

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ \text{ のとき, } \sin \theta \cos \theta, \sin^3 \theta + \cos^3 \theta, \sin \theta - \cos \theta, \\ \tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} \text{ の値を求めよ。}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

両辺を2乗して

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{4-2\sqrt{3}}{4}$$

$$2\sin \theta \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{\underline{\sin \theta \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}}}$$

$$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)^3 - 3\sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3 - 3 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3}-1}{8} + \frac{9-3\sqrt{3}}{8}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}-1}{8}}}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2\sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\because \because \quad 90^\circ < \theta < 180^\circ \quad \therefore \therefore \right. \\ \left. \begin{array}{l} \sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \quad \therefore \\ \sin \theta - \cos \theta > 0 \end{array} \right)$$

$$\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}$$

$$\tan \theta - \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

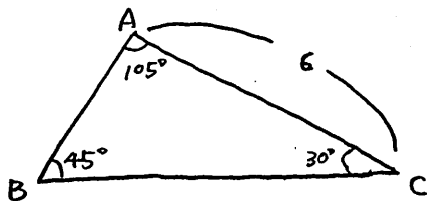
$$= -\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{\sqrt{3}}}}$$

(1) $\triangle ABC$ において、 $AC=6$ 、 $\angle ABC=45^\circ$ 、 $\angle BAC=105^\circ$ のとき、 AB の長さを求めよ。

(2) $\triangle ABC$ において、3辺の長さの比が $BC:CA:AB=\sqrt{2}:(1+\sqrt{3}):2$ であるとき、 $\angle A$ の大きさを求めよ。

(1)



$$\angle BCA = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

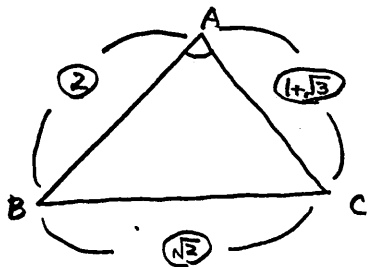
$\triangle ABC$ で正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} AB = 6 \times \frac{1}{2}$$

$$\underline{AB = 3\sqrt{2}}$$

(2)



$$BC:CA:AB = \sqrt{2}:(1+\sqrt{3}):2 \text{ より}$$

$$\begin{cases} BC = \sqrt{2}k \\ CA = (1+\sqrt{3})k \\ AB = 2k \end{cases} \quad (k > 0)$$

と置く。

$\triangle ABC$ で余弦定理より

$$2k^2 = 4k^2 + (1+\sqrt{3})^2 k^2 - 2 \cdot 2k \cdot (1+\sqrt{3})k \cos A$$

$$2 = 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 4(1+\sqrt{3}) \cos A$$

$$4(1+\sqrt{3}) \cos A = 6 + 2\sqrt{3}$$

$$\cos A = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

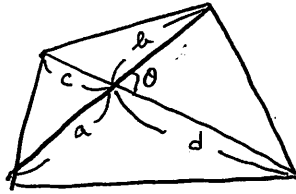
$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ より}$$

$$\underline{A = 30^\circ}$$

- (1) 対角線のなす角が θ である凸四角形の面積 S は、対角線の長さを x, y とすると $S = \frac{1}{2}xy \sin \theta$ で与えられることを示せ。
- (2) 3辺の長さが 9, 10, 17 である三角形の面積、内接円の半径、外接円の半径を求めよ。

(1)

証明



図のように

$$x = a + b, \quad y = c + d$$

を満たす $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とする

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}bd \sin \theta + \frac{1}{2}bc \sin(\pi - \theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}ac \sin \theta + \frac{1}{2}ad \sin(\pi - \theta) \\ &= \frac{1}{2}bd \sin \theta + \frac{1}{2}bc \sin \theta \\ &\quad + \frac{1}{2}ac \sin \theta + \frac{1}{2}ad \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(bd + bc + ac + ad) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(b(c+d) + a(c+d)) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(a+b)(c+d) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}xy \sin \theta \end{aligned}$$

よって

与等式は成り立つ。 ■

$$\cos A = -\frac{108}{180} = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \quad \text{より}$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$0 < A < \pi \quad \text{より} \quad \sin A > 0 \quad \text{より}$$

$$\sin A = \frac{4}{5}$$

$$\text{よって} \quad S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times 9 \times 10 \times \frac{4}{5} = \underline{\underline{36}}$$

内接円の半径 r とする

$$\begin{aligned} r &= \frac{2 \times 36}{9 + 10 + 17} \\ &= \frac{2 \times 36}{36} \\ &= \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

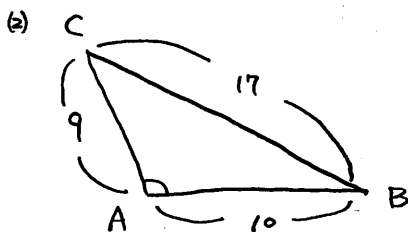
外接円の半径 R とする

正弦定理より

$$\frac{17}{\sin A} = 2R$$

$$2R \times \frac{4}{5} = 17$$

$$\underline{\underline{R = \frac{85}{8}}}$$

図のような $\triangle ABC$ で考える。

余弦定理より

$$289 = 81 + 100 - 2 \times 9 \times 10 \times \cos A$$

$$180 \cos A = -108$$

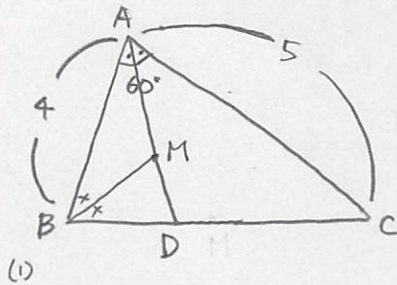
△ABCにおいて、 $AB=4$ 、 $AC=5$ 、 $\angle A=60^\circ$ とする。 $\angle A$ の二等分線とBCの交点をD、△ABCの内心をMとする。次のものを求めよ。

(1) △ABCの面積

(2) ADの長さ

(3) MDの長さ

(2001 大阪教育大)



(1)

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \sin 60^\circ$$

$$= \underline{\underline{5\sqrt{3}}}$$

(2)

$$S(\triangle ABD) + S(\triangle ACD) = S(\triangle ABC) \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times AD \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times AD \times 5 \times \sin 30^\circ = 5\sqrt{3}$$

$$\frac{4AD}{4} + \frac{5AD}{4} = 5\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{AD = \frac{20\sqrt{3}}{9}}}$$

(3)

△ABC で余弦定理より

$$BC^2 = 16 + 25 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60^\circ$$

$$BC^2 = 16 + 25 - 20$$

$$BC^2 = 21$$

$$BC > 0 \quad \text{より} \quad BC = \sqrt{21}$$

ADは $\angle BAC$ の二等分線なので

$$BD:DC = 4:5$$

$$\text{つまり} \quad BD = \frac{4\sqrt{21}}{9}$$

点Mは△ABCの内心なので

BMは $\angle ABD$ の二等分線であり、

$$AM:MD = 4 : \frac{4\sqrt{21}}{9}$$

$$= 9:\sqrt{21}$$

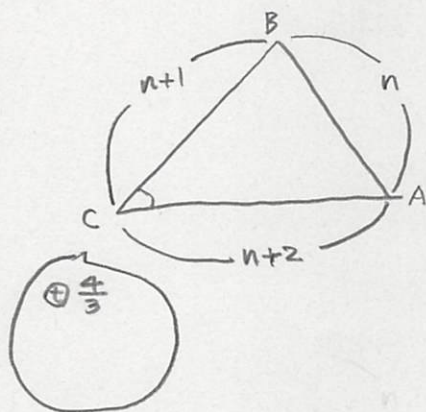
$$\text{よって}$$

$$MD = \frac{20\sqrt{3}}{9} \times \frac{\sqrt{21}}{9 + \sqrt{21}}$$

$$= \frac{20\sqrt{7}}{3} \times \frac{9 - \sqrt{21}}{803}$$

$$= \underline{\underline{\frac{9\sqrt{7} - 7\sqrt{3}}{9}}}$$

$AB=n$, $BC=n+1$, $CA=n+2$ である $\triangle ABC$ において, $\tan C = \frac{4}{3}$ のとき, 次のものを求めよ。

(1) $\sin C$, $\cos C$ の値(2) n の値(3) $\triangle ABC$ の面積と内接円の半径

(1)

$$1 + \tan^2 C = \frac{1}{\cos^2 C} \quad \text{よし}$$

$$1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 C}$$

$$\cos^2 C = \frac{9}{25}$$

$$\cos C = \pm \frac{3}{5}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ 0 < C < \pi, \tan C > 0 \quad \text{よし} \\ \cos C > 0 \\ \cos C = \frac{3}{5} \end{array} \right)$$

また

$$\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} \quad \text{よし}$$

$$\sin C = \tan C \times \cos C$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{3}{5}$$

$$= \frac{4}{5}$$

(2)

$\triangle ABC$ で 余弦定理 よし

$$n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 - 2(n+1)(n+2) \cdot \frac{3}{5}$$

$$n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 - \frac{6}{5}(n^2 + 3n + 2)$$

$$\frac{6}{5}(n^2 + 3n + 2) = n^2 + 6n + 5$$

(2009 新潟大)

$$6n^2 + 18n + 12 = 5n^2 + 30n + 25$$

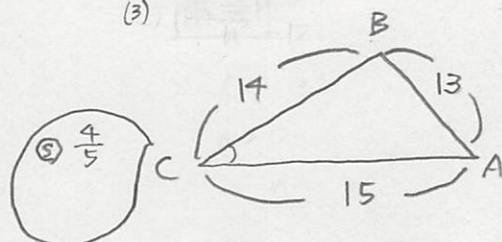
$$n^2 - 12n - 13 = 0$$

$$(n-13)(n+1) = 0$$

$$n > 0 \quad \text{よし}$$

$$\underline{n = 13}$$

(3)



$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times 14 \times 15 \times \frac{4}{5}$$

$$= \underline{84}$$

内接円の半径 r は

$$r = \frac{2 \times 84}{14 + 15 + 13}$$

$$= \frac{2 \times 84}{42}$$

$$= \underline{4}$$

△ABCにおいて、 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ とおく。 $(b-c)\sin^2 A = b\sin^2 B - c\sin^2 C$ が成り立つとき、次の問いに答えよ。

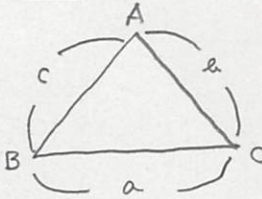
(1) $(b-c)a^2 = b^3 - c^3$ を示せ。

(2) △ABC はどんな三角形か。

(2008 群馬大)

(1)

証明



正弦Th より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{1}{k} (>0)$$

とおくと

$$\sin A = ka, \sin B = kb, \sin C = kc$$

とでき

$$(b-c)\sin^2 A = b\sin^2 B - c\sin^2 C \quad \text{より}$$

$$(b-c)k^2 a^2 = bk^2 b^2 - ck^2 c^2$$

$$(b-c)a^2 = b^3 - c^3$$

よって、与等式は成り立つ。

$$0 < A < \pi \text{ なる } a^2$$

$$A = \frac{2}{3}\pi$$

(i), (ii) より

$AB=AC$ なる二等辺三角形

または

$\angle BAC = \frac{2}{3}\pi$ なる鈍角三角形

(2)

(i) より

$$(b-c)a^2 = b^3 - c^3$$

(ii) $b=c$ のとき

$AB=AC$ なる二等辺三角形

(iii) $b \neq c$ のとき

$$(b-c)a^2 = (b-c)(b^2 + bc + c^2)$$

$$a^2 = b^2 + bc + c^2 \quad \text{--- ①}$$

余弦Th より

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{--- ②}$$

①-② より

$$0 = bc + 2bc \cos A$$

$bc \neq 0$ より

$$1 + 2\cos A = 0$$

$$\cos A = -\frac{1}{2}$$

△ABCの3辺BC, CA, ABの長さ a, b, c が条件 $3a^2 - 4a - 8b - 4c - 3 = 0$ および $a^2 + 2a + 4b - 8c + 9 = 0$ を満たす。

- (1) b, c を a で表せ。
- (2) △ABCの内角のうち最大のものはどれか。
- (3) 最大の内角の大きさを求めよ。

(2000 豊橋技術科学大)

(1)

$$\begin{cases} 3a^2 - 4a - 8b - 4c - 3 = 0 & \text{①} \\ a^2 + 2a + 4b - 8c + 9 = 0 & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{①} \times 2 & \quad 6a^2 - 8a - 16b - 8c - 6 = 0 \\ \text{②} & \quad a^2 + 2a + 4b - 8c + 9 = 0 \quad (-) \\ \hline & \quad 5a^2 - 10a - 20b - 15 = 0 \\ & \quad a^2 - 2a - 4b - 3 = 0 \\ & \quad b = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{①} & \quad 3a^2 - 4a - 8b - 4c - 3 = 0 \\ \text{②} \times 2 & \quad 2a^2 + 4a + 8b - 16c + 18 = 0 \quad (+) \\ \hline & \quad 5a^2 - 20c + 15 = 0 \\ & \quad a^2 - 4c + 3 = 0 \\ & \quad c = \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(2)

$$c - b = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2} > 0 \quad \text{だから}$$

$$c > b \quad \text{③}$$

このとき △ABC が存在するためには

$$\begin{cases} a + b > c & \text{④} \\ b + c > a & \text{⑤} \end{cases}$$

④ より

$$\begin{aligned} a &> c - b \\ a &> \frac{1}{2}a + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}a &> \frac{3}{2} \\ a &> 3 \end{aligned}$$

⑤ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{4} &> a \\ \frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}a &> 0 \\ a^2 - 3a &> 0 \end{aligned}$$

$$a(a-3) > 0$$

$$a < 0, 3 < a$$

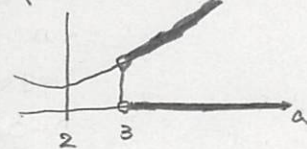
④, ⑤ より

$$a > 3$$

よって

$$\begin{aligned} c - a &= \frac{1}{4}a^2 - a + \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4}(a-2)^2 - \frac{1}{4} = f(a) \quad \text{と置く} \end{aligned}$$

(頂点 $(2, -\frac{1}{4})$
軸: $a=2$, 下に凸)



$$f(a) > f(3) = 0$$

つまり

$$c - a > 0 \quad \text{より}$$

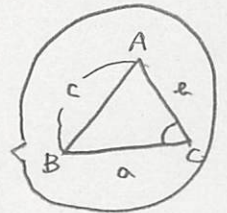
$$c > a$$

③ とあわせて

$$c = AB \text{ が最大辺}$$

つまり

$$\angle BCA \text{ が最大角である。}$$



(3)

△ABC で余弦定理より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 - b^2 = a^2 - 2ab \cos C$$

$$(c+b)(c-b) = a^2 - 2ab \cos C$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\right) = a^2 - 2ab \cos C$$

$$(a^2 - a)(a + 3) = 4a^2 - 8ab \cos C$$

$$a^3 + 2a^2 - 3a = 4a^2 - 8ab \cos C$$

$$8ab \cos C = -a^3 + 2a^2 + 3a$$

(裏に続く)

$$a \neq 0 \text{ 且 } a \in \mathbb{R}$$

$$8b \cos C = -a^2 + 2a + 3.$$

$$2(a^2 - 2a - 3) \cos C = -(a^2 - 2a - 3)$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ a^2 - 2a - 3 = (a-1)^2 - 4 > 0 \\ (\text{① } a > 3 \text{ 或 } a < -1) \end{array} \right)$$

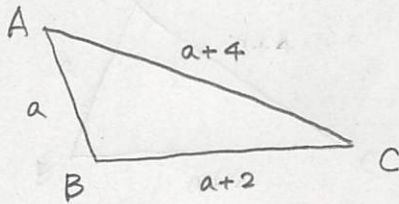
$$\cos C = -\frac{1}{2}$$

$$0 < C < \pi \text{ 且}$$

$$\underline{\underline{C = \angle BCA = \frac{2}{3}\pi}}$$

3辺の長さが a , $a+2$, $a+4$ である三角形が鈍角三角形であるとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。さらに, この三角形の1つの内角が 120° であるとき, 外接円の半径を求めよ。

(2010 西南学院大)



図のように $\triangle ABC$ をとると

AC が最大辺であり

このような $\triangle ABC$ が存在するためには

$$a + (a+2) > a+4$$

$$a > 2 \quad \text{--- ①}$$

このもとで 鈍角三角形 であるためには

$$(a+4)^2 > a^2 + (a+2)^2$$

$$a^2 + 8a + 16 > a^2 + a^2 + 4a + 4$$

$$a^2 - 4a - 12 < 0$$

$$(a-6)(a+2) < 0$$

$$-2 < a < 6 \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$$\underline{2 < a < 6}$$

さらに 1つの内角が 120° とは

$B = 120^\circ$ を意味し

余弦Th より

$$(a+4)^2 = a^2 + (a+2)^2 - 2 \cdot a \cdot (a+2) \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-(a-6)(a+2) = a(a+2)$$

$$a+2 \neq 0 \quad \text{より}$$

$$-a+6 = a$$

$$-2a = -6$$

$$a = 3$$

これは $2 < a < 6$ を満たす。

外接円の半径 R とし

正弦Th より

$$\frac{AC}{\sin 120^\circ} = 2R$$

$$\sqrt{3}R = 7$$

$$\underline{\underline{R = \frac{7}{\sqrt{3}}}}$$

鋭角三角形の3辺の長さが1, 3, a であるとする。

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) この三角形の外接円の半径が $\frac{9}{\sqrt{35}}$ のとき, a の値を求めよ。

(2011 南山大)

(1)

≡ 三角形の成立条件から

$$\begin{cases} 1+3 > a \\ 1+a > 3 \end{cases} \quad \text{より}$$

$$2 < a < 4$$

(i) $2 < a \leq 3$ のとき

$$1^2 + a^2 > 3^2$$

$$a^2 > 8$$

$$a < -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} < a$$

$$2 < a \leq 3 \quad \text{より}$$

$$2\sqrt{2} < a \leq 3$$

(ii) $3 \leq a < 4$ のとき

$$1^2 + 3^2 > a^2$$

$$a^2 < 10$$

$$-\sqrt{10} < a < \sqrt{10}$$

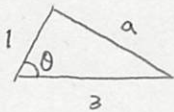
$$3 \leq a < 4 \quad \text{より}$$

$$3 \leq a < \sqrt{10}$$

(i), (ii) より

$$\underline{2\sqrt{2} < a < \sqrt{10}}$$

(2)



$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1+9-a^2}{2 \cdot 1 \cdot 3} \\ &= \frac{10-a^2}{6} \end{aligned}$$

$$\sin \theta > 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \frac{100-20a^2+a^4}{36}} \\ &= \frac{\sqrt{-64+20a^2-a^4}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{-(a^4-20a^2+64)}}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{-(a^2-16)(a^2-4)}$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{(16-a^2)(a^2-4)}$$

正弦定理より

$$\frac{18}{\sqrt{35}} = \frac{6a}{\sqrt{(16-a^2)(a^2-4)}}$$

$$3\sqrt{(16-a^2)(a^2-4)} = \sqrt{35} a$$

$$9(-a^4+20a^2-64) = 35a^2$$

$$9a^4 - 145a^2 + 576 = 0$$

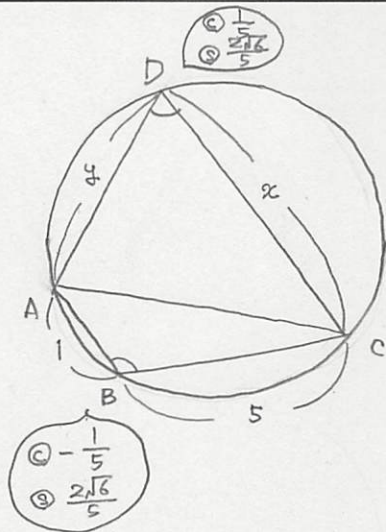
$$(9a^2-64)(a^2-9) = 0$$

$$a^2 = \frac{64}{9}, 9$$

$$2\sqrt{2} < a < \sqrt{10} \quad \text{より}$$

$$\underline{a = 3}$$

円に内接する四角形 ABCD について考える。AB=1, BC=5, $\cos \angle ABC = -\frac{1}{5}$ であり, 四角形 ABCD の面積は $4\sqrt{6}$ である。CD > AD であるとき, 辺 CD の長さを求めよ。 (2011 自治医科大)



□ABCD は 円に内接するから

$$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$$

つまり

$$\cos \angle CDA = -\cos \angle ABC = \frac{1}{5}$$

$$\sin \angle CDA = \sin \angle ABC$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{25}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$CD = x, AD = y \text{ とおくと}$$

$$CD > AD \text{ より } x > y$$

$$S(\square ABCD) = 4\sqrt{6} \text{ より}$$

$$S(\triangle ABC) + S(\triangle ACD) = 4\sqrt{6}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} + \frac{1}{2} x y \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 4\sqrt{6}$$

$$5\sqrt{6} + \sqrt{6} x y = 20\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} x y = 15\sqrt{6}$$

$$x y = 15 \text{ ————— ①}$$

△ABC で余弦定理 より

$$AC^2 = 1 + 25 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 26 + 2$$

$$= 28 \text{ ————— ②}$$

△ACD で余弦定理 より

$$AC^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{1}{5}$$

$$= x^2 + y^2 - \frac{2}{5} x y \text{ ————— ③}$$

$$\text{②} = \text{③} \text{ より}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{5} x y = 28$$

$$\text{①} (x+y)^2 - \frac{12}{5} x y = 28$$

$$\text{①} \text{ より}$$

$$(x+y)^2 - 36 = 28$$

$$(x+y)^2 = 64$$

$$x > 0, y > 0 \text{ から } x+y > 0 \text{ より}$$

$$x+y = 8 \text{ ————— ④}$$

$$\text{①, ④} \text{ より}$$

x, y は 2 解 とする 2 次方程式は

$$t^2 - 8t + 15 = 0$$

$$(t-3)(t-5) = 0$$

$$t = 3, 5$$

$$x > y \text{ より}$$

$$x = 5, y = 3$$

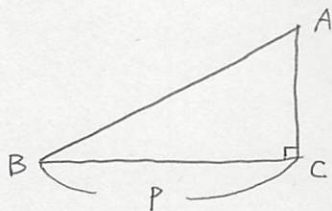
つまり

$$\underline{\underline{CD = 5}}$$

直角三角形ABCは、 $\angle C$ が直角で、各辺の長さは整数であるとする。辺BCの長さが3以上の素数 p であるとき

- (1) 辺AB, CAの長さを p を用いて表せ。
 (2) $\tan \angle A$ と $\tan \angle B$ は、いずれも整数にならないことを示せ。

(2010 千葉大)



(1)

三平方の定理より

$$p^2 + CA^2 = AB^2$$

$$p^2 = AB^2 - CA^2$$

$$p^2 = (AB + CA)(AB - CA)$$

ここで

$$AB + CA > AB - CA > 0$$

であり

$$AB + CA, AB - CA \in \mathbb{Z},$$

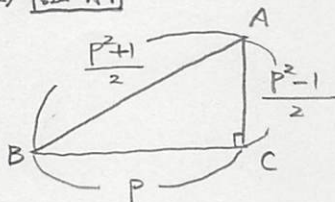
 p は3以上の素数なので

$$\begin{cases} AB + CA = p^2 \\ AB - CA = 1 \end{cases}$$

よって

$$AB = \frac{p^2 + 1}{2}, \quad CA = \frac{p^2 - 1}{2}$$

(2) 証明1



$$\tan \angle A = \frac{2p}{p^2 - 1}, \quad \tan \angle B = \frac{p^2 - 1}{2p}$$

<背理法>

 $\tan \angle B$ が整数であると仮定すると

$$\frac{p^2 - 1}{2p} = N \quad (N \in \mathbb{N}) \quad \text{と仮定する}$$

$$p^2 - 1 = 2NP$$

$$p^2 - 2NP = 1$$

$$p(p - 2N) = 1$$

$$p, p - 2N \in \mathbb{Z} \quad \text{であるから}$$

$$(p, p - 2N) = (1, 1), (-1, -1)$$

これは p が3以上の素数であることに矛盾よって $\tan \angle B \notin \mathbb{Z}$

<背理法>

 $\tan \angle A$ が整数であると仮定すると

$$\frac{2p}{p^2 - 1} = M \quad (M \in \mathbb{N}) \quad \text{と仮定する}$$

$$2p = Mp^2 - M$$

$$2p = M(p+1)(p-1)$$

ここで

 p は3以上の素数であるので

左辺は2の倍数であるが

4の倍数ではない。

また

 $p+1, p-1$ はともに偶数であるので

右辺は4の倍数である。

これは

(左辺) = (右辺) に矛盾

よって $\tan \angle A \notin \mathbb{Z}$

証明2

$$\tan \angle A = \frac{2p}{p^2 - 1} = \frac{2p}{(p+1)(p-1)} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1}$$

 $p \geq 3$ より

$$0 < \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{つまり} \quad 0 < \tan \angle A < 1$$

よって $\tan \angle A$ は整数にならない。

<背理法>

$$\tan \angle B = \frac{p^2 - 1}{2p} = \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right)$$

 $\tan \angle B$ が整数であると仮定すると

$$p - \frac{1}{p} = 2m \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad \text{と仮定する}$$

$$p - 2m = \frac{1}{p} \quad \text{--- ①}$$

ここで

 $p \geq 3$ より

$$0 < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{3}$$

一方、 $p - 2m \in \mathbb{Z}$ であるから

①は不合理

よって $\tan \angle B$ は整数にならない。