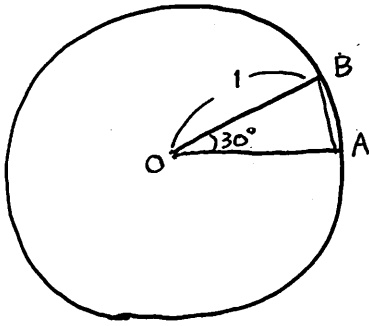


半径1の円に内接する正十二角形の周の長さを求めよ。



図のような  $\triangle OAB$  をとると

正十二角形の周の長さ  $l$  は

$$l = 12AB \quad \text{とできる.}$$

$\triangle OAB$  で余弦定理より

$$AB^2 = 1 + 1 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos 30^\circ$$

$$AB^2 = 2 - \sqrt{3}$$

$$AB > 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

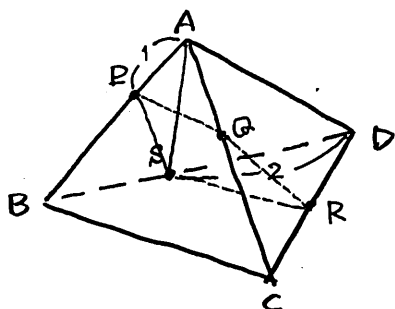
よって

$$\underline{\underline{l = 6(\sqrt{6} - \sqrt{2})}}$$

1 辺の長さが3の正四面体 ABCD の辺 AB, AC, CD, DB 上にそれぞれ点 P, Q, R, S を, AP=1, DS=2 となるようにとる。

(1)  $\triangle APS$  の面積を求めよ。

(2) 3つの線分の長さの和  $PQ+QR+RS$  の最小値を求めよ。



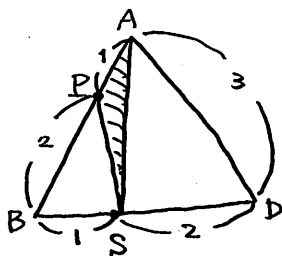
$$PS^2 = 21$$

$$PS > 0 \quad \therefore PS = \sqrt{21}$$

よって

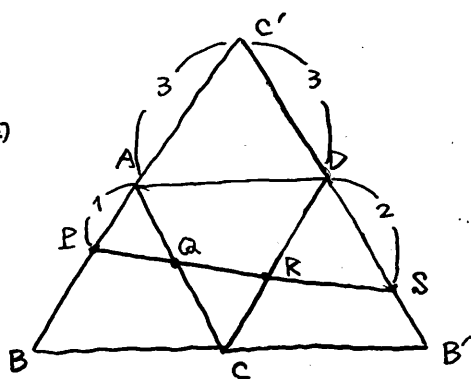
$$\min(PQ+QR+RS) = \sqrt{21}$$

(1)



$$\begin{aligned} S(\triangle APS) &= S(\triangle ABC) - S(\triangle PBS) - S(\triangle ASD) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

(2)



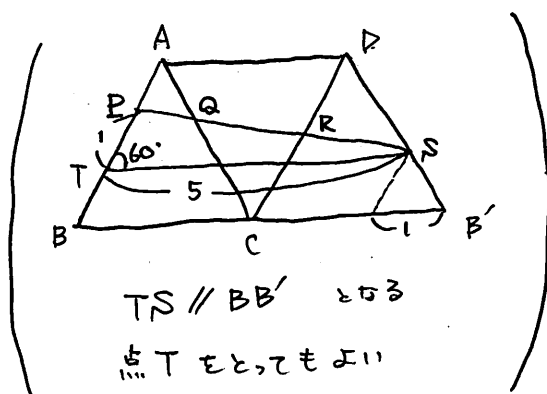
図のように展開図をつくと。

4点 P, Q, R, S が一直線になるときが最小となる。

$\triangle C'PS$  で余弦定理より

$$PS^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos 60^\circ$$

$$PS^2 = 16 + 25 - 20$$

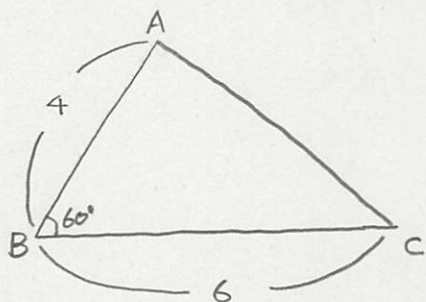


AB=4, BC=6,  $\angle ABC=60^\circ$  の  $\triangle ABC$  について考える。

(1)  $\cos \angle ACB$  を求めよ。

(2) 辺 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E をとり、線分 DE を折り目として  $\triangle ABC$  を折ったとき、頂点 A が辺 BC の中点 M と重なった。MD, ME の長さを求めよ。

(2014 追手門学院大)



(1)

余弦定理より

$$AC^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2}$$

$$AC^2 = 28$$

$$AC > 0 \text{ より}$$

$$AC = 2\sqrt{7}$$

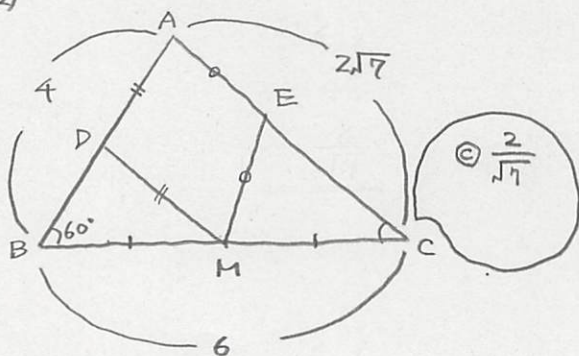
余弦定理より

$$16 = 28 + 36 - 2 \times 2\sqrt{7} \times 6 \times \cos \angle ACB$$

$$24\sqrt{7} \cos \angle ACB = 48$$

$$\cos \angle ACB = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

(2)



$$MD = AD = x, ME = AE = y \text{ とおく}$$

$\triangle DBM$  で余弦定理より

$$x^2 = (4-x)^2 + 3^2 - 2(4-x) \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$$

$$x^2 = 16 - 8x + x^2 + 9 - 12 + 3x$$

$$5x = 13$$

$$x = \frac{13}{5}$$

$\triangle EMC$  で余弦定理より

$$y^2 = (2\sqrt{7}-y)^2 + 3^2 - 2(2\sqrt{7}-y) \cdot 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$y^2 = 28 - 4\sqrt{7}y + y^2 + 9 - 24 + \frac{12}{\sqrt{7}}y$$

$$\frac{16\sqrt{7}}{7}y = 13$$

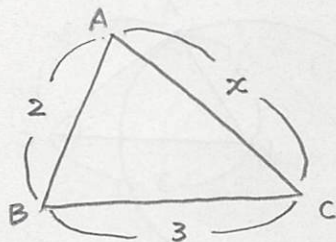
$$y = \frac{13\sqrt{7}}{16}$$

よって

$$MD = \frac{13}{5}, ME = \frac{13\sqrt{7}}{16}$$

△ABCにおいて3辺AB, BC, CAの長さがそれぞれ2, 3,  $x$ であるとする。このとき, △ABCの面積が最大になるような $x$ の値を求めよ。また, ∠ACBが最大になるような $x$ の値を求めよ。 (2011 南山大)

解法1



△ABCが存在するためには,

$$\begin{cases} 2+x > 3 \\ 2+3 > x \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 5$$

このもとで考える.

(△ABCの面積が最大)

余弦定理より

$$x^2 = 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos B.$$

$$12 \cos B = 13 - x^2$$

$$\cos B = \frac{13 - x^2}{12}$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \quad \text{より}$$

$$\sin^2 B = 1 - \frac{169 - 26x^2 + x^4}{144}$$

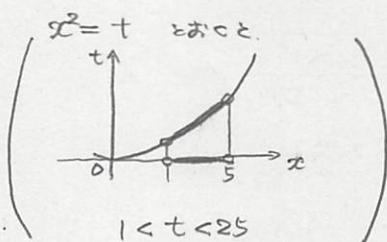
$$\sin^2 B = \frac{-25 + 26x^2 - x^4}{144}$$

$$\sin B > 0 \quad \text{より}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{-x^4 + 26x^2 - 25}}{12}$$

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{-x^4 + 26x^2 - 25}}{12}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{-x^4 + 26x^2 - 25}$$

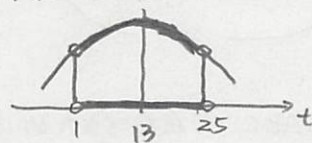


$$-x^4 + 26x^2 - 25 = -t^2 + 26t - 25$$

$$= -(t-13)^2 + 144 = f(t) \quad \text{とおく}$$

(頂点, (13, 144))

(軸:  $t=13$ , 上に凸)



$t=13$  のとき  $f(t)$  は最大

このとき  $S(\triangle ABC)$  も最大 となり

$$x^2 = 13 \quad \text{かつ} \quad 1 < x < 5 \quad \text{より}$$

$$\underline{\underline{x = \sqrt{13}}}$$

(∠ACB が最大)

余弦定理より

$$4 = x^2 + 9 - 2 \times x \times 3 \times \cos \angle ACB.$$

$$6x \cos \angle ACB = x^2 + 5$$

$$x \neq 0 \quad \text{より}$$

$$\cos \angle ACB = \frac{x^2 + 5}{6x} = \frac{x}{6} + \frac{5}{6x}$$

$$x > 0 \quad \text{なので}$$

$$\frac{x}{6} > 0, \quad \frac{5}{6x} > 0 \quad \text{なので}$$

$$(相加) \geq (相乗) \quad \text{より}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{5}{6x} \geq 2 \sqrt{\frac{x}{6} \cdot \frac{5}{6x}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos \angle ACB \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$0 < \angle ACB < 180^\circ \quad \text{なので}$$

$$\cos \angle ACB \quad \text{が最小のとき}$$

$$\angle ACB \quad \text{は最大 となる.}$$

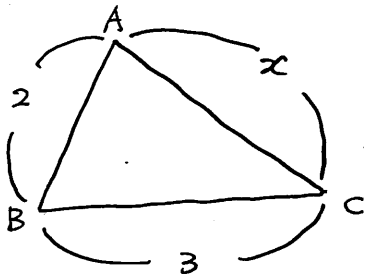
$$\left( \begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ \frac{x}{6} = \frac{5}{6x} \quad \text{かつ} \quad 1 < x < 5 \\ \text{つまり} \quad x = \sqrt{5} \quad \text{なので} \end{array} \right)$$

よって

$$\underline{\underline{x = \sqrt{5}}}$$

(裏に続く)

解法2



$\triangle ABC$  が存在するためには  
 $1 < x < 5$  である。

( $\triangle ABC$  の面積 が最大)

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin B$$

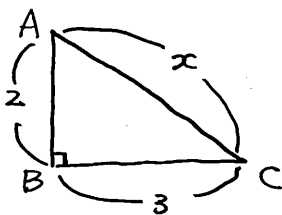
$$= 3 \sin B$$

$$\left( \begin{array}{l} 0 < B < \pi \text{ なる } \angle \\ 0 < \sin B \leq 1 \\ 0 < 3 \sin B \leq 3 \\ 0 < S(\triangle ABC) \leq 3 \end{array} \right)$$

$S(\triangle ABC) = 3$  となるのは

$$\sin B = 1$$

つまり  $B = \frac{\pi}{2}$  のとき



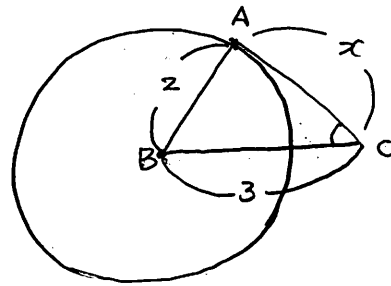
三平方の定理より

$$x^2 = 4 + 9 = 13$$

$x > 0$  より

$$\underline{x = \sqrt{13}} \quad (1 < x < 5 \text{ を満たす})$$

( $\angle ACB$  が最大)



$\angle ACB$  が最大 となるのは  
 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$  となるときである。

このとき

三平方の定理より

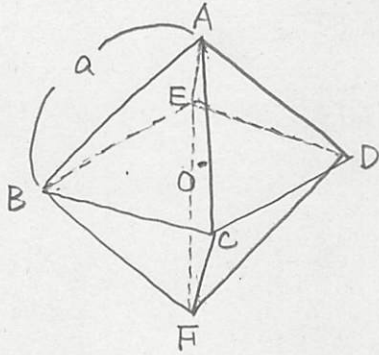
$$9 = 4 + x^2$$

$$x^2 = 5$$

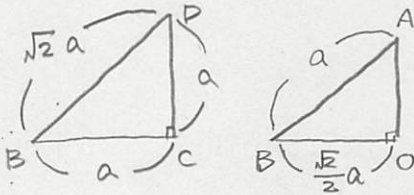
$x > 0$  より

$$\underline{x = \sqrt{5}} \quad (1 < x < 5 \text{ を満たす})$$

1辺の長さが  $a$  の正八面体の体積と、この正八面体に外接する球、内接する球の半径を求めよ。



図のように点  $O, A, B, C, D, E, F$  をとる。ただし、点  $O$  は正方形  $BCDE$  の対角線の交点である。



$\triangle ABO$  で三平方の定理より

$$a^2 = \frac{1}{2}a^2 + AO^2$$

$$AO^2 = \frac{1}{2}a^2$$

$AO > 0, a > 0$  なので

$$AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$V(ABCDEF) = 2V(ABCDE)$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times a^2 \times \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

外接球は各頂点で接するので

半径  $= OA$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}$$

### 解法1

(2012 名古屋市立大)

内接球は各面で接するので

半径  $r$  とおくと、対称性から

$$V(ABCDEF) = 8V(OABC)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3 = 8 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times r$$

$$2\sqrt{3}a^2r = \sqrt{2}a^3$$

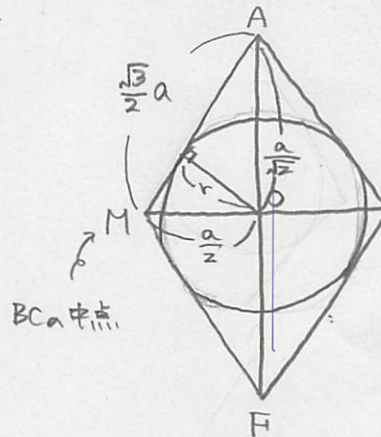
$$r = \frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}a}{6}$$

### 解法2

内接球について、接点を含む

平面で切ると



$\triangle OAM$  の面積について、

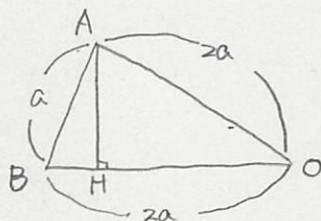
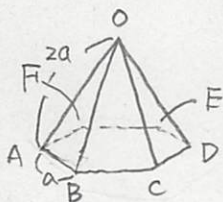
$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times r = \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}ar = \frac{\sqrt{2}}{8}a^2$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}a$$

$$= \frac{\sqrt{6}a}{6}$$

底面が正六角形  $ABCDEF$  で頂点が  $O$  の正六角錐  $O-ABCDEF$  があり、 $AB=a$ 、 $OA=2a$  であるとする。2つの面  $\triangle OAB$  と  $\triangle OBC$  のなす角を  $\theta$  とするとき、 $\cos \theta$  の値を求めよ。  
(2010 早稲田大)



$$S = \frac{a+2a+2a}{2} = \frac{5}{2}a$$

△OAB の面積を求めよう

$$S(\triangle OAB) = \sqrt{\frac{5}{2}a \times \frac{3}{2}a \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2}} \\ = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2$$

一方

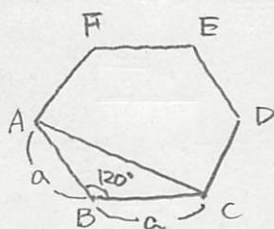
$$S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \times 2a \times AH$$

$$= aAH$$

よって

$$aAH = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2$$

$$AH = \frac{\sqrt{15}}{4}a$$



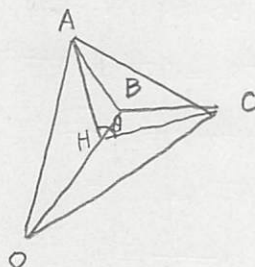
△ABC で余弦定理より

$$AC^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cos 120^\circ$$

$$AC^2 = 3a^2$$

$$AC > 0, a > 0 \text{ より}$$

$$AC = \sqrt{3}a$$



△AHC で余弦定理より

$$3a^2 = \frac{15}{16}a^2 + \frac{15}{16}a^2 - 2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}a \times \frac{\sqrt{15}}{4}a \cos \theta$$

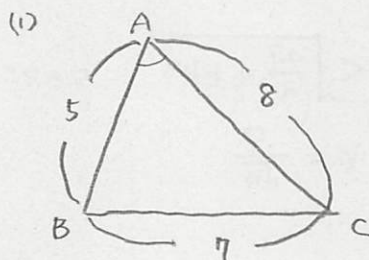
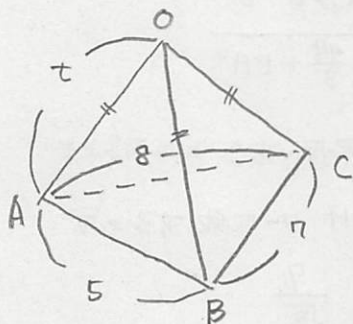
$$3a^2 = \frac{15}{8}a^2 - \frac{15}{8}a^2 \cos \theta$$

$$\frac{15}{8}a^2 \cos \theta = -\frac{9}{8}a^2$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}$$

AB=5, BC=7, CA=8, OA=OB=OC=t を満たす四面体 OABC がある。

- (1)  $\angle BAC$  を求めよ。
- (2)  $\triangle ABC$  の外接円の半径を求めよ。
- (3) 4つの頂点 O, A, B, C が同一球面上にあるとき, その球の半径が最小になるような実数 t の値を求めよ。



$\triangle ABC$  で余弦定理より

$$49 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos \angle BAC$$

$$80 \cos \angle BAC = 40$$

$$\cos \angle BAC = \frac{1}{2}$$

$0 < \angle BAC < \pi$  であるから

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$$

(2)  $\triangle ABC$  で正弦定理より

外接円の半径 R とし

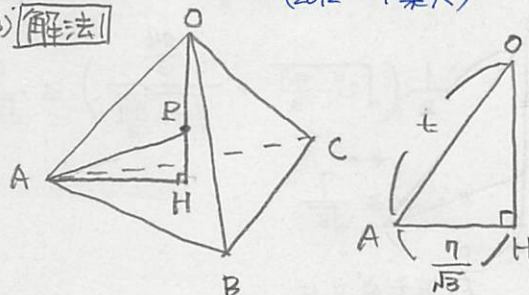
$$2R = \frac{7}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

$$\sqrt{3}R = 7$$

$$R = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

(3) 解法1

(2012 千葉大)



点 O から平面 ABC に下ろした垂線

× 足 H とすると  $\triangle OAH \cong \triangle OBH \cong \triangle OCH$

となるから  $AH = BH = CH$  となる。

点 H は  $\triangle ABC$  の外心に一致する。

外接球の中心 P とおくと直線 OH 上に存在する。

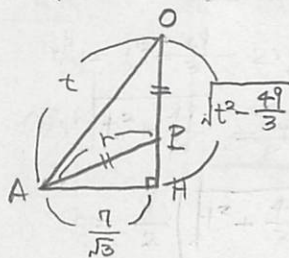
$OP = AP = r$  とおく。 ———— (\*)

$\triangle OAH$  で三平方の定理より

$$OH = \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} \quad (t > \frac{7}{\sqrt{3}})$$

(i)  $r \leq OH$  のとき

$$(\text{つまり}) \quad r \leq \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} \quad \text{のとき}$$



$\triangle PAH$  で三平方の定理より

$$r^2 = \frac{49}{3} + \left( \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} - r \right)^2$$

$$r^2 = \frac{49}{3} + t^2 - \frac{49}{3} - 2r \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} + r^2$$

$$2r \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} = t^2 - \frac{49}{3} + \frac{49}{3}$$

$$r = \frac{1}{2} \left( \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} + \frac{\frac{49}{3}}{\sqrt{t^2 - \frac{49}{3}}} \right)$$

(裏に続く)

$$\sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} > 0, \frac{\frac{49}{3}}{\sqrt{t^2 - \frac{49}{3}}} > 0 \quad \text{なら}$$

(相加)  $\geq$  (相乗)

$$\sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} + \frac{\frac{49}{3}}{\sqrt{t^2 - \frac{49}{3}}} \geq 2\sqrt{\frac{49}{3}}$$

$$\frac{1}{2} \left( \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} + \frac{\frac{49}{3}}{\sqrt{t^2 - \frac{49}{3}}} \right) \geq \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$r \geq \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} = \frac{\frac{49}{3}}{\sqrt{t^2 - \frac{49}{3}}} \quad \text{なとき} \\ \text{より} \quad t = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{6}}{3} \quad \text{なとき} \end{array} \right)$$

このとき

$$r \leq \sqrt{t^2 - \frac{49}{3}} \quad \text{を満足し}$$

点 P と点 H は一致している。

$$\text{よって} \quad \min r = \frac{7}{\sqrt{3}} \quad \left( t = \frac{7\sqrt{6}}{3} \right)$$

(ii)  $r > OH$  なとき

$$r > AH = \frac{7}{\sqrt{3}} \quad \text{である。}$$

(i), (ii) より

$$\underline{t = \frac{7\sqrt{6}}{3}}$$

## 解法2 (※ 以降)

(i) 点 P が平面 ABC 上にないとき

$\triangle PAH$  で  $\angle PHA = 90^\circ$  より

$$AP^2 = AH^2 + PH^2$$

$$AP = r > 0 \quad \text{より}$$

$$r = \sqrt{\frac{49}{3} + PH^2}$$

(ii) 点 P が平面 ABC 上にあるとき

2点 P, H は一致するので

$$r = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

(i), (ii) で

$$\frac{7}{\sqrt{3}} < \sqrt{\frac{49}{3} + PH^2} \quad \text{なら}$$

$$\min r = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

このとき

$\triangle OAP$  ( $\triangle OAH$ ) は

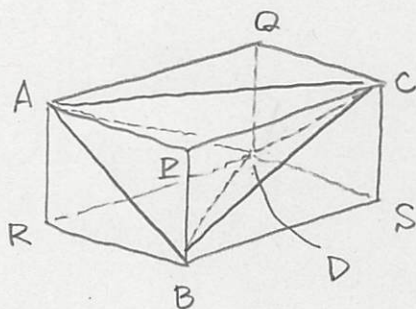
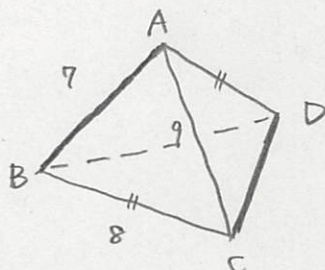
$OP = AP$  なる 直角二等辺三角形

よって

$$t = \frac{7}{\sqrt{3}} \times \sqrt{2} = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{6}}{3}}}$$

四面体 ABCD は、4 つの面のどれも 3 辺の長さが 7, 8, 9 の三角形である。この四面体 ABCD の体積を求めよ。

(2014 早稲田大)



四面体 ABCD は、直方体 APCQ-RBSD  
の中に埋め込まれる。

$AP = x, AQ = y, AR = z$  とおくと

三平方の定理より

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 81 \\ y^2 + z^2 = 64 \\ z^2 + x^2 = 49 \end{cases} \quad \text{--- ①}$$

辺々を和をとると

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = 194$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 97$$

① とあわせて

$$x^2 = 33, y^2 = 48, z^2 = 16$$

$x > 0, y > 0, z > 0$  より

$$x = \sqrt{33}, y = 4\sqrt{3}, z = 4$$

$V(ABCD)$

$$= V(APCQ-RBSD) - V(PABC)$$

$$- V(QADC) - V(RABD) - V(SBCD)$$

$$= \sqrt{33} \times 4\sqrt{3} \times 4 - \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times \sqrt{33} \times 4\sqrt{3} \right) \times 4 \times 4$$

$$= 48\sqrt{11} - \frac{2}{3} \times 48\sqrt{11}$$

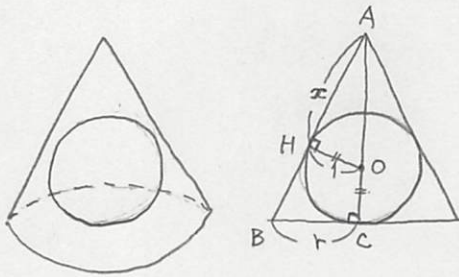
$$= \underline{\underline{16\sqrt{11}}}$$

半径1の球が直円錐に内接している。この直円錐の底面の半径を $r$ とし、表面積を $S$ とする。

- (1)  $S$ を $r$ を用いて表せ。  
 (2)  $S$ の最小値を求めよ。

(2014 一橋大)

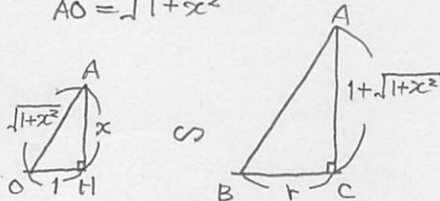
(1)



図のように

点 $A, B, C, O, H$ を定める。 $AH = x$  とおくと、 $\triangle AHO$ で、 $\triangle AHO \sim \triangle ABC$  より

$$AO = \sqrt{1+x^2}$$



$$1:x = r:(1+\sqrt{1+x^2})$$

$$rx = 1 + \sqrt{1+x^2}$$

$$rx - 1 = \sqrt{1+x^2}$$

両辺ともに正であり、

両辺 2乗して

$$r^2x^2 - 2rx + 1 = 1 + x^2$$

$$(r^2-1)x^2 - 2rx = 0$$

 $x \neq 0$  より

$$(r^2-1)x = 2r$$

 $r \neq \pm 1$  より  $r^2-1 \neq 0$ 

$$x = \frac{2r}{r^2-1}$$

よって

$$\begin{aligned} AB &= r\sqrt{1+x^2} \\ &= r\sqrt{1+\frac{4r^2}{(r^2-1)^2}} \\ &= r\sqrt{\frac{r^4+2r^2+1}{(r^2-1)^2}} \\ &= r\left|\frac{r^2+1}{r^2-1}\right| \\ &= \frac{r^3+r}{r^2-1} \end{aligned}$$

$$\widehat{BB} = AB\theta = 2\pi r \quad \text{だから}$$

$$\theta = \frac{2\pi r}{AB}$$

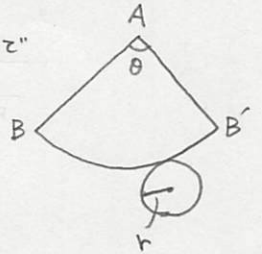
よって

$$S = \frac{1}{2} AB^2\theta + \pi r^2$$

$$= \pi r AB + \pi r^2$$

$$= \frac{\pi(r^4+r^2)}{r^2-1} + \pi r^2$$

$$= \frac{2\pi r^4}{r^2-1}$$



(2)

$$S = 2\pi \times \frac{r^4-1+1}{r^2-1}$$

$$= 2\pi \left( r^2+1 + \frac{1}{r^2-1} \right)$$

$$= 2\pi \left( r^2-1 + \frac{1}{r^2-1} + 2 \right)$$

ここで

$$r > 1 \text{ より } r^2-1 > 0 \quad \text{だから}$$

(相加)  $\geq$  (相乗) より

$$r^2-1 + \frac{1}{r^2-1} \geq 2\sqrt{(r^2-1) \times \frac{1}{r^2-1}}$$

$$r^2-1 + \frac{1}{r^2-1} + 2 \geq 2+2$$

$$2\pi \left( r^2-1 + \frac{1}{r^2-1} + 2 \right) \geq 8\pi$$

よって

$$S \geq 8\pi$$

等号成立は

$$r^2-1 = \frac{1}{r^2-1} \quad \text{かつ } r > 1 \quad \text{だから}$$

つまり

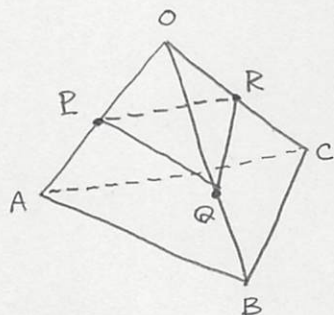
$$r = \sqrt{2} \quad \text{だから}$$

よって

$$\min S = 8\pi$$

正四面体OABCにおいて、点P, Q, Rをそれぞれ辺OA, OB, OC上にとる。ただしP, Q, Rは四面体OABCの頂点とは異なるとする。 $\triangle PQR$ が正三角形ならば、3辺PQ, QR, RPはそれぞれ3辺AB, BC, CAに平行であることを証明せよ。

(2012 京都大)



(証明)

正四面体OABCの1辺の長さを1

としても一般性を失わない

$$OP = p, OQ = q, OR = r$$

$$(0 < p < 1, 0 < q < 1, 0 < r < 1)$$

とおく。

 $\triangle OPQ, \triangle OQR, \triangle ORP$ のそれぞれで

余弦定理より

$$\begin{cases} PQ^2 = p^2 + q^2 - pq \\ QR^2 = q^2 + r^2 - qr \\ RP^2 = r^2 + p^2 - rp \end{cases}$$

 $\triangle PQR$ が正三角形のとき

$$PQ = QR = RP \quad \text{となり}$$

$$PQ^2 = QR^2 = RP^2$$

$$\begin{cases} PQ^2 = QR^2 & \text{--- ①} \\ QR^2 = RP^2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

①より

$$p^2 + q^2 - pq = q^2 + r^2 - qr$$

$$p^2 - r^2 - pq + qr = 0$$

$$(p+r)(p-r) - q(p-r) = 0$$

$$(p-r)(p+r-q) = 0$$

よって

$$p = r \quad \text{または} \quad q = p + r$$

同様に ②より

$$p = q \quad \text{または} \quad r = p + q$$

$$(i) \quad p = r \quad \text{かつ} \quad p = q \quad \text{のとき}$$

$$p = q = r \quad \text{となり}$$

$$OP = OQ = OR$$

よって

$$PQ \parallel AB, QR \parallel BC, RP \parallel CA$$

$$(ii) \quad p = r \quad \text{かつ} \quad r = p + q \quad \text{のとき}$$

$$q = 0 \quad \text{となり}$$

$$0 < q < 1 \quad \text{に不合理}$$

$$(iii) \quad q = p + r \quad \text{かつ} \quad p = q \quad \text{のとき}$$

$$r = 0 \quad \text{となり}$$

$$0 < r < 1 \quad \text{に不合理}$$

$$(iv) \quad q = p + r \quad \text{かつ} \quad r = p + q \quad \text{のとき}$$

$$p = 0 \quad \text{となり}$$

$$0 < p < 1 \quad \text{に不合理}$$

(i) ~ (iv) より

 $\triangle PQR$ が正三角形のとき

$$OP = OQ = OR \quad \text{となり}$$

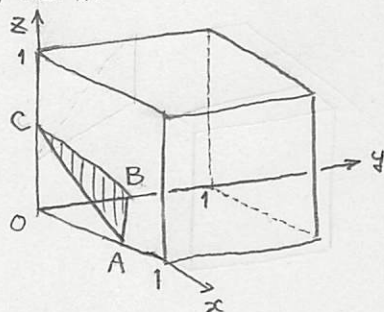
$$PQ \parallel AB, QR \parallel BC, RP \parallel CA \quad \blacksquare$$

1辺の長さが1の立方体について考える。

- (1) 立方体を1枚の平面で切断したときの切り口が三角形であるとき、その三角形は鋭角三角形であることを示せ。  
 (2) 任意の鋭角三角形  $T$  に対して、立方体を1枚の平面で切断したときの切り口が  $T$  と相似になるような切り方が存在することを示せ。

(2011 京都府立医科大学)

(1) (証明)



図のように  $xyz$  空間上に、  
 1辺の長さが1の立方体を配置し  
 $A(a, 0, 0)$ ,  $B(0, b, 0)$ ,  $C(0, 0, c)$   
 $(0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1)$

とおくと

$$\begin{cases} AB^2 = a^2 + b^2 & \text{--- ①} \\ BC^2 = b^2 + c^2 & \text{--- ②} \\ CA^2 = c^2 + a^2 & \text{--- ③} \end{cases}$$

①+② より

$$AB^2 + BC^2 = a^2 + 2b^2 + c^2 > a^2 + c^2 = CA^2$$

②+③ より

$$BC^2 + CA^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 > a^2 + b^2 = AB^2$$

③+① より

$$CA^2 + AB^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 > b^2 + c^2 = BC^2$$

つまり

$$\begin{cases} AB^2 + BC^2 > CA^2 \\ BC^2 + CA^2 > AB^2 \\ CA^2 + AB^2 > BC^2 \end{cases}$$

が成り立つので

$\triangle ABC$  は 鋭角三角形 である。

よって

切り口が 三角形 のとき

その三角形は 鋭角三角形 である。

(2) (証明)

鋭角三角形  $T$  の 3辺の長さを

$\alpha, \beta, \gamma$  とおく。

$\triangle ABC$  の  $T$  となるための条件は

$$\frac{AB}{\alpha} = \frac{BC}{\beta} = \frac{CA}{\gamma}$$

つまり

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{\beta} = \frac{\sqrt{c^2 + a^2}}{\gamma} (=k > 0)$$

であり

$$a^2 + b^2 = k^2 \alpha^2 \quad \text{--- ④}$$

$$b^2 + c^2 = k^2 \beta^2 \quad \text{--- ⑤}$$

$$c^2 + a^2 = k^2 \gamma^2 \quad \text{--- ⑥}$$

①+②+③ より

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad \text{--- ⑦}$$

⑦ - ④  $\times 2$  より

$$2c^2 = k^2(\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2)$$

$T$  は 鋭角三角形 であるので  $\beta^2 + \gamma^2 > \alpha^2$

$$\text{よって } c = k \sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2}}$$

同様に

$$a = k \sqrt{\frac{\gamma^2 + \alpha^2 - \beta^2}{2}}$$

$$b = k \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2}}$$

ここで

$$k = \sqrt{\frac{2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, & b = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}, \\ c = \sqrt{\frac{-\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} \end{cases}$$

となり

$$0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$$

を満たす。

つまり、任意の鋭角三角形  $T$  の  $\triangle ABC$  となるような切り方が存在する。