

次の方程式、不等式を解け。

(1) $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき, $2\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\cos(\theta + \pi) + 1 = 0$

(2) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, $\cos 2\theta + \cos \theta + 1 = 0$

(3) $0 < \theta < 2\pi$ のとき, $\sin 2\theta > \cos \theta$

(1)

$$2\cos^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\cos(\theta + \pi) + 1 = 0$$

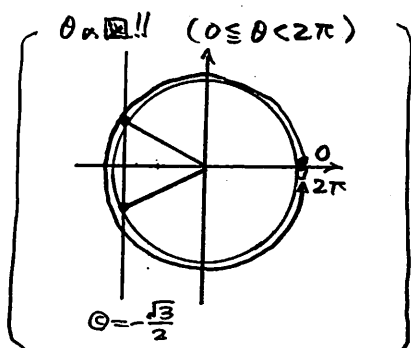
$$2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$$

$$2(1 - \cos^2\theta) + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$$

$$2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta - 3 = 0$$

$$(2\cos\theta + \sqrt{3})(\cos\theta - \sqrt{3}) = 0$$

$$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}$$



$$\underline{\underline{\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi}}$$

(3)

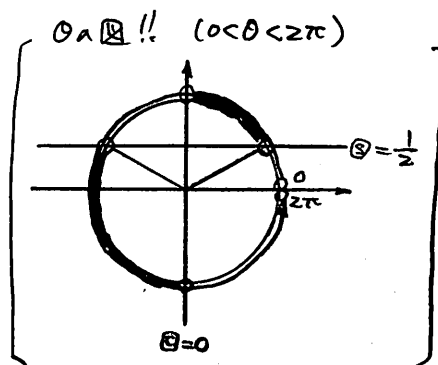
$$\sin 2\theta > \cos \theta$$

$$2\sin\theta\cos\theta > \cos\theta$$

$$\cos\theta(2\sin\theta - 1) > 0$$

$$\begin{cases} \cos\theta > 0 \\ 2\sin\theta - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \cos\theta < 0 \\ 2\sin\theta - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta > 0 \\ \sin\theta > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \cos\theta < 0 \\ \sin\theta < \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\underline{\underline{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi}}$$

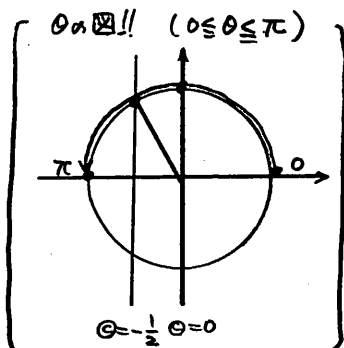
(2)

$$\cos 2\theta + \cos \theta + 1 = 0$$

$$2\cos^2\theta - 1 + \cos\theta + 1 = 0$$

$$\cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0$$

$$\cos\theta = 0, -\frac{1}{2}$$



$$\underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi}}$$

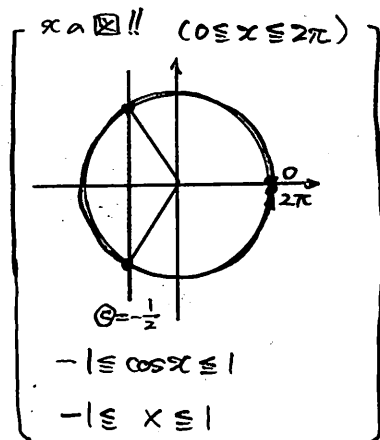
$y = \cos 2x + 2\cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$$y = \cos 2x + 2\cos x$$

$$= 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x$$

$$= 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$$

$$\cos x = X \quad \text{とおく}$$

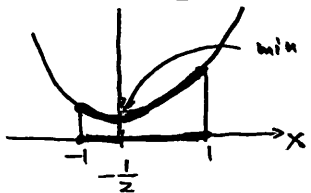


$$y = 2X^2 + 2X - 1$$

$$= 2\left(X + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

$$\text{頂点} \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$\text{軸: } X = -\frac{1}{2}, \text{ 下に凸}$$



$$\min = -\frac{3}{2} \quad (X = -\frac{1}{2})$$

つまり

$$\min = -\frac{3}{2} \quad (x = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi)$$

(1) 不等式 $\sin 2x + \sin x - \cos x > \frac{1}{2}$ を解け。ただし, $0 \leq x < 2\pi$ とする。

(2011 関西大)

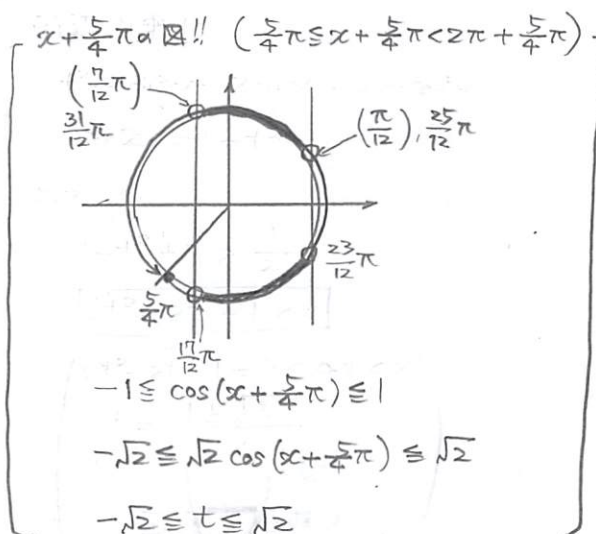
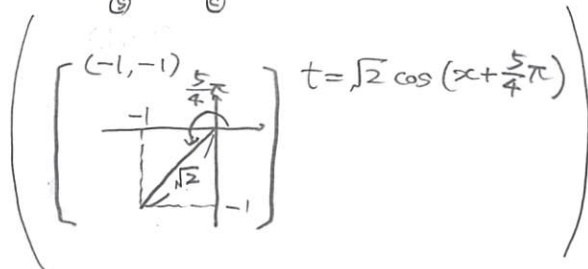
(2) 方程式 $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$ を解け。ただし, $0 \leq x < \pi$ とする。

(類 2015 福岡大)

(1) 解法1

$$\sin 2x + \sin x - \cos x > \frac{1}{2}$$

$$t = \sin x - \cos x \quad \text{とおく}$$



両辺 2乗して

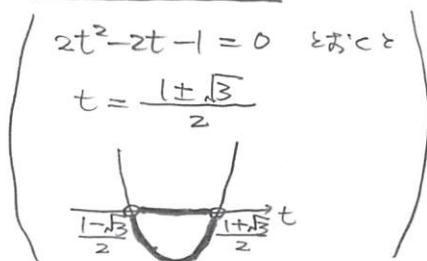
$$t^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$\sin 2x = 1 - t^2$$

よって, 与不等式は

$$1 - t^2 + t > \frac{1}{2}$$

$$2t^2 - 2t - 1 < 0$$



$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < t < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \quad \text{よって}$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < t < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1 - \sqrt{3}}{2} < \sqrt{2} \cos(x + \frac{5}{4}\pi) < \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} < \cos(x + \frac{5}{4}\pi) < \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

よって

$$\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{7}{12}\pi = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\cos(-\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\frac{17}{12}\pi < x + \frac{5}{4}\pi < \frac{23}{12}\pi, \frac{25}{12}\pi < x + \frac{5}{4}\pi < \frac{31}{12}\pi$$

$$\frac{\pi}{6} < x < \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi < x < \frac{4}{3}\pi$$

(2)

$$\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$$

$$4\cos^3 x - 3\cos x - 2(2\cos^2 x - 1) + \cos x = 0$$

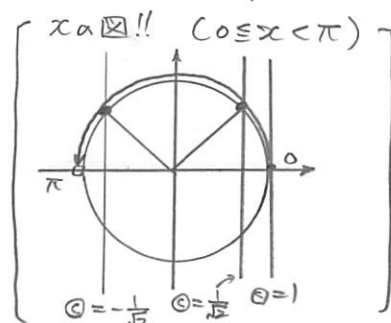
$$4\cos^3 x - 4\cos^2 x - 2\cos x + 2 = 0$$

$$2\cos^3 x - 2\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 & -1 & 1 \\ & 2 & 0 & -1 \\ & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\cos x - 1)(2\cos^2 x - 1) = 0$$

$$\cos x = 1, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

(1) 解法 2

$$\sin 2x + \sin x - \cos x > \frac{1}{2}$$

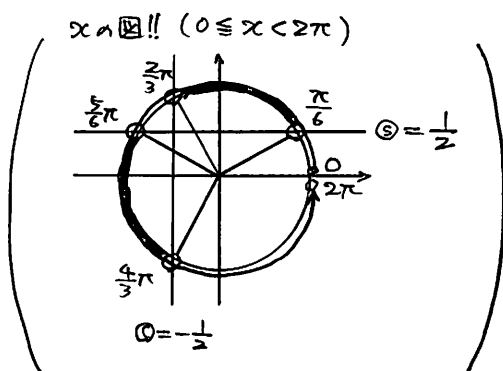
$$2\sin x \cos x + \sin x - \cos x - \frac{1}{2} > 0$$

$$4\sin x \cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 > 0$$

$$(2\sin x - 1)(2\cos x + 1) > 0$$

$$\begin{cases} 2\sin x - 1 > 0 \\ 2\cos x + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 2\sin x - 1 < 0 \\ 2\cos x + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > \frac{1}{2} \\ \cos x > -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \sin x < \frac{1}{2} \\ \cos x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$



$$\underline{\underline{\frac{\pi}{6} < x < \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi < x < \frac{4}{3}\pi}}$$

(2) 解法 2

$$\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$$

$$2\cos 2x \cos x - 2\cos 2x = 0$$

$$2\cos 2x (\cos x - 1) = 0$$

$$\cos 2x = 0 \quad \text{or} \quad \cos x = 1$$

$$0 \leq x < \pi \quad \text{or} \quad 0 \leq 2x < 2\pi$$

1) π

$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \quad x = 0$$

2) π

$$\underline{\underline{x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi}}$$

k を正の実数とし、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ とする。2次方程式 $8x^2 - 12kx + 3k^2 + 8 = 0$ が $\sin \theta + 2\cos \theta$, $2\sin \theta + \cos \theta$ を解にもつとき、 k の値を求めよ。また、そのときの $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めよ。 (2017 首都大学東京)

$$(\sin \theta + 2\cos \theta) + (2\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= 3\sin \theta + 3\cos \theta$$

$$(\sin \theta + 2\cos \theta)(2\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= 2\sin^2 \theta + 5\sin \theta \cos \theta + 2\cos^2 \theta$$

$$= 5\sin \theta \cos \theta + 2$$

解と係数の関係より

$$\begin{cases} 3\sin \theta + 3\cos \theta = \frac{12}{8}k \\ 5\sin \theta \cos \theta + 2 = \frac{3k^2 + 8}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}k & \text{--- ①} \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{3k^2 - 8}{40} & \text{--- ②} \end{cases}$$

① の両辺に ② を乗して

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}k^2$$

$$1 + \frac{3k^2 - 8}{20} = \frac{1}{4}k^2 \quad (\because ② \text{ より})$$

$$20 + 3k^2 - 8 = 5k^2$$

$$2k^2 = 12$$

$$k^2 = 6$$

$k > 0$ より

$$\underline{k = \sqrt{6}}$$

このとき、①、② は

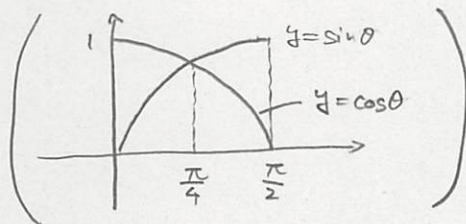
$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$\sin \theta$ と $\cos \theta$ を解にもつ2次方程式は

$$x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$4x^2 - 2\sqrt{6}x + 1 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$$



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ で}$$

$$\cos \theta \geq \sin \theta \quad \text{となる}$$

$$\underline{\underline{\sin \theta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \cos \theta = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}}$$

$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$ のとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。
 (2) 一般に, $\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x+y)\cos(x-y)$ が成り立つことを示せ。
 (3) $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

(2006 和歌山大)

(1)

$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$$

α 両辺を 2 乗して

$$\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \text{--- ①}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$$

α 両辺を 2 乗して

$$\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{1}{9} \quad \text{--- ②}$$

①+② より

$$2 + 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \frac{13}{36}$$

$$2\cos(\alpha - \beta) = -\frac{59}{36}$$

$$\underline{\underline{\cos(\alpha - \beta) = -\frac{59}{72}}}$$

(2)

証明

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$+ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \cos \beta$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{=: } \tau'' \\ \alpha + \beta = 2x, \quad \alpha - \beta = 2y \quad \text{と置く} \\ \alpha = x + y, \quad \beta = x - y \end{array} \right)$$

よって

$$\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x+y)\cos(x-y)$$

(3)

① - ② より

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \\ + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha + 2\cos(\alpha + \beta) + \cos 2\beta = \frac{5}{36}$$

よって

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{5}{36} - 2\cos(\alpha + \beta)$$

(2) τ''

$$x = \alpha, \quad y = \beta \quad \text{と置く}$$

$$\cos 2x + \cos 2y = 2\cos(x+y)\cos(x-y)$$

たの τ''

$$\frac{5}{36} - 2\cos(\alpha + \beta) = 2\cos(\alpha + \beta) \times \left(-\frac{59}{72}\right)$$

$$\frac{13}{36} \cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{36}$$

$$\underline{\underline{\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13}}}$$

a を定数とし, $f(x) = \cos^2 x + 2a \sin x + 4a^2$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$) とする。

(1) 定数 a の値を場合分けして, $f(x)$ の最大値を求めよ。

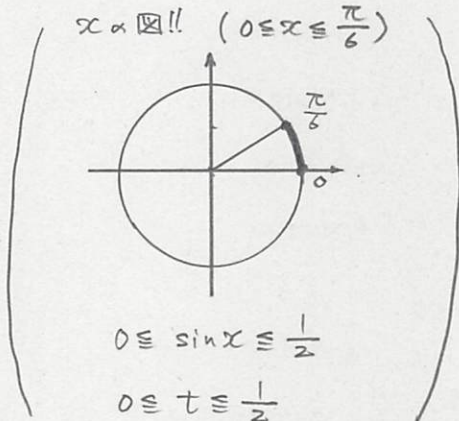
(2) $f(x)$ の最大値が 2 となるときの, $f(x) = 2$ を満たす x に対する $\tan x$ の値を求めよ。 (2007 山口大)

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos^2 x + 2a \sin x + 4a^2 \\ &= 1 - \sin^2 x + 2a \sin x + 4a^2 \\ &= -\sin^2 x + 2a \sin x + 4a^2 + 1 \end{aligned}$$

$\sin x = t$ とおく

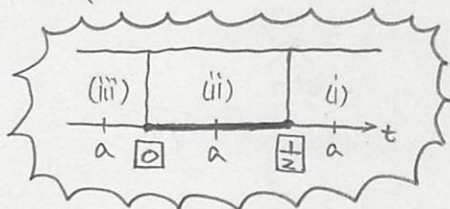
$x \propto \square!!$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$)



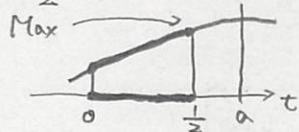
$$\begin{aligned} f(x) &= -t^2 + 2at + 4a^2 + 1 \\ &= -(t-a)^2 + 5a^2 + 1 \end{aligned}$$

とおく。

(頂点 $(a, 5a^2+1)$)
(軸: $t=a$, 上に $\square$)

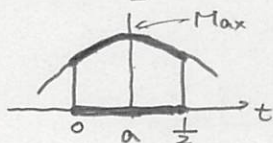


(i) $\frac{1}{2} \leq a$ a とき



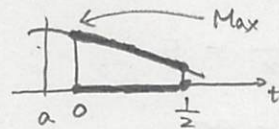
$$\text{Max} = 4a^2 + a + \frac{3}{4} \quad (t = \frac{1}{2})$$

(ii) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ a とき



$$\text{Max} = 5a^2 + 1 \quad (t = a)$$

(iii) $a \leq 0$ a とき



$$\text{Max} = 4a^2 + 1 \quad (t = 0)$$

(i) ~ (iii) より

$$\text{Max} = \begin{cases} 4a^2 + a + \frac{3}{4} & (\frac{1}{2} \leq a \text{ とき}) \\ 5a^2 + 1 & (0 \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ とき}) \\ 4a^2 + 1 & (a \leq 0 \text{ とき}) \end{cases}$$

(2)

(i) $\frac{1}{2} \leq a$ a とき

$$4a^2 + a + \frac{3}{4} = 2 \quad \text{より}$$

$$4a^2 + a - \frac{5}{4} = 0$$

$$16a^2 + 4a - 5 = 0$$

$$a = \frac{-2 \pm 2\sqrt{21}}{16} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{8}$$

$\frac{1}{2} \leq a$ より 不適

(ii) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ a とき

$$5a^2 + 1 = 2$$

$$a^2 = \frac{1}{5}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ より

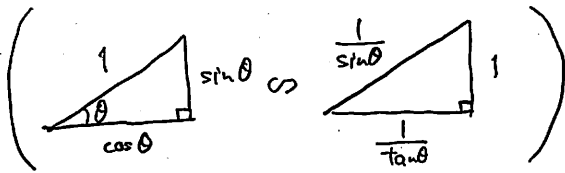
$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

a とき

$$t = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{であり}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(裏に続く)



$$1 + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \quad \text{to } a \text{ とき}$$

$$1 + \frac{1}{\tan^2 x} = 5$$

$$\frac{1}{\tan^2 x} = 4$$

$$\tan^2 x = \frac{1}{4}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ とき } 0 \leq \tan x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ とき}$$

$$\tan x = \frac{1}{2}$$

$$(iii) a \leq 0 \text{ とき}$$

$$4a^2 + 1 = 2$$

$$a^2 = \frac{1}{4}$$

$$a = \pm \frac{1}{2}$$

$$a \leq 0 \text{ より}$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$= a \text{ とき}$$

$$t = 0 \text{ とき}$$

$$\sin x = 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ より } x = 0$$

$$= a \text{ とき}$$

$$\tan x = 0$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より}$$

$$\begin{cases} \tan x = 0 & (a = -\frac{1}{2} \text{ とき}) \\ \tan x = \frac{1}{2} & (a = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ とき}) \end{cases}$$

(1) $\tan \frac{x}{2} = m$ とするとき, 等式 $\sin x = \frac{2m}{1+m^2}$, $\cos x = \frac{1-m^2}{1+m^2}$ が成り立つことを示せ。

(2) $-\pi < x < \frac{\pi}{2}$ のとき, 不等式 $\sin x + \cos x \geq \tan \frac{x}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2015 徳島大)

(1) 証明

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1}$$

$$= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2m}{1+m^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$= \cos^2 \frac{x}{2} (1 - \tan^2 \frac{x}{2})$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

(2) 証明

(左辺) - (右辺)

$$= \sin x + \cos x - \tan \frac{x}{2}$$

$$= \frac{2m}{1+m^2} + \frac{1-m^2}{1+m^2} - m \quad (\tan \frac{x}{2} = m \text{ とおいた})$$

$$= \frac{2m + 1 - m^2 - m - m^3}{1+m^2}$$

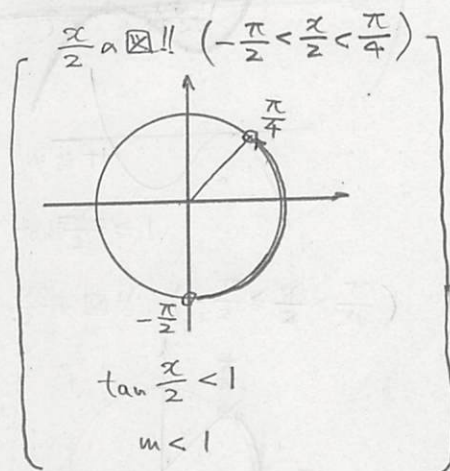
$$= \frac{-m^3 - m^2 + m + 1}{1+m^2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ & & -1 & -2 & -1 \\ & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \frac{-(m+1)(m^2+2m+1)}{1+m^2}$$

$$= \frac{-(m+1)(m+1)^2}{m^2+1} = f(m)$$

とおくと



このとき

$$f(m) = \frac{(1-m)(m+1)^2}{m^2+1} \geq 0$$

よって (左辺) $\geq$ (右辺)

つまり

$$\sin x + \cos x \geq \tan \frac{x}{2}$$

は成り立つ。

等号成立は

$$\left(\begin{array}{l} m = -1 \quad \text{aとき} \\ \text{つまり} \\ x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{aとき} \end{array} \right)$$

△ABCにおいて、∠A, ∠B, ∠Cの大きさをそれぞれA, B, Cとする。tan A, tan B, tan C がすべて整数で、 $A < B < C$ であるとき

- (1) $\tan(B+C)$ を tan A を用いて表せ。
- (2) $C < 90^\circ$ を示せ。
- (3) tan A, tan B, tan C の組をすべて求めよ。

(2017 長根大)

(1)

$$\begin{aligned}\tan(B+C) &= \tan(180^\circ - A) \\ &= -\tan A\end{aligned}$$

(2) 証明1

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \tan(180^\circ - C) \\ &= -\tan C \quad \text{よって}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan C &= -\tan(A+B) \\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= \frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ A < B < C \quad \text{よって} \\ A < B < 90^\circ \\ \text{つまり} \quad \tan A > 0, \tan B > 0 \\ \text{さらに} \quad \tan A, \tan B \in \mathbb{Z} \quad \text{よって} \\ \tan A \tan B - 1 > 0 \end{array} \right)$$

よって

$$\tan C > 0$$

つまり

$$C < 90^\circ \quad \text{である。} \quad \blacksquare$$

(3) 解法1

$$0 < \tan A < \tan B < \tan C$$

$$\tan A, \tan B, \tan C \in \mathbb{Z} \quad \text{よって}$$

$$\tan C \geq 3$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{\tan A \tan B - 1} \geq 3$$

$$\tan A \tan B - 1 > 0 \quad \text{よって}$$

$$\tan A + \tan B \geq 3 \tan A \tan B - 3$$

$$3 \tan A \tan B - \tan A - \tan B \leq 3$$

$$\left(\begin{array}{cc} & \tan B - \frac{1}{3} \\ 3 \tan A & \begin{array}{|c|c|} \hline 3 \tan A \tan B & -\tan A \\ \hline -\tan B & \frac{1}{3} \\ \hline \end{array} \end{array} \right) \begin{array}{l} +\frac{1}{3} \downarrow \\ \\ \end{array} \downarrow +\frac{1}{3}$$

$$(3 \tan A - 1) \left(\tan B - \frac{1}{3} \right) \leq \frac{10}{3}$$

$$(3 \tan A - 1)(3 \tan B - 1) \leq 10$$

$$\left(\begin{array}{l} 1 \leq \tan A < \tan B \quad \text{よって} \\ 2 \leq 3 \tan A - 1 < 3 \tan B - 1 \\ \text{また,} \\ 3 \tan A - 1, 3 \tan B - 1 \quad \text{は} \\ 3 \text{ で割って 2 余る数 である。} \end{array} \right)$$

よって

$$\begin{cases} 3 \tan A - 1 = 2 \\ 3 \tan B - 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan A = 1 \\ \tan B = 2 \end{cases}$$

よって

$$\tan C = \frac{1+2}{1 \times 2 - 1} = 3$$

よって

$$\underline{\underline{(\tan A, \tan B, \tan C) = (1, 2, 3)}}$$

(2) 証明2

$$A < B < C \quad \text{より}$$

$$A + B + C > A + A + A$$

$$180^\circ > 3A$$

$$\therefore 0^\circ < A < 60^\circ$$

∵ $A < 60^\circ$

$$0 < \tan A < \sqrt{3} \quad \text{であり} \quad \tan A \in \mathbb{Z} \quad \text{より}$$

$$\tan A = 1$$

$$\therefore A = 45^\circ$$

∵ $A < 60^\circ$

$$B + C > B + B$$

$$135^\circ > 2B$$

$$B < 67.5^\circ$$

$$B > A = 45^\circ \quad \text{とあわせて}$$

$$45^\circ < B < 67.5^\circ$$

$$C = 135^\circ - B \quad \text{であり}$$

$$-45^\circ > -B > -67.5^\circ$$

$$90^\circ > 135^\circ - B > 67.5^\circ$$

∴

$$67.5^\circ < C < 90^\circ$$

■

(3) 解法2

$$\tan(B+C) = \tan 135^\circ = -1 \quad \text{より}$$

$$\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -1$$

$$\tan B + \tan C = -1 + \tan B \tan C$$

$$\tan B \tan C - \tan B - \tan C = 1$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|cc} & \tan C & & -1 \\ \tan B & \tan B \tan C & & -\tan B \\ -1 & -\tan C & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ +1 \end{array} \end{array}$$

$$(\tan B - 1)(\tan C - 1) = 2$$

$$1 < \tan B < \tan C \quad \text{より}$$

$$0 < \tan B - 1 < \tan C - 1$$

∴

$$\begin{cases} \tan B - 1 = 1 \\ \tan C - 1 = 2 \end{cases} \quad \therefore \quad \underline{\underline{(\tan A, \tan B, \tan C) = (1, 2, 3)}}$$

△ABCの∠A, ∠B, ∠Cのそれぞれの大きさをA, B, Cとする。

(1) $\cos A + \cos B \leq 2\sin \frac{C}{2}$ を示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) $\cos A + \cos B + \cos C$ が最大となるときのA, B, Cを求めよ。

(2011 京都府立大)

(1) (証明)

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B &= 2\cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2\cos \frac{\pi-C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \right) \cos \frac{A-B}{2} \\ &= 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ -\pi < A-B < \pi \quad \text{より} \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{A-B}{2} < \frac{\pi}{2} \\ \text{よって} \\ \cos \frac{A-B}{2} \leq 1 \end{array} \right)$$

よって

$$\cos A + \cos B \leq 2\sin \frac{C}{2} \quad \blacksquare$$

等号成立は

$$\cos \frac{A-B}{2} = 1 \quad \text{aとき}$$

$$\text{つまり} \quad A=B \quad \text{aとき}$$

(2)

(1) より

$$\cos A + \cos B + \cos C$$

$$\leq 2\sin \frac{C}{2} + \cos C$$

$$= 2\sin \frac{C}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= -2\sin^2 \frac{C}{2} + 2\sin \frac{C}{2} + 1$$

$$= -2\left(\sin \frac{C}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

よって

$$\sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{aとき Max とする}$$

$$0 < C < \pi \quad \text{より}$$

$$0 < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \text{bとき}$$

$$\frac{C}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$C = \frac{\pi}{3}$$

つまり

$$\underline{\underline{A=B=C=\frac{\pi}{3}}}$$

p, q を自然数, α, β を $\tan \alpha = \frac{1}{p}, \tan \beta = \frac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき, $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ を満たす p, q の組 (p, q) をすべて求めよ。

(2017 京都大)

$$\tan(\alpha + 2\beta) = 2 \quad \text{より}$$

$$\frac{\tan \alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan \alpha \tan 2\beta} = 2$$

$$\tan \alpha + \tan 2\beta = 2 - 2 \tan \alpha \tan 2\beta$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ \tan 2\beta = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} \\ = \frac{\frac{2}{q}}{1 - \frac{1}{q^2}} \\ = \frac{2q}{q^2 - 1} \end{array} \right)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{2q}{q^2 - 1} = 2 - \frac{4q}{p(q^2 - 1)}$$

$$q^2 - 1 + 2pq = 2p(q^2 - 1) - 4q$$

$$q^2 - 1 + 2pq = 2pq^2 - 2p - 4q$$

$$(2q^2 - 2q - 2)p + (-q^2 - 4q + 1) = 0$$

$$2(q^2 - q - 1)p = q^2 + 4q - 1$$

$$q = 1 \quad \text{αとき}$$

$$2 \times (-1)p = 1 + 4 - 1$$

$$-2p = 4$$

$$p = -2$$

これは $p \in \mathbb{N}$ に不合理

よって

$$q \geq 2 \quad \text{であり}$$

このとき

$$q^2 - q - 1 = q(q - 1) - 1 \geq 1$$

$$p = \frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)}$$

$$p \in \mathbb{N} \quad \text{なので} \quad p \geq 1$$

$$\frac{q^2 + 4q - 1}{2(q^2 - q - 1)} \geq 1$$

$$q^2 + 4q - 1 \geq 2q^2 - 2q - 2$$

$$q^2 - 6q \leq 1$$

$$q(q - 6) \leq 1$$

これを満たす $q \geq 2$ は

$$q = 2, 3, 4, 5, 6$$

また

$$q^2 + 4q - 1 = q(q + 4) - 1$$

は 2 の倍数 であることが必要 であり

q と $q + 4$ は 偶奇が一致するから

q は 奇数

ゆえに $q = 3, 5$ であることが必要

$q = 3$ αとき

$$p = \frac{9 + 12 - 1}{2(9 - 3 - 1)} = \frac{20}{10} = 2 \in \mathbb{N}$$

$q = 5$ αとき

$$p = \frac{25 + 20 - 1}{2(25 - 5 - 1)} = \frac{44}{38} \notin \mathbb{N}$$

以上により

$$\underline{\underline{(p, q) = (2, 3)}}$$

(1) $\cos 5\theta = f(\cos \theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。(2) $\alpha = 18^\circ$ とするとき, $\cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha = \frac{5}{16}$ を示せ。

(1996 京都大)

(1)

$$\begin{aligned}
 \cos 5\theta &= \cos(4\theta + \theta) \\
 &= \cos 4\theta \cos \theta - \sin 4\theta \sin \theta \\
 &= (2\cos^2 2\theta - 1) \cos \theta - 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \sin \theta \\
 &= \{2(2\cos^2 \theta - 1)^2 - 1\} \cos \theta \\
 &\quad - 4 \sin^2 \theta \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) \\
 &= (8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1) \cos \theta \\
 &\quad - 4(1 - \cos^2 \theta) \cos \theta (2\cos^2 \theta - 1) \\
 &= 8\cos^5 \theta - 8\cos^3 \theta + \cos \theta \\
 &\quad + 8\cos^5 \theta - 12\cos^3 \theta + 4\cos \theta \\
 &= 16\cos^5 \theta - 20\cos^3 \theta + 5\cos \theta = f(\cos \theta)
 \end{aligned}$$

なので

$$\underline{f(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x}$$

チェビシェフ多項式の
典型問題です。

(2) (証明)

$$\begin{aligned}
 f(\cos \alpha) &= \cos 5\alpha = \cos 90^\circ = 0 \\
 f(\cos 3\alpha) &= \cos 15\alpha = 0 \\
 f(\cos 5\alpha) &= f(0) = 0 \\
 f(\cos 7\alpha) &= \cos 35\alpha = 0 \\
 f(\cos 9\alpha) &= \cos 45\alpha = 0
 \end{aligned}$$

であり、

$$\cos \alpha, \cos 3\alpha, \cos 5\alpha, \cos 7\alpha, \cos 9\alpha$$

は互いに相異なるので

$$f(x) = 0 \text{ の 5 つの解である。}$$

つまり

$$\begin{aligned}
 16x^5 - 20x^3 + 5x \\
 = (x - \cos \alpha)(x - \cos 3\alpha)(x - \cos 7\alpha)(x - \cos 9\alpha)
 \end{aligned}$$

を満たすので

$$\cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha = \frac{5}{16}$$