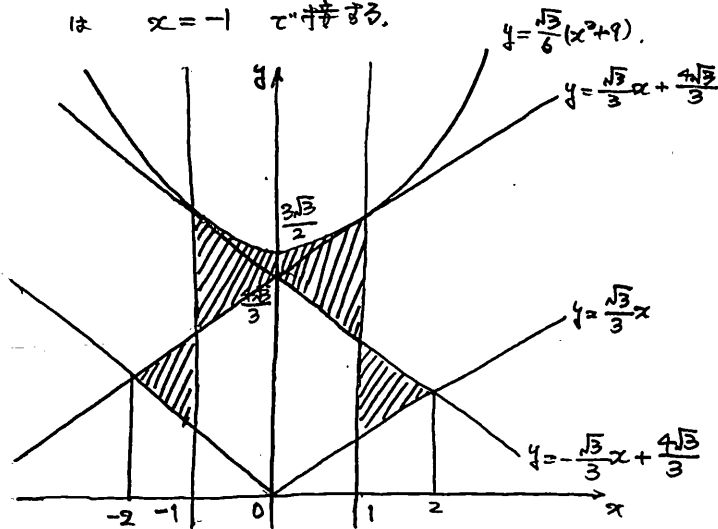
$$(x-1)^2=0$$

よって  $x=1$  で接する.

同様に

$$y = \frac{\sqrt{3}}{6}(x^2+9) \quad \text{と} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

は  $x=-1$  で接する.



領域  $D$  は図の斜線部

ただし、境界を含む.