

曲線 $y=x^2+2x-1$ を次のように移動した曲線の方程式を求めよ。

- (1) x 軸方向に $+3$, y 軸方向に -2 だけ平行移動した曲線
- (2) y 軸に関して対称な曲線
- (3) 原点に関して対称な曲線
- (4) 直線 $y=-1$ に関して対称な曲線

(1)

$$y=x^2+2x-1$$

$$=(x+1)^2-2$$

頂点 $(-1, -2)$, 下に凸

$$+3 \downarrow \quad \downarrow -2$$

頂点 $(2, -4)$, 下に凸

$$\underline{\underline{y=(x-2)^2-4}}$$

(2)

頂点 $(-1, -2)$, 下に凸

$\downarrow$ y 軸対称

頂点 $(1, -2)$, 下に凸

$$\underline{\underline{y=(x-1)^2-2}}$$

(3)

頂点 $(-1, -2)$, 下に凸

$\downarrow$ 原点对称

頂点 $(1, 2)$, 上に凸

$$\underline{\underline{y=-(x-1)^2+2}}$$

(4)

頂点 $(-1, -2)$, 下に凸

$\downarrow$ $y=-1$ に関して対称

頂点 $(-1, 0)$, 上に凸

$$\underline{\underline{y=-(x+1)^2}}$$

$$y = -x^2 + 3x + 10 \quad (x \geq 0, y \geq 0) \quad \dots\dots ①$$

曲線①と両座標軸との共有点をA, Bとして①上の動点をPとすると、四角形OAPBの面積の最大値と、そのときのPの座標を求めよ。

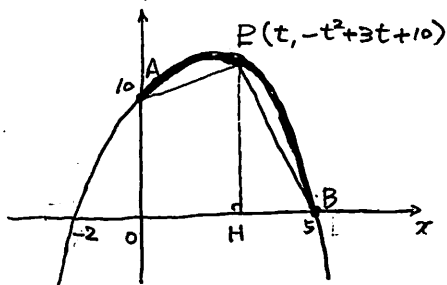
$$y = 0 \quad \text{とおくと}$$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

$$x = 5, -2$$



$$P(t, -t^2 + 3t + 10) \quad (0 < t < 5)$$

とおき、

点Pからx軸に下ろした垂線の足をH

とすると $H(t, 0)$ と表す。

$$S(\square OAPB)$$

$$= S(\square OAPH) + S(\triangle PHB)$$

$$= \frac{1}{2}(10 - t^2 + 3t + 10)t + \frac{1}{2}(5-t)(t^2 + 3t + 10)$$

$$= \frac{1}{2}(-t^2 + 3t + 20)t + \frac{1}{2}(t-5)(t^2 + 3t + 10)$$

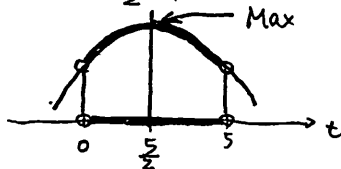
$$= \frac{1}{2}(-t^3 + 3t^2 + 20t) + \frac{1}{2}(t^3 - 8t^2 + 5t + 50)$$

$$= -\frac{5}{2}t^2 + \frac{25}{2}t + 25$$

$$= -\frac{5}{2}\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{325}{8}$$

$$\left(\text{頂点} \left(\frac{5}{2}, \frac{325}{8} \right) \right)$$

$$\left(\text{軸} \quad t = \frac{5}{2}, \text{上に} \square \right)$$



よ、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max } S(\square OAPB) = \frac{325}{8} \\ P\left(\frac{5}{2}, \frac{45}{4}\right) \end{array} \right.$$

$$P\left(\frac{5}{2}, \frac{45}{4}\right)$$

円 $x^2 + y^2 - 16x - 2y = 0$ を直線 $y = 2x$ に関して対称移動した円の方程式を求めよ。

(2016 日本大)

$$x^2 + y^2 - 16x - 2y = 0$$

$$(x-8)^2 + (y-1)^2 = 65$$

中心 $A(8, 1)$, 半径 $\sqrt{65}$ 直線 $y = 2x$ に関して, 点 $A(8, 1)$ と対称な点 $B(x, y)$ とおくと

$$\textcircled{1} \text{ 線分 } AB \text{ の中点 } M\left(\frac{x+8}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$$

は直線 $y = 2x$ 上にある

$$\frac{y+1}{2} = x+8$$

$$y+1 = 2x+16$$

$$y = 2x + 15 \quad \text{--- } \textcircled{1}'$$

$\textcircled{2}$ 直線 AB と直線 $y = 2x$ は
直交するから

$$\frac{y-1}{x-8} = -\frac{1}{2}$$

$$2y-2 = -x+8$$

$$x+2y-10=0 \quad \text{--- } \textcircled{2}'$$

 $\textcircled{1}', \textcircled{2}'$ より

$$x + (4x + 30) - 10 = 0$$

$$5x = -20$$

$$x = -4$$

$$\therefore y = 7$$

$$\therefore B(-4, 7)$$

つまり, 求める円の方程式は

$$\underline{\underline{(x+4)^2 + (y-7)^2 = 65}}$$

座標平面上に2点 $A(-2, 3)$, $B(0, 1)$ と放物線 $y = x^2 - 8x + 15$ がある。点 P が放物線上の $1 \leq x \leq 7$ の範囲を動くとき、次の問いに答えよ。

(1) $\triangle PAB$ が $PA = PB$ である二等辺三角形となるとき点 P の座標を求めよ。

(2) $\triangle PAB$ の面積が最小となるとき点 P の座標を求めよ。

(2011 中東大)

(1)

$$P(t, t^2 - 8t + 15) \quad (1 \leq t \leq 7)$$

とおく

$$PA = PB \quad \text{より}$$

$$\sqrt{(t+2)^2 + (t^2 - 8t + 15 - 3)^2} = \sqrt{t^2 + (t^2 - 8t + 15 - 1)^2}$$

両辺 2乗して

$$(t+2)^2 + (t^2 - 8t + 12)^2 = t^2 + (t^2 - 8t + 14)^2$$

$$(t+2)^2 - t^2 = (t^2 - 8t + 14)^2 - (t^2 - 8t + 12)^2$$

$$(2t+2) \times 2 = (2t^2 - 16t + 26) \times 2$$

$$t+1 = t^2 - 8t + 13$$

$$t^2 - 9t + 12 = 0$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ 5 < \sqrt{33} < 6 \quad \text{より} \\ 14 < 9 + \sqrt{33} < 15 \\ 7 < \frac{9 + \sqrt{33}}{2} < \frac{15}{2} \end{array} \right)$$

$$1 \leq t \leq 7 \quad \text{なので}$$

$$t = \frac{9 - \sqrt{33}}{2}$$

このとき

$$t^2 - 8t + 15 = (t^2 - 9t + 12) + t + 3$$

$$= \frac{9 - \sqrt{33}}{2} + 3$$

$$= \frac{15 - \sqrt{33}}{2}$$

よって

$$\underline{\underline{P\left(\frac{9 - \sqrt{33}}{2}, \frac{15 - \sqrt{33}}{2}\right)}}$$

(2)

直線 AB の方程式は

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{-2 - 0} x$$

$$y = -x + 1$$

$$x + y - 1 = 0$$

点 $P(t, t^2 - 8t + 15)$ と直線 $x + y - 1 = 0$

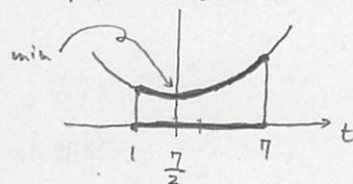
との距離 d は

$$\begin{aligned} d &= \frac{|t + t^2 - 8t + 15 - 1|}{\sqrt{1+1}} \\ &= \frac{|t^2 - 7t + 14|}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - 7t + 14 \\ &= \left(t - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

とおく

(頂点 $(\frac{7}{2}, \frac{7}{4})$
軸: $t = \frac{7}{2}$, 下に凸)



$$\min f(t) = \frac{7}{4} \quad (t = \frac{7}{2})$$

$$f(t) > 0 \quad \text{なので}$$

$$d = \frac{t^2 - 7t + 14}{\sqrt{2}} = \frac{f(t)}{\sqrt{2}}$$

となり $t = \frac{7}{2}$ のとき最小

このとき $S(\triangle PAB)$ も最小

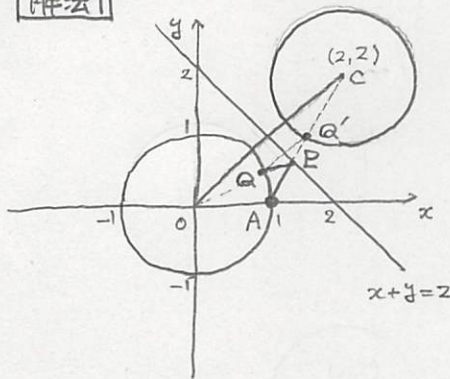
よって

$$\underline{\underline{P\left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{4}\right)}}$$

座標平面上に点 $A(1, 0)$ を固定し、点 P を直線 $x+y=2$ 上に、点 Q を円 $x^2+y^2=1$ 上にそれぞれとる。このとき、線分の長さの和 $AP+PQ$ の最小値と、そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2007 愛知教育大)

解法1

円 $x^2+y^2=1$ について中心 $O(0,0)$, 半径 1これと直線 $x+y=2$ に関して対称な点 $C(2,2)$

なので

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1$$

直線 $x+y=2$ に関して.点 Q と対称な点 Q' をとると.

$$AP+PQ=AP+BQ' \geq AQ'$$

線分 AQ' の長さが最小となるのは3点 A, Q', C がこの順に一直線上に並ぶとき

このとき

$$AQ' = AC - CQ'$$

$$= \sqrt{1+4} - 1$$

$$= \sqrt{5} - 1$$

よって

$$\min(AP+BQ) = \sqrt{5} - 1$$

このとき

$$\text{直線 } AC: y=2(x-1) \text{ と}$$

$$\text{直線 } x+y=2$$

と連立して

$$x+2(x-1)=2$$

$$3x=4$$

$$x=\frac{4}{3}, y=\frac{2}{3}$$

よって

$$\underline{\underline{P(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})}}$$

$$(x-2)^2+(y-2)^2=1 \text{ と } y=2(x-1)$$

と連立して

$$(x-2)^2+(2x-4)^2=1$$

$$(x-2)^2+4(x-2)^2=1$$

$$5(x-2)^2=1$$

$$(x-2)^2=\frac{1}{5}$$

$$x-2=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x=2\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

図より $x < 2$ なので

$$x=2-\frac{1}{\sqrt{5}}=2-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{10-\sqrt{5}}{5}$$

$$y=2\left(\frac{10-\sqrt{5}}{5}-1\right)$$

$$=2\times\frac{5-\sqrt{5}}{5}$$

$$=\frac{10-2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{よって } Q'\left(\frac{10-\sqrt{5}}{5}, \frac{10-2\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$\text{直線 } QQ': y-\frac{10-2\sqrt{5}}{5}=x-\frac{10-\sqrt{5}}{5}$$

$$y=x-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$x^2+y^2=1 \text{ と連立して}$$

$$x^2+\left(x-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=1$$

$$2x^2-\frac{2\sqrt{5}}{5}x-\frac{4}{5}=0$$

$$10x^2-2\sqrt{5}x-4=0$$

$$5x^2-\sqrt{5}x-2=0$$

$$(\sqrt{5}x-2)(\sqrt{5}x+1)=0$$

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

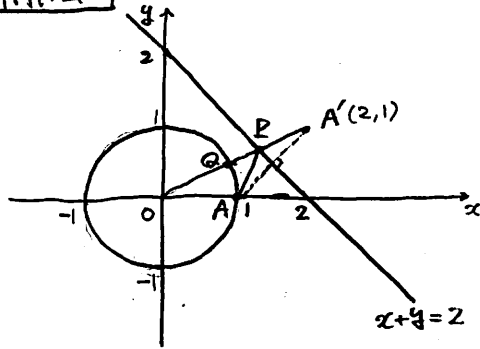
図より $x > 0$ なので

$$x=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}, y=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{よって } \underline{\underline{Q(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})}}$$

(裏に続く)

解法2



直線 $x+y=2$ に関する点 $A(1,0)$
の対称点 $A'(2,1)$ とする

$$AP+PQ = A'P+PQ \geq A'Q$$

これが最小となる α は

4点 O, Q, P, A' がこの順に
同一直線上にあるとき.

このとき

$$\begin{aligned} \min(AP+PQ) &= OA' - OQ \\ &= \sqrt{5} - 1 \end{aligned}$$

直線 $OA' : y = \frac{1}{2}x$ — ①

①と直線 $x+y=2$ と連立して

$$x + \frac{1}{2}x = 2$$

$$\frac{3}{2}x = 2$$

$$x = \frac{4}{3}$$

このとき $y = \frac{2}{3}$

よって $P(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

①と円 $x^2+y^2=1$ と連立して

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 1$$

$$\frac{5}{4}x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{4}{5}$$

$$x = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

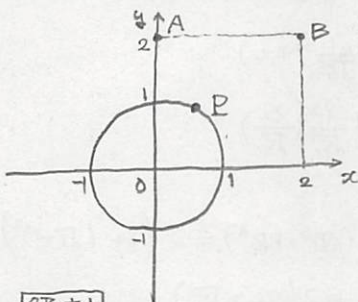
$x > 0$ のとき $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

このとき $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$

よって $Q(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

xy平面上に2点A(0, 2), B(2, 2)と円C: $x^2 + y^2 = 1$ がある。点PがC上を動くとき $AP^2 + BP^2$ の最大値と最小値を求め、また、それらを与えるPの座標を求めよ。

(2015 学習院大)



解法1

P(x, y) とおくと

円C上にあるので $x^2 + y^2 = 1$ ①
を満す。

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= x^2 + (y-2)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ &= 2x^2 - 4x + 4 + 2y^2 - 8y + 8 \\ &= 2(x^2 + y^2) - 4x - 8y + 12 \\ &= -4x - 8y + 14 \quad (\because \text{①より}) \end{aligned}$$

$$-4x - 8y + 14 = k \quad \text{とおくと}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{14-k}{8}$$

(傾き $-\frac{1}{2}$, y切片 $\frac{14-k}{8}$ の直線)

xy平面上で 円①に接するとき
最大値と最小値を与える。

原点を通る $y = -\frac{1}{2}x + \frac{14-k}{8}$ と
垂直な直線は

$$y = 2x$$

①と連立して

$$x^2 + 4x^2 = 1$$

$$5x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{5}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ かつ } y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ かつ } y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

よって

$$\text{接点 } \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

最大となるのは

点 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ を通るときであり

$$\begin{aligned} k &= \frac{4\sqrt{5}}{5} + \frac{16\sqrt{5}}{5} + 14 \\ &= 4\sqrt{5} + 14 \end{aligned}$$

最小となるのは

点 $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ を通るときであり

$$\begin{aligned} k &= -\frac{4\sqrt{5}}{5} - \frac{16\sqrt{5}}{5} + 14 \\ &= -4\sqrt{5} + 14 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} \text{Max}(AP^2 + BP^2) = 4\sqrt{5} + 14 & P\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ \text{min}(AP^2 + BP^2) = -4\sqrt{5} + 14 & P\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \end{cases}$$

解法2

P(cosθ, sinθ) (0 ≤ θ < 2π) とおくと

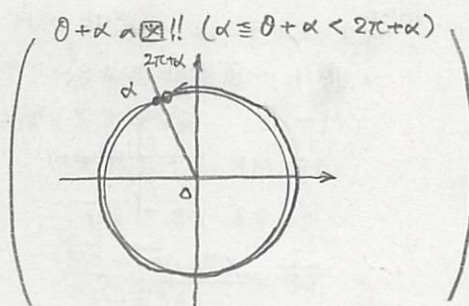
$$AP^2 + BP^2 = -4\cos\theta - 8\sin\theta + 14$$

$$\begin{aligned} (-4, 8) &= 4\sqrt{5} \cos(\theta + \alpha) + 14 \\ \left(\begin{array}{c} 4\sqrt{5} \\ -4 \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} 8 \\ -4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

ただし α は

$$\begin{cases} \cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

を満たす角



$$-1 \leq \cos(\theta + \alpha) \leq 1$$

$$-4\sqrt{5} \leq 4\sqrt{5} \cos(\theta + \alpha) \leq 4\sqrt{5}$$

$$-4\sqrt{5} + 14 \leq \underbrace{4\sqrt{5} \cos(\theta + \alpha) + 14}_{AP^2 + BP^2} \leq 4\sqrt{5} + 14$$

Max となるとき

$$\cos(\theta + \alpha) = 1$$

$$\theta + \alpha = 2\pi$$

$$\theta = 2\pi - \alpha$$

min となるとき

$$\cos(\theta + \alpha) = -1$$

$$\theta + \alpha = \pi$$

$$\theta = \pi - \alpha$$

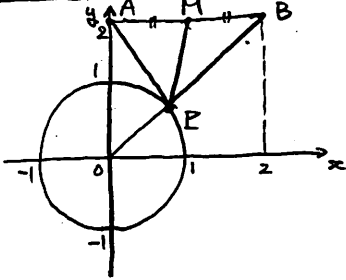
$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \cos\theta = \cos(2\pi - \alpha) \\ = \cos\alpha \\ = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \sin(2\pi - \alpha) \\ = -\sin\alpha \\ = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right) & \quad \left(\begin{array}{l} \cos\theta = \cos(\pi - \alpha) \\ = -\cos\alpha \\ = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta = \sin(\pi - \alpha) \\ = \sin\alpha \\ = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

(裏に続く)

よって

$$\begin{cases} \text{Max}(AP^2 + BP^2) = 4\sqrt{5} + 14 & P(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) \\ \text{min}(AP^2 + BP^2) = -4\sqrt{5} + 14 & P(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \end{cases}$$

解法3



線分ABの中点M(1,2) とすると

中線定理より

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= 2(AM^2 + PM^2) \\ &= 2(1 + PM^2) \end{aligned}$$

したがって

PM が最大, 最小 となるときを
考えよう。

最大 となるのは, 3点 P, O, M が
この順に一直線上にあるときであり,

OM = $\sqrt{5}$ とおかせて, 線分OMを

$$OP:MP = 1:(\sqrt{5}+1)$$

と外分する ときである。

$$\vec{OP} = \frac{(\sqrt{5}+1)\vec{OO} - \vec{OM}}{-1+(\sqrt{5}+1)}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$$

$$= (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$$

このとき

$$\begin{aligned} \text{Max}(AP^2 + BP^2) &= 2(1 + (\sqrt{5}+1)^2) \\ &= 2(7 + 2\sqrt{5}) \\ &= 14 + 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

最小 となるのは, 3点 O, P, M が

この順に一直線上にあるときであり,

$$\text{線分OMを } OP:MP = 1:(\sqrt{5}-1)$$

と内分する ときである。

$$\vec{OP} = \frac{(\sqrt{5}-1)\vec{OO} + \vec{OM}}{1+(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

このとき

$$\begin{aligned} \text{min}(AP^2 + BP^2) &= 2(1 + (\sqrt{5}-1)^2) \\ &= 2(7 - 2\sqrt{5}) \\ &= 14 - 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

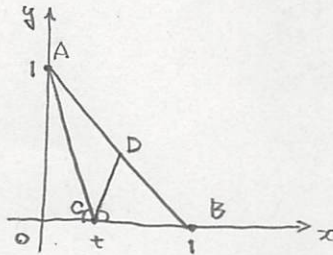
以上より

$$\begin{cases} \text{Max}(AP^2 + BP^2) = 14 + 4\sqrt{5} & P(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) \\ \text{min}(AP^2 + BP^2) = 14 - 4\sqrt{5} & P(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \end{cases}$$

[2018スタンダードⅡⅡAB受問題A197]

実数 t は $0 < t < 1$ を満たすとし、座標平面上の4点 $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $B(1, 0)$, $C(t, 0)$ を考える。また、線分 AB 上の点 D を $\angle ACO = \angle BCD$ となるように定める。 t を動かしたときの $\triangle ACD$ の面積の最大値を求めよ。

(2012 東京大)



直線 AC の傾き $= \frac{-1}{t}$ (あり)

直線 CD : $y = \frac{1}{t}(x-t)$

$$y = \frac{1}{t}x - 1$$

直線 AB : $y = -x + 1$

2直線 AB と CD を連立して

$$-x + 1 = \frac{1}{t}x - 1$$

$$(1 + \frac{1}{t})x = 2$$

$$\frac{t+1}{t}x = 2$$

$$t+1 \neq 0 \text{ あり}$$

$$x = \frac{2t}{t+1}$$

このとき

$$y = -\frac{2t}{t+1} + 1 = \frac{1-t}{t+1}$$

$$\text{交点} \left(\frac{2t}{1+t}, \frac{1-t}{1+t} \right)$$

$$S(\triangle ACD) = S(\triangle ACB) - S(\triangle DCB)$$

$$= \frac{1}{2}(1-t) \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot (1-t) \cdot \frac{1-t}{1+t}$$

$$= \frac{1-t}{2} \left(1 - \frac{1-t}{1+t} \right)$$

$$= \frac{1-t}{2} \cdot \frac{2t}{1+t}$$

$$= \frac{t-t^2}{1+t} = \frac{-t^2+t}{t+1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ & & 1 & -2 \\ \hline & -1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

$$= \frac{(t+1)(-t+2) - 2}{t+1}$$

$$= -t + 2 - \frac{2}{t+1}$$

$$= -t - 1 - \frac{2}{t+1} + 3$$

$$= -\left(t+1 + \frac{2}{t+1}\right) + 3$$

ここで

$$t+1 > 0, \frac{2}{t+1} > 0 \text{ あり}$$

(相加) $\geq$ (相乗) あり

$$t+1 + \frac{2}{t+1} \geq 2\sqrt{(t+1) \cdot \frac{2}{t+1}} = 2\sqrt{2}$$

$$-(t+1 + \frac{2}{t+1}) \leq -2\sqrt{2}$$

$$-(t+1 + \frac{2}{t+1}) + 3 \leq -2\sqrt{2} + 3$$

つまり

$$S(\triangle ACD) \leq -2\sqrt{2} + 3$$

等号成立は

$$\left(\begin{array}{l} t+1 = \frac{2}{t+1} \quad \text{かつ} \quad 0 < t < 1 \\ \text{つまり} \\ t = \sqrt{2} - 1 \quad \text{あり} \end{array} \right)$$

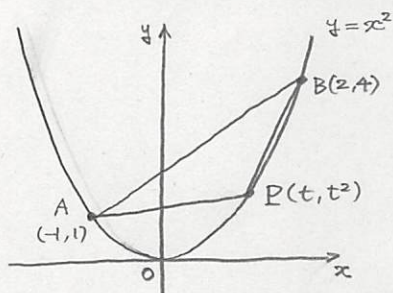
よって

$$\underline{\underline{\text{Max } S(\triangle ACD) = 3 - 2\sqrt{2}}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題25]

放物線 $y=x^2$ 上の点 $A(-1, 1)$, $B(2, 4)$ をとる。この放物線上の動点 P が A から B まで動く。 $\triangle APB$ の面積を最大にする P の座標と、そのときの $\triangle APB$ の面積を求めよ。

(2001 東北学院大)



$y=x^2$ 上の点 $P(t, t^2)$ ($-1 \leq t \leq 2$) とおく。

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{直線 } AB: y-4 = \frac{4-1}{2+1}(x-2)$$

$$y-4 = x-2$$

$$x-y+2=0 \quad (\Leftrightarrow y=x+2)$$

点 $P(t, t^2)$ から直線 $x-y+2=0$

までの距離 d は

$$d = \frac{|t-t^2+2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|-t^2+t+2|}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \text{点 } P \text{ は直線 } AB \text{ の下側 である} \\ t^2 \leq t+2 \Leftrightarrow -t^2+t+2 \geq 0 \\ \text{を満たす。} \end{array} \right)$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}}(-t^2+t+2)$$

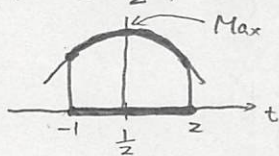
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\{t^2-t-2\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4\sqrt{2}}$$

d が Max するとき $S(\triangle APB)$ も Max

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{頂点 } \left(\frac{1}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{8}\right) \\ \text{軸: } t = \frac{1}{2}, \text{ 上に凸} \end{array} \right.$$



$$\text{Max } d = \frac{9\sqrt{2}}{8} \quad (t = \frac{1}{2})$$

このとき

$$\text{Max } S(\triangle APB)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{27}{8}$$

つまり

$$\underline{\underline{P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \text{Max } S(\triangle APB) = \frac{27}{8}}}$$

座標平面上の3点A(1, 0), B(3, 1), C(2, 2)を頂点とする△ABCの内部および境界をTとおく。実数aに対して、条件 $AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a$ を満たす座標平面上の点Pの全体をDとする。ただし、APは点Aと点Pの距離を表す。

- (1) Dが少なくとも1つの点Pを含むようなaの値の範囲を求めよ。
 (2) DがTを含むようなaの値の範囲を求めよ。
 (3) (1)のもとで、DがTに含まれるようなaの値の範囲を求めよ。

(2017 北海道大)

(1)

E(x, y) とおく。

Dの内部にある条件

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a \quad \text{より}$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (x-3)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq a$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$+ x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1$$

$$+ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 \leq a$$

$$3x^2 - 12x + 14 + 3y^2 - 6y + 5 \leq a$$

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y \leq \frac{a-4}{3} - \frac{19}{3}$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq \frac{a-4}{3}$$

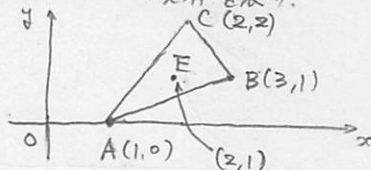
よって点E(x, y)は

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq \frac{a-4}{3}$$

を満たす。

これは $a \geq 4$ のとき中心(2, 1), 半径 $\sqrt{\frac{a-4}{3}}$ の円

内部および境界を表す。

よって $a \geq 4$

(2)

E(2, 1) とおく。

$$EA = \sqrt{2}, EB = EC = 1 \quad \text{なので}$$

D ⊃ T となるためには

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \geq \sqrt{2}$$

$$\frac{a-4}{3} \geq 2$$

$$\underline{\underline{a \geq 10}}$$

(3)

(2)で $EB = EC$ なので

点Eは線分BCの垂直二等分線上である。

$$\left(\begin{array}{l} \text{直線 AB: } y = \frac{1}{2}(x-1) \\ \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0 \\ \text{直線 BC: } y - 1 = \frac{-1}{1}(x-3) \\ \Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \end{array} \right)$$

点E(2, 1)と直線 $x - 2y - 1 = 0$ との距離は

$$\frac{|2 - 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

点E(2, 1)と直線 $x + y - 4 = 0$ との距離は

$$\frac{|2 + 1 - 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であり、 $\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ なので

D ⊃ T となるためには

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{a-4}{3} \leq \frac{1}{5}$$

$$5a - 20 \leq 3$$

$$5a \leq 23$$

$$a \leq \frac{23}{5}$$

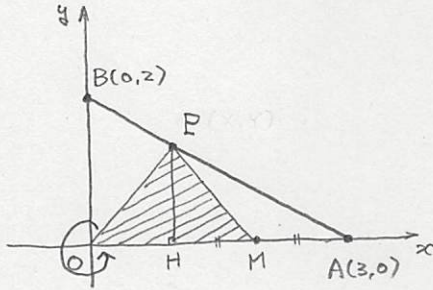
(1)で $a \geq 4$ より

$$\underline{\underline{4 \leq a \leq \frac{23}{5}}}$$

[2018スタンダードⅡAB受 問題B199]

座標平面上に点 $A(3, 0)$, $B(0, 2)$ をとり、線分 AB 上に点 P をとり、 P から x 軸に下ろした垂線を PH , 線分 AH の中点を M とする。ただし、点 H は x 軸上の点とし、 P は A と異なる点とする。 O を原点とし、 $\triangle OPM$ を O を中心に座標平面内で1回転させるとき、通過する点全体が作る円の面積が最小となるような点 P の座標を求めよ。

(2009 千葉大)



直線 $AB: y = -\frac{2}{3}x + 2$ であり

$P(t, -\frac{2}{3}t + 2)$ ($0 \leq t < 3$)

とできる。

このとき

$H(t, 0)$ であり、

$M(\frac{t+3}{2}, 0)$

ここで

(円の半径) $= \max\{OP, OM\}$

とある。

$$OP = \sqrt{t^2 + \frac{4}{9}t^2 - \frac{8}{3}t + 4}$$

$$= \sqrt{\frac{13t^2 - 24t + 36}{9}}$$

$OP > 0, OM > 0$ であり、

$OP \geq OM$ のとき

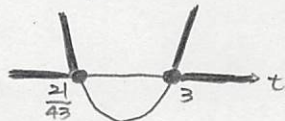
両辺を2乗してよく、

$$\frac{13t^2 - 24t + 36}{9} \geq \frac{t^2 + 6t + 9}{4}$$

$$52t^2 - 96t + 144 \geq 9t^2 + 54t + 81$$

$$43t^2 - 150t + 63 \geq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} 43t^2 - 150t + 63 = 0 \quad \text{とおく。} \\ \begin{array}{ccc} 43 & -21 & -21 \\ 1 & -3 & -129 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} -21 \\ -129 \end{array} \\ \hline (43t - 21)(t - 3) = 0 \\ t = \frac{21}{43}, 3 \end{array} \right)$$



$t \leq \frac{21}{43}, 3 \leq t$

$0 \leq t < 3$ とあわせて

$0 \leq t \leq \frac{21}{43}$

よって、

$$r^2 = \begin{cases} \frac{13}{9}t^2 - \frac{8}{3}t + 4 & (0 \leq t \leq \frac{21}{43} \text{ のとき}) \\ \frac{1}{4}(t+3)^2 & (\frac{21}{43} \leq t < 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

また、 $0 \leq t \leq \frac{21}{43}$ のとき、

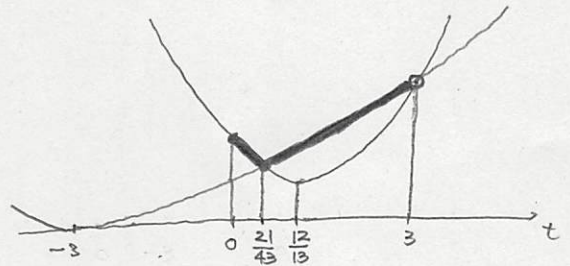
$$r^2 = \frac{13}{9}t^2 - \frac{8}{3}t + 4$$

$$= \frac{13}{9} \left\{ t^2 - \frac{24}{13}t \right\} + 4$$

$$= \frac{13}{9} \left\{ \left(t - \frac{12}{13} \right)^2 - \frac{144}{169} \right\} + 4$$

$$= \frac{13}{9} \left(t - \frac{12}{13} \right)^2 - \frac{16}{13} + 4$$

$$= \frac{13}{9} \left(t - \frac{12}{13} \right)^2 + \frac{36}{13}$$



よって

r は $t = \frac{21}{43}$ のとき $\min$ となり、

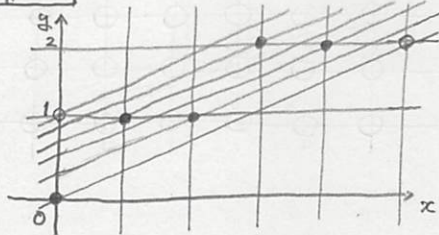
このとき

$P(\frac{21}{43}, \frac{72}{43})$

xy 平面上, x 座標, y 座標がともに整数であるような点 (m, n) を格子点とよぶ。各格子点を中心として半径 r の円が描かれており, 傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線はこれらの円のどれかと共有点をもつという。このような性質をもつ実数 r の最小値を求めよ。

(1991 東京大)

解法1



題意の直線 $y = \frac{2}{5}x + b$ とおくと,

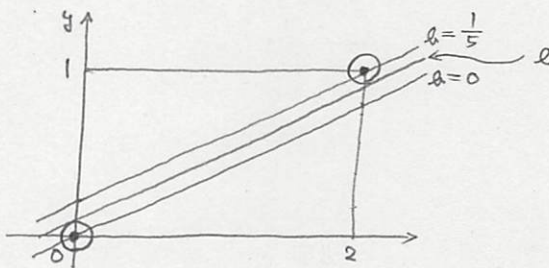
$0 \leq b < 1$ としても一般性を失わない。

また, $0 \leq x < 5$ についてのみ考えてよい。

このとき,

$$b = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

のそれぞれに対して, 通過する格子点は1つずつ定まる。



$0 < b < \frac{1}{5}$ のとき

点 $(0, 0)$ と点 $(2, 1)$ から等距離にある

直線 $l: y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}$ ($\Leftrightarrow 4x - 10y + 1 = 0$)

まで距離 d とて

$$d = \frac{1}{\sqrt{16+100}} = \frac{1}{\sqrt{116}} = \frac{1}{2\sqrt{29}}$$

であり, $d > r$ のとき 直線と円は共有点をもたない

$$\text{ゆえに, } \min r = \frac{1}{2\sqrt{29}}$$

解法2

題意の直線 $y = \frac{2}{5}x + c$ とおくと,

$$2x - 5y + 5c = 0 \quad \text{であり,}$$

この直線と, 中点 (m, n) との距離 d は

$$d = \frac{|2m - 5n + 5c|}{\sqrt{4+25}} \\ = \frac{|2m - 5n + 5c|}{\sqrt{29}}$$

中心 (m, n) , 半径 r の円と共有点をもつとき,

$$d \leq r \quad \text{より}$$

$$\frac{|2m - 5n + 5c|}{\sqrt{29}} \leq r \quad \text{--- ①}$$

任意の c に対して, ①を満たす $m, n \in \mathbb{Z}$ が存在するような $\min r$ を求めよ。

ここで

$$2m - 5n = 1 \quad \text{とおくと,}$$

$$m = 3, n = 1 \quad \text{が} \quad \text{この方程式を満たし,}$$

$$2m - 5n = k \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{とすると}$$

$$m = 3k, n = k \quad \text{が} \quad \text{この方程式を満たす。}$$

$2m - 5n$ は任意の整数値をとると

が成り立ち,

$$2m - 5n = k, 5c = l \quad (k, l \text{ は整数})$$

とおくと

$$\text{①} \Leftrightarrow |k + l| \leq \sqrt{29}r \quad \text{--- ①'}$$

任意の l に対して, ①'を満たす $k \in \mathbb{Z}$ が存在するような $\min r$ を求めよ。

$$\text{①'} \Leftrightarrow -\sqrt{29}r \leq k + l \leq \sqrt{29}r$$

$$-l - \sqrt{29}r \leq k \leq -l + \sqrt{29}r$$

ゆえに

$$(-l + \sqrt{29}r) - (-l - \sqrt{29}r) \geq 1$$

$$2\sqrt{29}r \geq 1$$

$$r \geq \frac{1}{2\sqrt{29}}$$

$$\text{よって } \min r = \frac{1}{2\sqrt{29}}$$