

実数 x, y が3つの不等式 $y \geq -\frac{5}{3}x + 5$, $y \geq 3x - 9$, $y \leq \frac{1}{5}x + 5$ を満たすとする。このとき、 $x + y$ の最小値は $\boxed{}$ であり、最大値は $\boxed{}$ である。また、 $x^2 + y^2$ の最小値は $\boxed{}$ であり、そのときの x, y の値は $x = \boxed{}$, $y = \boxed{}$ である。

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{3}x + 5 & \text{--- ①} \\ y = 3x - 9 & \text{--- ②} \\ y = \frac{1}{5}x + 5 & \text{--- ③} \end{cases}$$

①, ③ の交点

$$-\frac{5}{3}x + 5 = 3x - 9$$

$$-\frac{14}{3}x = -14$$

$$x = 3$$

$$\text{このとき } y = 9 - 9 = 0$$

$$\text{よって } (3, 0)$$

②, ③ の交点

$$3x - 9 = \frac{1}{5}x + 5$$

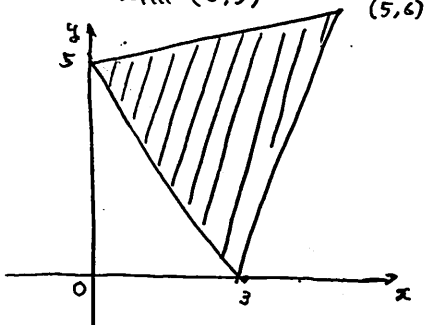
$$\frac{14}{5}x = 14$$

$$x = 5$$

$$\text{このとき } y = 1 + 5 = 6$$

$$\text{よって } (5, 6)$$

②, ① の交点 $(0, 5)$



与えられた領域は図の斜線部
ただし、境界を含む。

$$x + y = k \quad \text{とおく}$$

$$y = -x + k \quad (\text{傾き } -1, y \text{ 切片 } k \text{ の直線}) \quad \text{--- ④}$$

$x + y$ が $\min$ のとき

④ の直線が点 $(3, 0)$ を通る

$$k = 3 + 0 = 3$$

$x + y$ が $\max$ のとき

④ の直線が点 $(5, 6)$ を通る

$$k = 5 + 6 = 11$$

$$\text{よって } \underline{\underline{\min(x+y) = 3, \max(x+y) = 11}}$$

$$x^2 + y^2 = r \quad \text{とおく}$$

$$\text{中心 } (0, 0), \text{ 半径 } \sqrt{r} \text{ の円} \quad \text{--- ⑤}$$

$x^2 + y^2$ が $\min$ のとき

⑤ の円が直線 $y = -\frac{5}{3}x + 5$ と接する。

原点を通る直線 $y = -\frac{5}{3}x + 5$ に垂直な直線は

$$y = \frac{3}{5}x \quad \text{とおく, 連立して}$$

$$\frac{3}{5}x = -\frac{5}{3}x + 5$$

$$9x = -25x + 75$$

$$34x = 75$$

$$x = \frac{75}{34}, \quad y = \frac{45}{34}$$

$$\text{よって, 接点 } \left(\frac{75}{34}, \frac{45}{34}\right)$$

つまり

$$\min(x^2 + y^2) = \left(\frac{75}{34}\right)^2 + \left(\frac{45}{34}\right)^2$$

$$= \frac{5625 + 2025}{34^2}$$

$$= \frac{7650}{34^2} = \frac{225}{34}$$

$$\underline{\underline{\min(x^2 + y^2) = \frac{225}{34} \quad (x = \frac{75}{34}, y = \frac{45}{34})}}$$

連立不等式 $x^2 - 6x + y^2 + 5 \leq 0$, $x + y \leq 5$ の表す領域 D を図示せよ。また、曲線 $x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 = 0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

(2006 東北大)

$$x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4 \quad \text{--- ①}$$

$$x + y = 5$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 5 \quad \text{--- ②}$$

① と ② を連立して

$$(x-3)^2 + (-x+5)^2 = 4$$

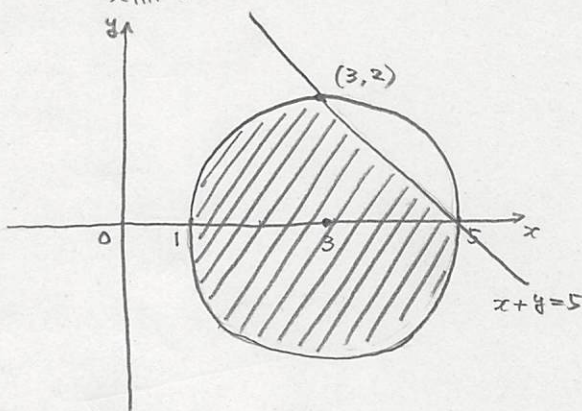
$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$x = 3, 5$$

$$\begin{cases} x=3 & a \text{ と } y=2 \\ x=5 & a \text{ と } y=0 \end{cases}$$

よって、交点 $(3, 2), (5, 0)$ 

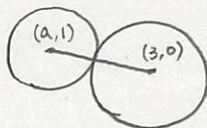
領域 D は図の斜線部
ただし、境界を含まない。

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2y + a^2 = 0$$

$$(x-a)^2 + (y-1)^2 = 1$$

中心 $(a, 1)$, 半径 1 の円 --- ③

① と ③ が外接するとき



$$\sqrt{(a-3)^2 + 1} = 1 + 2$$

$$\sqrt{(a-3)^2 + 1} = 3$$

両辺 2乗して

$$(a-3)^2 + 1 = 9$$

$$(a-3)^2 = 8$$

$$a-3 = \pm 2\sqrt{2}$$

$$a = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

図より $a = 3 - 2\sqrt{2}$

② と ③ が接するとき

2式を連立して

$$(x-a)^2 + (-x+4)^2 = 1$$

$$2x^2 + (-2a-8)x + a^2 + 15 = 0$$

判別式 $D=0$ となるように

$$\frac{D}{4} = (-a-4)^2 - 2(a^2 + 15)$$

$$= a^2 + 8a + 16 - 2a^2 - 30$$

$$= -a^2 + 8a - 14 = 0$$

$$a^2 - 8a + 14 = 0$$

$$a = 4 \pm \sqrt{2}$$

直線 a の左側から接する a は

図より $a = 4 + \sqrt{2}$

よって

$$3 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 4 + \sqrt{2}$$

つまり

$$\begin{cases} \text{Max } a = 4 + \sqrt{2} \\ \text{min } a = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

2次関数 $f(x) = x^2 - 2ax + 4b$ (a, b は定数) は不等式 $0 \leq f(0) \leq 8, 1 \leq f(1) \leq 5$ を満たしている。

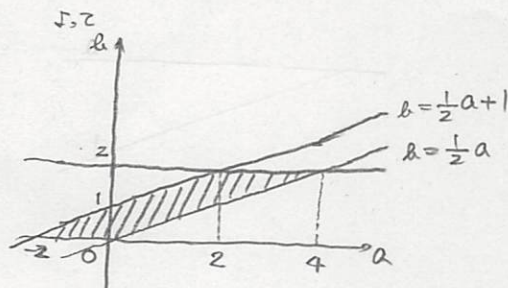
- (1) ab 平面上において点 (a, b) の存在する範囲を図示せよ。
 (2) $y = f(x)$ の最小値 m を a, b を用いて表し、点 (a, b) が(1)で求めた領域を動くときの m の最大値、およびそのときの a, b の値を求めよ。

(2009 中央大)

(1)

$$\begin{cases} 0 \leq f(0) \leq 8 & \text{より} \\ 0 \leq 4b \leq 8 \\ 0 \leq b \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq f(1) \leq 5 & \text{より} \\ 1 \leq 1 - 2a + 4b \leq 5 \\ \frac{1}{2}a \leq b \leq \frac{1}{2}a + 1 \end{cases}$$



求める点 (a, b) の存在範囲は
 図の斜線部
 ただし、境界を含む。

これが直線 $b = \frac{1}{2}a + 1$ と $-2 \leq a \leq 2$ で接するとき。

2式を連立して。

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}m = \frac{1}{2}a + 1$$

$$a^2 - 2a + m - 4 = 0 \quad \text{--- ①}$$

判別式 $D = 0$ であることが必要

$$\frac{D}{4} = 1 - (m - 4)$$

$$= -m + 5 = 0$$

$$m = 5$$

a と b は

$$a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$(a - 1)^2 = 0$$

$$a = 1$$

($-2 \leq a \leq 2$ を満たす)

$$a \text{ と } b = \frac{3}{2}$$

よって

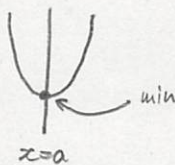
$$\underline{\underline{\text{Max } m = 5 \quad ((a, b) = (1, \frac{3}{2}))}}$$

(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax + 4b \\ &= (x - a)^2 - a^2 + 4b \end{aligned}$$

(頂点 $(a, -a^2 + 4b)$)

(軸: $x = a$, 下に凸)



$$\underline{\underline{m = -a^2 + 4b \quad (x = a)}}$$

$$b = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}m$$

a, b 平面上において

(頂点 $(0, \frac{1}{4}m)$)

(軸: $a = 0$, 下に凸)

a の放物線を表す。

x, y, z は $0 \leq x \leq y \leq z \leq \frac{4}{5}$, $x+2y+z=1$ を満たす実数とする。このとき、 y の最大値、最小値を求めよ。

$$x+2y+z=1 \quad \text{より}$$

$$z = -x - 2y + 1$$

$$0 \leq x \leq y \leq z \leq \frac{4}{5} \quad \text{より}$$

$$0 \leq x \leq y \leq -x - 2y + 1 \leq \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ y \leq -x - 2y + 1 \\ -x - 2y + 1 \leq \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ y \leq -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\ y \geq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{10} \end{cases}$$

$$y=x \quad \text{と} \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{を連立して}$$

$$x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{3}x = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

$$\text{このとき} \quad y = \frac{1}{4}$$

$$\text{交点} \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right)$$

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \quad \text{と} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{10} \quad \text{を連立して}$$

$$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{6}x = -\frac{7}{30}$$

$$x = -\frac{7}{5}$$

$$\text{このとき} \quad y = \frac{4}{5}$$

$$\text{交点} \left(-\frac{7}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{10} \quad \text{と} \quad y = x \quad \text{を連立して}$$

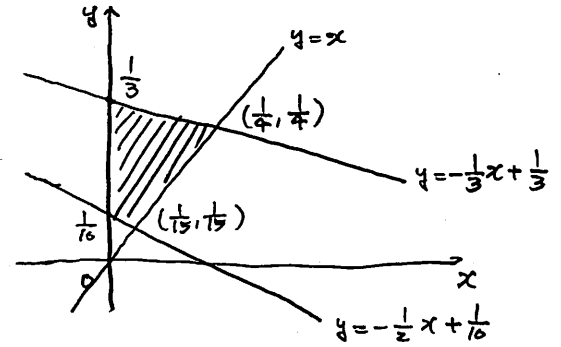
$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{10} = x$$

$$-\frac{3}{2}x = -\frac{1}{10}$$

$$x = \frac{1}{15}$$

$$\text{このとき} \quad y = \frac{1}{15}$$

$$\text{交点} \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{15} \right)$$



不等式が表す領域は図の斜線部
ただし、境界を含む。

よって

$$\begin{cases} \text{Max } y = \frac{1}{3} & (x=0, z=\frac{1}{3}) \\ \text{Min } y = \frac{1}{15} & (x=\frac{1}{15}, z=\frac{4}{5}) \end{cases}$$

m, n はともに整数で、2つの不等式 $n \leq -m^2 + 3m + 1$, $n \geq m^2 - 5m + 7$ を満たすとする。このとき、 $3m + 2n$ の最大値を求めよ。

(2012 桜美林大)

$$n = -m^2 + 3m + 1 \quad \text{と} \quad n = m^2 - 5m + 7$$

を連立して

$$-m^2 + 3m + 1 = m^2 - 5m + 7$$

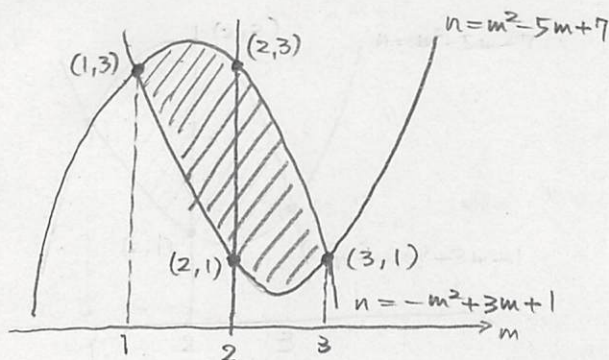
$$2m^2 - 8m + 6 = 0$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0$$

$$(m-1)(m-3) = 0$$

$$m = 1, 3$$

$$\begin{cases} m=1 & \text{のとき} & n=3 \\ m=3 & \text{のとき} & n=1 \end{cases}$$



不等式で表される領域は図の斜線部
ただし、境界を含む。

$$3m + 2n = k \quad \text{とおくと}$$

$$n = -\frac{3}{2}m + \frac{1}{2}k$$

(傾き $-\frac{3}{2}$, n 切片 $\frac{1}{2}k$ の直線)

点 $(2, 3)$ を通るとき

$$k = 6 + 6 = 12$$

点 $(3, 1)$ を通るとき

$$k = 9 + 2 = 11$$

よって

$$\underline{\underline{\text{Max}(3m + 2n) = 12}} \quad (m=2, n=3)$$

連立不等式 $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x + 1 \\ y \leq -x^2 + 4x + 1 \end{cases}$ の表す領域を D とする。

- (1) D を座標平面上に図示せよ。
 (2) a を実数とする。点 (x, y) が D を動くとき、 $-ax + y$ の最大値を $f(a)$ とする。 $f(a)$ を求めよ。
 (3) (2) で求めた $f(a)$ に対し、関数 $b = f(a)$ のグラフをかけ。

(2017 宮崎大)

(1)

$$y = x^2 - 2x + 1 \quad \text{と} \quad y = -x^2 + 4x + 1$$

を連立して

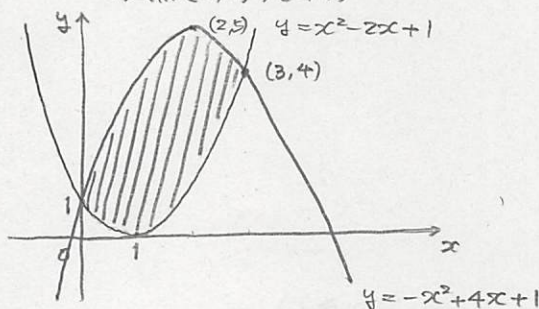
$$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 4x + 1$$

$$2x^2 - 6x = 0$$

$$2x(x - 3) = 0$$

$$x = 0, 3$$

$$\begin{cases} x = 0 & \text{のとき} & y = 1 \\ x = 3 & \text{のとき} & y = 4 \end{cases}$$

よって、交点 $(0, 1), (3, 4)$ 領域 D は図の斜線部

ただし、境界も含む

2式を連立して

$$-x^2 + 4x + 1 = ax + k$$

$$x^2 + (a-4)x + (k-1) = 0$$

判別式 $D = 0$ と $3 \leq 5 <$

$$D = (a-4)^2 - 4(k-1)$$

$$= a^2 - 8a + 16 - 4k + 4$$

$$= a^2 - 8a + 20 - 4k = 0$$

$$4k = a^2 - 8a + 20$$

$$k = \frac{1}{4}a^2 - 2a + 5$$

よって

$$f(a) = \frac{1}{4}a^2 - 2a + 5$$

(iii) $a \geq 4$ のとき点 $(0, 1)$ を通るとき最大となり

$$f(a) = 1$$

(i) ~ (iii) より

$$f(a) = \begin{cases} 1 & (a \geq 4 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{4}a^2 - 2a + 5 & (-2 \leq a \leq 4 \text{ のとき}) \\ -3a + 4 & (a \leq -2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$$-ax + y = k \quad \text{とおく。}$$

$$y = ax + k \quad (\text{傾き } a, \text{ 切片 } k \text{ の直線})$$

$$y = -x^2 + 4x + 1 \quad \text{より}$$

$$y' = -2x + 4$$

$$\begin{cases} y'(x=0) = 4 \\ y'(x=3) = -2 \end{cases}$$

(i) $a \leq -2$ のとき点 $(3, 4)$ を通るとき最大となり。

$$f(a) = -3a + 4$$

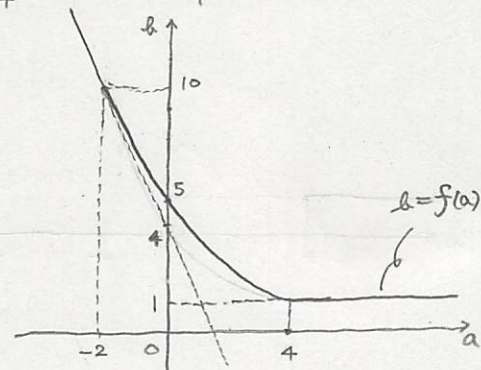
(ii) $-2 \leq a \leq 4$ のとき

$$y = -x^2 + 4x + 1 \quad \text{と接するとき}$$

最大となり

(3)

$$\frac{1}{4}a^2 - 2a + 5 = \frac{1}{4}(a-4)^2 + 1$$



$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ のとき, $u=4x-6y+3, v=4x+3y-1$ に対して, u^2+v^2 の最大値と最小値を求めよ。

$$u = 4x - 6y + 3 \quad \text{--- ①}$$

$$\rightarrow v = 4x + 3y - 1 \quad \text{--- ②}$$

$$u - v = -9y + 4$$

$$y = -\frac{u-v-4}{9}$$

$$0 \leq y \leq 1 \quad \text{より}$$

$$0 \leq -\frac{u-v-4}{9} \leq 1$$

$$0 \leq -u+v+4 \leq 9$$

$$u-4 \leq v \leq u+5 \quad \text{--- ③}$$

$$\textcircled{1} \quad u = 4x - 6y + 3$$

$$\textcircled{2} \times 2 \quad 2v = 8x + 6y - 2 \quad (+)$$

$$u + 2v = 12x + 1$$

$$x = \frac{u + 2v - 1}{12}$$

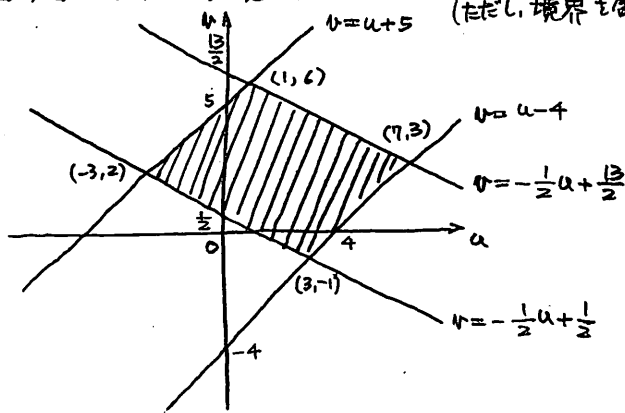
$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{より}$$

$$0 \leq \frac{u + 2v - 1}{12} \leq 1$$

$$0 \leq u + 2v - 1 \leq 12$$

$$-\frac{1}{2}u + \frac{1}{2} \leq v \leq -\frac{1}{2}u + \frac{13}{2} \quad \text{--- ④}$$

③, ④ を満たす領域は図の斜線部 (ただし, 境界を含む)



$$u^2 + v^2 = k \quad \text{とおく。}$$

中心 $(0, 0)$, 半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。

点 $(1, 6)$ を通るとき

$$k = 1 + 36 = 37$$

点 $(7, 3)$ を通るとき

$$k = 49 + 9 = 58$$

$$\therefore \text{Max}(u^2 + v^2) = 58$$

$u^2 + v^2$ が最小となるとき

$$-2 \leq u \leq 3 \quad \text{で} \quad v = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$$

と接する

原点を通る, $v = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ に

垂直な直線は

$$v = 2u \quad \text{であり,}$$

2式を連立して

$$2u = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2}u = \frac{1}{2}$$

$$u = \frac{1}{5}$$

$$\text{このとき} \quad v = \frac{2}{5}$$

$$\therefore \min(u^2 + v^2) = \frac{1}{25} + \frac{4}{25}$$

$$= \frac{5}{25}$$

$$= \frac{1}{5}$$

よって以上より

$$\begin{cases} \text{Max}(u^2 + v^2) = 58 & ((u, v) = (7, 3) \text{ とき}) \\ \text{Min}(u^2 + v^2) = \frac{1}{5} & ((u, v) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \text{ とき}) \end{cases}$$

実数 x, y, s, t に対し, $z = x + yi$, $w = s + ti$ は $z = \frac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし, i は虚数単位である。

- (1) w を z で表し, s, t を x, y で表せ。
 (2) $0 \leq s \leq 1$ かつ $0 \leq t \leq 1$ となる点 (x, y) の範囲 D を座標平面上に図示せよ。
 (3) 点 $P(x, y)$ が D を動くとき, $-5x + y$ の最小値を求めよ。

(2013 北海道大)

(1)

$$z = \frac{w-1}{w+1} \quad \text{より}$$

$$(w+1)z = w-1$$

$$(z-1)w = -z-1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{"ここで"} z=1 \text{ とすると} \\ 0 = -z-1 \text{ とは} \text{不合理} \end{array} \right)$$

$$z \neq 1 \quad \text{より}$$

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

$$z = x + yi \quad \text{を代入して}$$

$$\begin{aligned} w &= \frac{1+x+yi}{1-x-yi} \times \frac{(1-x+yi)}{(1-x+yi)} \\ &= \frac{(1-x^2-y^2) + (y-x^2-y^2)i}{1-2x+x^2-y^2} \quad \text{①} \\ &= \frac{(1-x^2-y^2) + 2yi}{1-2x+x^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\text{一方, } w = s + ti \quad \text{②}$$

$$\text{①} = \text{②} \quad \text{から, } s, t, x, y \in \mathbb{R} \quad \text{となる}$$

$$s = \frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2}, \quad t = \frac{2y}{1-2x+x^2+y^2}$$

(2)

$$0 \leq s \leq 1 \quad \text{より}$$

$$0 \leq \frac{1-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2} \leq 1$$

$$0 \leq 1-x^2-y^2 \leq (x-1)^2+y^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq 1-x^2-y^2 \quad \text{③} \\ 1-x^2-y^2 \leq x^2-2x+1+y^2 \quad \text{④} \end{array} \right.$$

$$\text{③ より}$$

$$x^2+y^2 \leq 1 \quad \text{③'}$$

$$\text{④ より}$$

$$2x^2-2x+2y^2 \geq 0$$

$$x^2-x+y^2 \geq 0$$

$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2 \geq \frac{1}{4} \quad \text{④'}$$

$$0 \leq t \leq 1 \quad \text{より}$$

$$0 \leq \frac{2y}{(x-1)^2+y^2} \leq 1$$

$$0 \leq 2y \leq (x-1)^2+y^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq 2y \quad \text{⑤} \\ 2y \leq (x-1)^2+y^2 \quad \text{⑥} \end{array} \right.$$

$$\text{⑤ より}$$

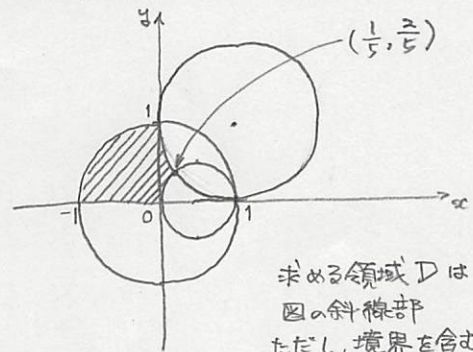
$$y \geq 0 \quad \text{⑤'}$$

$$\text{⑥ より}$$

$$(x-1)^2+y^2-2y \geq 0$$

$$(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 1 \quad \text{⑥'}$$

③', ④', ⑤', ⑥' を同時に満たすので



$$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4} \text{ と } (x-1)^2+(y-1)^2=1 \text{ の交点は}$$

$$x^2-x+y^2=0 \quad \text{⑦}$$

$$\rightarrow x^2-2x+y^2-2y+1=0$$

$$x+2y-1=0$$

$$x=-2y+1$$

$$\text{⑦ に代入して}$$

$$4y^2-4y+1+2y-1+y^2=0$$

$$5y^2-2y=0$$

$$y(5y-2)=0$$

$$y=0, \frac{2}{5}$$

$$\therefore (x, y) = (1, 0), (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$$

(3)

$$-5x+y=k \quad \text{とおく}$$

$$y=5x+k \quad (\text{傾き } 5, y \text{ 切片 } k \text{ の直線})$$

$\therefore$ 直線 $y=5x+k$ が D と共有点をもつように動くとき,
 y 切片が最小になることを考える。

$$P(0,0) \text{ のとき } k=-5 \times 0 + 0 = 0$$

$$P(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \text{ のとき } k=-5 \times \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = -\frac{3}{5}$$

$\therefore$

$$\min(-5x+y) = -\frac{3}{5} \quad ((x, y) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \text{ のとき})$$

100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき、乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と、乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して、利用することにした。

- (1) 購入した乗車券は、余らせずすべて利用するものとする。このとき、セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。
- (2) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき、A のみ、あるいは B のみを購入する場合も含めて、購入金額が最も低くなるのは、A, B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。また、そのときの購入金額はいくらか。

(2012 九州大)

(1)

A を x セット, B を y セット

購入することとして,

$$7x + 3y = 100$$

$$\rightarrow 7 \times 10 + 3 \times 10 = 100$$

$$7(x-10) + 3(y-10) = 0$$

$$y-10 = -\frac{7}{3}(x-10)$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \text{ かつ } x \geq 0$$

$$\begin{cases} x-10 = 3k \\ y-10 = -7k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ゆえに

$$\begin{cases} x = 3k + 10 \\ y = -7k + 10 \end{cases}$$

 $x \geq 0, y \geq 0$ を満たす k は $k = -3, -2, -1, 0, 1$ のときであり,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 31 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

この直線が領域内にある格子点と
共有点をもちながら動くとき、 y 切片が
最小となるときを考えるとよい。

点 $(\frac{100}{7}, 0)$ を近く座標を通るとき
を調べると

点 $(14, 1)$ を通るとき

$$k = 480 \times 14 + 220 \times 1 = 6940$$

点 $(15, 0)$ を通るとき

$$k = 480 \times 15 + 220 \times 0 = 7200$$

点 $(13, 3)$ を通るとき

$$k = 480 \times 13 + 220 \times 3 = 6900$$

よって

A 13 セット, B 3 セット のとき

$$\min k = 6900 \text{ (円)}$$

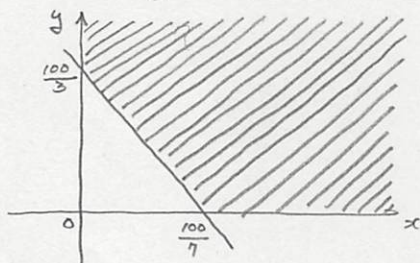
(2)

 $7x + 3y \geq 100$ かつ $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ かつ $x, y \in \mathbb{Z}$

480 x + 220 y が最小となるときを考える
とよい。

$$7x + 3y \geq 100 \text{ より}$$

$$y \geq -\frac{7}{3}x + \frac{100}{3}$$



(x, y) の存在領域は図の斜線部
ただし、境界を含む。

ここで

$$480x + 220y = k \text{ かつ}$$

$$y = -\frac{24}{11}x + \frac{k}{220}$$

(傾き $-\frac{24}{11} > -\frac{7}{3}$, y 切片 $\frac{k}{220}$ の直線)

実数 x, y が $x^2 + y^2 \leq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1) $s = x + y, t = xy$ とするとき、点 (s, t) の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2) 負でない定数 m をとるとき、 $xy + m(x + y)$ の最大値、最小値を m を用いて表せ。

(2005 東京工業大)

(1)

x と y を解にもつ 2 次方程式は

$$x^2 - sx + t = 0$$

2 解はともに実数 なること

判別式 $D \geq 0$ より

$$s^2 - 4t \geq 0$$

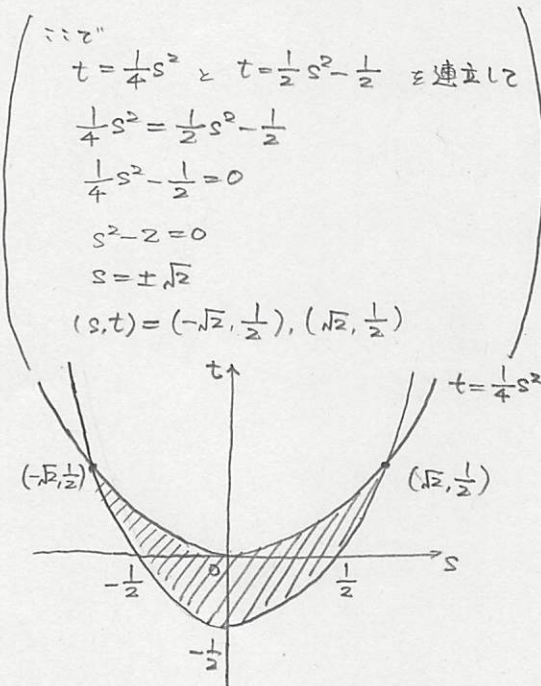
$$t \leq \frac{1}{4}s^2$$

また、 $x^2 + y^2 \leq 1$ より

$$(x+y)^2 - 2xy \leq 1$$

$$s^2 - 2t \leq 1$$

$$t \geq \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2}$$



点 (s, t) の存在領域は図の斜線部
ただし、境界も含む。

(ii) $m > 0$ のとき

$t = -ms + k$ (傾き $-m$, t 切片 k の直線)

$$\left(\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \text{ について} \\ t' = s \\ t'(s=\sqrt{2}) = \sqrt{2} \end{array} \right)$$

$$\text{Max } k = \frac{1}{2} + \sqrt{2}m \quad (s=\sqrt{2}, t=\frac{1}{2})$$

(v) $-m \leq -\sqrt{2}$ のとき

(i.e. $m \geq \sqrt{2}$ のとき)

$$\text{min } k = \frac{1}{2} - \sqrt{2}m \quad (s=-\sqrt{2}, t=\frac{1}{2})$$

(i) $-m \geq -\sqrt{2}$ のとき

(i.e. $0 < m \leq \sqrt{2}$ のとき)

$$t = \frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} \text{ と } t = -ms + k$$

が接するとき k は最小となり、

$$\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{2} = -ms + k$$

$$s^2 + 2ms - 2k - 1 = 0$$

判別式 $D = 0$ とするときより、

$$\frac{D}{4} = m^2 - (-2k-1)$$

$$= m^2 + 2k + 1 = 0$$

$$k = \frac{-m^2 - 1}{2}$$

(i), (ii) より、

$$\text{Max } k = \frac{1}{2} + \sqrt{2}m$$

$$\text{min } k = \begin{cases} \frac{1}{2} - \sqrt{2}m & (m \geq \sqrt{2} \text{ のとき}) \\ -\frac{m^2 + 1}{2} & (0 < m \leq \sqrt{2} \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

$$xy + m(x+y) = t + ms = k \text{ とおくと}$$

(i) $m = 0$ のとき

$$t = k$$

$$\text{Max } k = \frac{1}{2} \quad (s=\pm\sqrt{2}, t=\frac{1}{2})$$

$$\text{min } k = -\frac{1}{2} \quad (s=0, t=-\frac{1}{2})$$