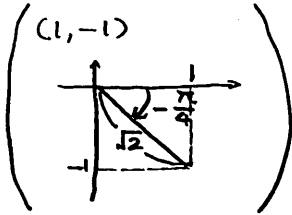
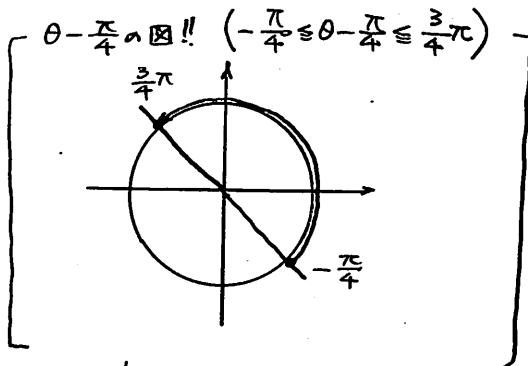


$0 \leq \theta \leq \pi$ とする。 $\sin \theta + \cos \theta = t$ とするとき、 t のとりうる値の範囲を求めよ。また、 $\sin \theta + \cos \theta + 2\sin 2\theta$ の最大値、最小値を求めよ。

$$t = \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4})$$



$$\begin{cases} \text{Max} = 2 + \sqrt{2} & (t = \sqrt{2}) \\ \text{min} = -\frac{17}{8} & (t = -\frac{1}{4}) \end{cases}$$



$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$-1 \leq \sqrt{2} \cos(\theta - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$$

$$\therefore \underline{\underline{-1 \leq t \leq \sqrt{2}}}$$

$$t = \sin \theta + \cos \theta$$

両辺に 2 乗して

$$t^2 = \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = t^2 - 1$$

このとき

$$\sin \theta + \cos \theta + 2\sin 2\theta$$

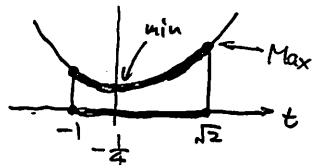
$$= t + 2(t^2 - 1)$$

$$= 2t^2 + t - 2$$

$$= 2(t + \frac{1}{4})^2 - \frac{17}{8}$$

$$\left(\text{頂点 } (-\frac{1}{4}, -\frac{17}{8}) \right)$$

$$\left(\text{軸: } t = -\frac{1}{4}, \text{ 下に凸} \right)$$



点 $(-3, 2)$ を通り、直線 $3x - 4y - 12 = 0$ とのなす角が $\frac{\pi}{4}$ である直線の方程式を求めよ。

$$3x - 4y - 12 = 0$$

$$y = \frac{3}{4}x - 3$$

この直線と x 軸正の向きとのなす角 α とおくと

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}$$

求める直線の傾き $= \alpha \pm \frac{\pi}{4}$ であり

$$\begin{aligned} \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{3}{4} + 1}{1 - \frac{3}{4} \times 1} \\ &= \frac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{4}} \\ &= 7 \end{aligned}$$

このとき、求める直線は

$$y - 2 = 7(x + 3)$$

$$y = 7x + 23$$

$$\begin{aligned} \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\tan \alpha - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\frac{3}{4} - 1}{1 + \frac{3}{4} \times 1} \\ &= \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} \\ &= -\frac{1}{7} \end{aligned}$$

このとき、求める直線は

$$y - 2 = -\frac{1}{7}(x + 3)$$

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7}$$

よって

$$\underline{\underline{y = 7x + 23, y = -\frac{1}{7}x + \frac{11}{7}}}$$

関数 $f(x) = \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x - \sin 2x$ に対して、次の問いに答えよ。

(2015 首都大学東京)

- (1) $t = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ とおくと、 $f(x)$ を t の式で表せ。
- (2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = a$ が $0 \leq x < 2\pi$ の範囲で相異なる2つの解をもつための実数 a の条件を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned} t &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \end{aligned}$$

より

$$\sin x - \cos x = -\sqrt{2} t$$

両辺を2乗して

$$\begin{aligned} \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + \cos^2 x &= 2t^2 \\ 1 - \sin 2x &= 2t^2 \\ \sin 2x &= 1 - 2t^2 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x - \sin 2x \\ &= \sqrt{2} (\sin x - \cos x) - \sin 2x \\ &= \sqrt{2} (-\sqrt{2} t) - (1 - 2t^2) \\ &= \underline{\underline{2t^2 - 2t - 1}} \end{aligned}$$

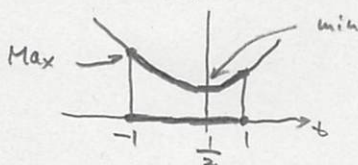
(2)

$$\begin{aligned} f(x) &= 2t^2 - 2t - 1 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} = g(t) \quad \text{とおく} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\text{頂点} \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right) \right. \\ &\left. \text{軸: } t = \frac{1}{2}, \text{下に凸} \right) \end{aligned}$$

$$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad \text{より}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$



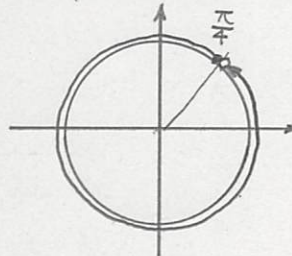
$$\begin{cases} \text{Max} = 3 & (t = -1) \\ \text{min} = -\frac{3}{2} & (t = \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(3)

$$f(x) = a \quad \text{より}$$

$$t = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{とおくと}$$

$$x + \frac{\pi}{4} \text{ の } \angle \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < 2\pi + \frac{\pi}{4} \right)$$

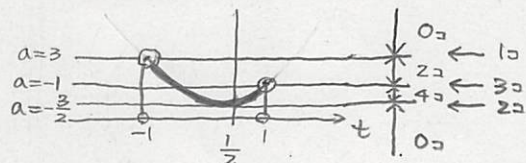
 x と t の対応は t 1つに x 2つ

$$\begin{cases} t = -1, 1 & a \text{ とき } x \text{ 1つ} \\ -1 < t < 1 & a \text{ とき } x \text{ 2つ} \end{cases}$$

が対応する。

$$g(t) = a \quad \text{より}$$

$y = g(t)$ と $y = a$ の共有点について調べるとよい。



グラフより

相異なる2つの解をもつためには

$$\underline{\underline{a = -\frac{3}{2}, -1 < a < 3}}$$

x, y の動く範囲を $0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi$ とするとき、不等式 $\sin x + \sin y \geq \cos x + \cos y$ の表す領域を平面上に図示せよ。

(2010 学習院大)

$$\sin x + \sin y \geq \cos x + \cos y$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \geq 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\left(\cos \frac{x-y}{2} \right) \left(\sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right) \geq 0$$

$$\left(\cos \frac{x-y}{2} \right) \cdot \sqrt{2} \sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0$$

$$\left(\cos \frac{x-y}{2} \right) \left(\sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right) \geq 0$$

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} \geq 0 \\ \sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \geq 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} \leq 0 \\ \sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \leq 0 \end{cases}$$

$$0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi \quad \text{より}$$

$$-\pi \leq \frac{x-y}{2} \leq \pi$$

$$0 \leq \frac{x+y}{2} \leq 2\pi \quad \text{より} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

このとき

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \leq \pi \end{cases}$$

or

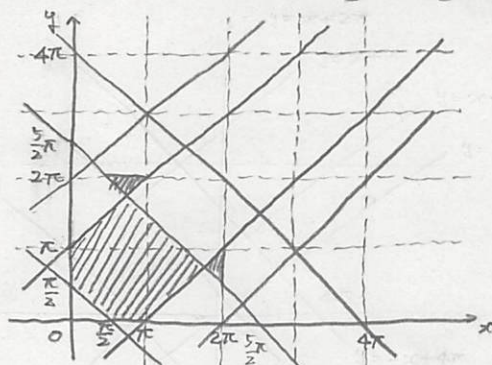
$$\begin{cases} -\pi \leq \frac{x-y}{2} \leq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} \leq \pi \\ -\frac{\pi}{4} \leq \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \leq 0, \pi \leq \frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \leq 2\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} x - \pi \leq y \leq x + \pi \\ -x + \frac{\pi}{2} \leq y \leq -x + \frac{5}{2}\pi \end{cases}$$

or

$$\begin{cases} x + \pi \leq y \leq x + 2\pi, x - 2\pi \leq y \leq x - \pi \\ -x \leq y \leq -x + \frac{\pi}{2}, -x + \frac{5}{2}\pi \leq y \leq -x + 4\pi \end{cases}$$



求める領域は図の斜線部
ただし、境界を含む。

θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ かつ $\cos 2\theta = \cos 3\theta$ を満たす。

(1) θ の値を求めよ。

(2) $\cos \theta$ の値を求めよ。

(3) 1 辺の長さが 1 の正五角形 ABCDE の外接円の半径を R とする。 R^2 の値を求めよ。 (20/2 早稲田大)

(1)

$$\cos 2\theta = \cos 3\theta$$

$$\cos 3\theta - \cos 2\theta = 0$$

$$-2 \sin \frac{5}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

$$\sin \frac{5}{2}\theta = 0 \quad \text{or} \quad \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{より} \\ 0 \leq \frac{5}{2}\theta \leq \frac{5}{2}\pi, \quad 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right)$$

$$\frac{5}{2}\theta = 0, \pi, 2\pi \quad \text{or} \quad \frac{\theta}{2} = 0$$

$$\text{よって} \quad \underline{\underline{\theta = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi}}$$

(2)

$$\cos 2\theta = \cos 3\theta \quad \text{より}$$

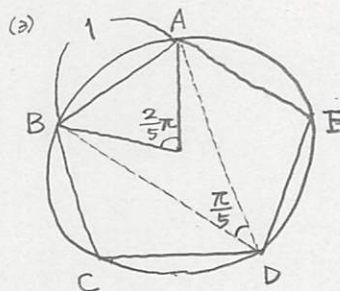
$$2\cos^2\theta - 1 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$4\cos^3\theta - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & -2 & -3 & 1 \\ & & 4 & 2 & -1 \\ \hline & 4 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$(\cos\theta - 1)(4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\underline{\underline{\cos\theta = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}}}$$



$\triangle ABD$ で正弦定理より

$$2R = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}}$$

$$R = \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{5}}$$

ここで $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき

$\cos\theta$ は減少関数 なること

$$(1), (2) \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4} < \frac{-1+\sqrt{5}}{4} < 1 \quad \text{より}$$

$$\cos \frac{2}{5}\pi = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{1 - \cos \frac{2}{5}\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \right)$$

$$= \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

$$R^2 = \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{1}{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{2}{5-\sqrt{5}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}}$$

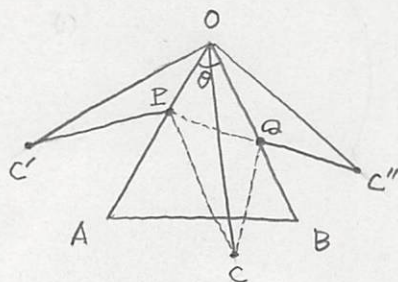
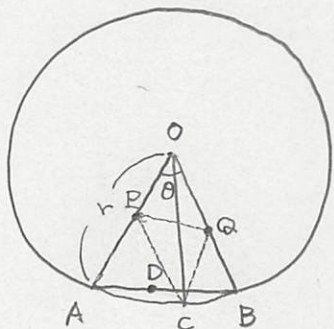
点 O を中心とする半径 r の円周上に、2 点 A, B を $\angle AOB < \frac{\pi}{2}$ となるようにとり、 $\theta = \angle AOB$ とおく。この円周上に点 C を、線分 OC が線分 AB と交わるようにとり、線分 AB 上に点 D をとる。また、点 P は線分 OA 上を、点 Q は線分 OB 上を、それぞれ動くとする。

(1) $CP + PQ + QC$ の最小値を r と θ で表せ。

(2) $a = OD$ とおく。 $DP + PQ + QD$ の最小値を a と θ で表せ。

(3) さらに、点 D が線分 AB 上を動くときの $DP + PQ + QD$ の最小値を r と θ で表せ。 (2011 - 橋大)

(1)



直線 OA, OB に関する点 C の
対称点をそれぞれ C', C'' とすると

$$CP + PQ + QC = C'P + PQ + QC'' \geq C'C''$$

つまり

4 点 C', P, Q, C'' がこの順に一直線上
に並ぶことが必要

また

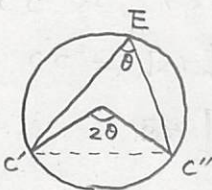
$$OC' = OC'' = OC = r \text{ より}$$

2 点 C', C'' は円周上に存在し、

$$\angle C'OC'' = 2\theta \text{ であり、}$$

円周上で、点 C を含まない $\widehat{C'C''}$ 上に

点 E をとると、 $\angle C'EC'' = \theta$



$\triangle EC'C''$ で正弦 Th より

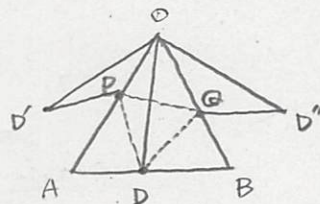
$$2r = \frac{C'C''}{\sin \theta}$$

$$C'C'' = 2r \sin \theta$$

よって

$$\min(CP + PQ + QC) = 2r \sin \theta$$

(2)



直線 OA, OB に関する点 D の

対称点をそれぞれ D', D'' とすると

$$DP + PQ + QD = D'P + PQ + QD'' \geq D'D''$$

つまり

4 点 D', P, Q, D'' がこの順に一直線上
に並ぶことが必要

このとき

$$\angle D'OD'' = 2\theta \text{ であり、}$$

$\triangle OD'D''$ で余弦 Th より

$$\begin{aligned} D'D''^2 &= a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot \cos 2\theta \\ &= 2a^2(1 - \cos 2\theta) \end{aligned}$$

$$D'D'' > 0, a > 0 \text{ より}$$

$$D'D'' = \sqrt{2} a \sqrt{1 - \cos 2\theta}$$

$$= 2a \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

$$= 2a \sqrt{\sin^2 \theta}$$

$$\sin \theta > 0 \text{ より}$$

$$D'D'' = 2a \sin \theta$$

よって

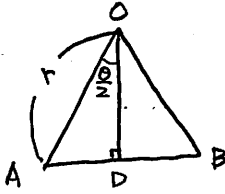
$$\min(DP + PQ + QD) = 2a \sin \theta$$

(裏に続く)

(3)

$OD \perp AB$ となるとき α は最小となり.

このとき点 D は線分 AB の中点と一致する.



このとき

$$OD = r \cos \frac{\theta}{2} \quad \text{2. 節 1)}$$

$$\underline{\underline{\min(DP + PQ + QD) = 2r \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta}}$$

方程式 $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 3x} = 3$ の $0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$ における解の個数を求めよ。

(2002 横浜国立大)

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 3x} = 3 \quad \text{より}$$

$$\sin 3x + \sin x = 3 \sin x \sin 3x$$

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + \sin x = 3 \sin x (3 \sin x - 4 \sin^3 x)$$

$$4 \sin x - 4 \sin^3 x = 9 \sin^2 x - 12 \sin^4 x$$

与式より

$$\sin x \neq 0, \sin 3x \neq 0 \quad \text{つまり}$$

$$0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi \quad \text{より} \quad 0 \leq 3x \leq \frac{9}{4}\pi \quad \text{だから}$$

$$x \neq 0, 3x \neq 0, 2\pi.$$

つまり

$$x \neq 0, \frac{2}{3}\pi$$

$$4 - 4 \sin^2 x = 9 \sin x - 12 \sin^3 x$$

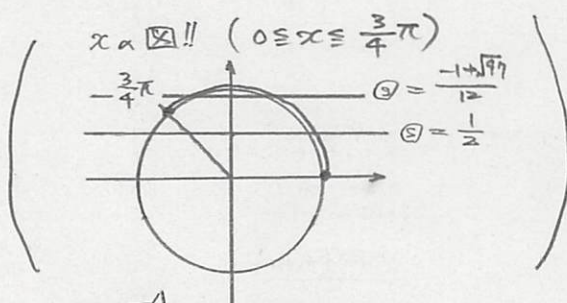
$$12 \sin^3 x - 4 \sin^2 x - 9 \sin x + 4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \frac{1}{2} & 12 & -4 & -9 & 4 \\ & & 6 & 1 & -4 \\ \hline & 12 & 2 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (12 \sin^2 x + 2 \sin x - 8) = 0$$

$$(2 \sin x - 1) (6 \sin^2 x + \sin x - 4) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{97}}{12}$$



$$\left(\frac{-1 + \sqrt{97}}{12} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{98 - 2\sqrt{97}}{144} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{13 - \sqrt{97}}{72} > 0$$

$$\text{よって} \quad \frac{-1 + \sqrt{97}}{12} > \frac{1}{2}$$

よって

$$\underline{\underline{3 \text{ 個}}}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ とする。 a を定数とし、関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = 2\sqrt{3}\sin 2\theta - 2\cos 2\theta - 4a(\sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta) + 4$$

と定める。 $t = \sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta$ とおくとき、次の問いに答えよ。

(1) $f(\theta)$ を a と t の式で表せ。また、 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 方程式 $f(\theta) = 0$ の解の個数を求めよ。

(2016 滋賀大)

(1)

$$t = \sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta$$

両辺を2乗して

$$t^2 = 3\sin^2 \theta + 2\sqrt{3}\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$t^2 = 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

$$t^2 = \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta + 2$$

よって

$$2\sqrt{3}\sin 2\theta - 2\cos 2\theta = 2t^2 - 4$$

このとき

$$f(\theta) = 2t^2 - 4 - 4at + 4$$

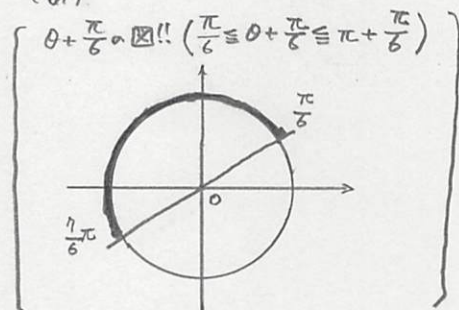
$$= 2t^2 - 4at$$

また、

$$t = \sqrt{3}\sin \theta + \cos \theta$$

$$= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

であり



$$-\frac{1}{2} \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$-1 \leq 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$$

よって

$$\underline{-1 \leq t \leq 2}$$

(2)

t と θ の対応は (1) より $t=1$ に対し

$$\left(-\frac{1}{2} \leq \frac{t}{2} < \frac{1}{2}, \frac{t}{2} = 1 \quad a \text{ とき } \theta 1 \text{ 個}\right.$$

$$\left.\frac{1}{2} \leq \frac{t}{2} < 1 \quad a \text{ とき } \theta 2 \text{ 個}\right.$$

つまり

$$\left(-1 \leq t < 1, t = 2 \quad a \text{ とき } \theta 1 \text{ 個}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} 1 \leq t < 2 \\ t = 2 \end{matrix} \quad a \text{ とき } \theta 2 \text{ 個}\right.$$

が対応する。

$$f(\theta) = 0 \quad \text{より}$$

$$2t^2 - 4at = 0$$

$$t(t - 2a) = 0$$

$$t = 0, 2a$$

01 個

$t = 0$ と a 重複に注意して

$$\left(2a < -1, 2a = 0, 2 < 2a \quad a \text{ とき } 1 \text{ 個}\right.$$

$$\left.-1 \leq 2a < 0, 0 < 2a < 1, 2a = 2 \quad a \text{ とき } 2 \text{ 個}\right.$$

$$\left.1 \leq 2a < 2 \quad a \text{ とき } 3 \text{ 個}\right.$$

つまり

$$\left(a < -\frac{1}{2}, a = 0, 1 < a \quad a \text{ とき } 1 \text{ 個}\right.$$

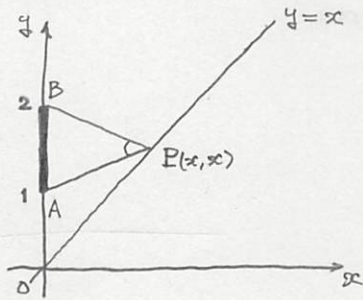
$$\left.-\frac{1}{2} \leq a < 0, 0 < a < \frac{1}{2}, a = 1 \quad a \text{ とき } 2 \text{ 個}\right.$$

$$\left.\frac{1}{2} \leq a < 1 \quad a \text{ とき } 3 \text{ 個}\right.$$

x を正の実数とする。座標平面上の3点 $A(0, 1)$, $B(0, 2)$, $P(x, x)$ をとり、 $\triangle APB$ を考える。 x の値が変化するとき、 $\angle APB$ の最大値を求めよ。

(2010 京都大)

解法1



x 軸正の向きと PA, PB がなす角
をそれぞれ α, β とおくと

$$\tan \alpha = \frac{x-1}{x}, \quad \tan \beta = \frac{x-2}{x}$$

$$\tan \angle APB = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{x-1}{x} - \frac{x-2}{x}}{1 + \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x}}$$

$$= \frac{x^2 - x - x^2 + 2x}{x^2 + x^2 - 3x + 2}$$

$$= \frac{x}{2x^2 - 3x + 2}$$

$$= \frac{1}{2x - 3 + \frac{2}{x}}$$

$x > 0$ なので

$$2x > 0, \quad \frac{2}{x} > 0$$

(相加) $\geq$ (相乗)

$$2x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{2x \cdot \frac{2}{x}} = 4$$

$$2x + \frac{2}{x} - 3 \geq 1$$

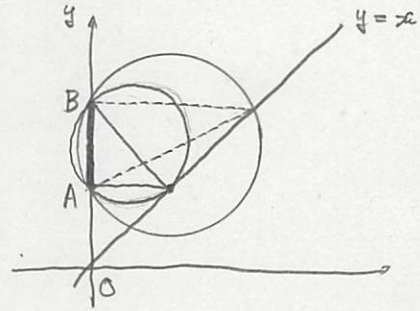
$$0 < \frac{1}{2x + \frac{2}{x} - 3} \leq 1$$

$$0 < \tan \angle APB \leq 1$$

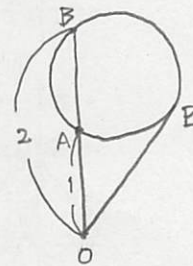
$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ 2x = \frac{2}{x} \quad \text{かつ } x > 0 \\ \text{つまり } x = 1 \quad \text{のとき} \end{array} \right)$$

$$\therefore \underline{\underline{\text{Max } \angle APB = 45^\circ}}$$

解法2



AB を弦とする円を考えると
 $\angle APB$ が最大となるのは
円の半径が最小となるときであり、
つまり円と直線 $y=x$ が
接するときである。



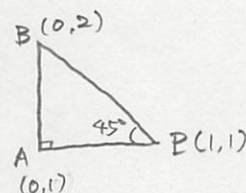
半径 OA より

$$OB^2 = 1 + 2$$

$$OB > 0 \text{ より } OB = \sqrt{2}$$

このとき

$$P(1, 1) \text{ であり。}$$



$$\underline{\underline{\text{Max } \angle APB = 45^\circ}}$$

鋭角三角形 $\triangle ABC$ について、 $\angle A, \angle B, \angle C$ の大きさを、それぞれ A, B, C とする。 $\triangle ABC$ の重心を G 、外心を O とし、外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を、それぞれ AD, OE とする。

このとき、 $AD=2R\sin B\sin C$ 、 $OE=R\cos A$ を証明せよ。

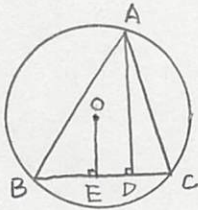
(2) G と O が一致するならば $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ。

(3) $\triangle ABC$ が正三角形でないとし、さらに OG が BC と平行であるとする。

このとき、 $AD=3OE$ 、 $\tan B \tan C = 3$ を証明せよ。

(2014 九州大)

(1) (証明)



$$AD = AB \sin B$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ \triangle ABC \text{ で正弦定理より} \\ \frac{AB}{\sin C} = 2R \\ AB = 2R \sin C \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} AD &= 2R \sin C \sin B \\ &= 2R \sin B \sin C \end{aligned}$$

また、

$$\angle BOC = 2A \quad \text{なので}$$

$$\angle BOE = A$$

$$\begin{aligned} OE &= OB \cos \angle BOE \\ &= R \cos A \end{aligned}$$

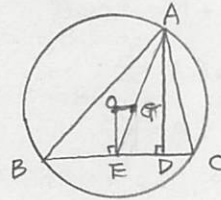
同様に、 $BC=BA$ が成り立つので

$$AB=BC=CA$$

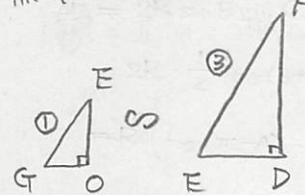
つまり

$\triangle ABC$ は正三角形である。

(2) (証明)



点 G は $\triangle ABC$ の重心なので



$$AG:GE = 2:1 \quad \text{より}$$

$$EG:AE = 1:3$$

つまり

$$EO:AD = 1:3$$

$$\text{よって } AD = 3OE \quad (\neq 0)$$

よって

$$2R \sin B \sin C = 3R \cos A$$

$$2 \sin B \sin C = 3 \cos (\pi - B - C)$$

$$2 \sin B \sin C = -3 \cos (B + C)$$

$$2 \sin B \sin C = -3 (\cos B \cos C - \sin B \sin C)$$

$$\sin B \sin C = 3 \cos B \cos C$$

$\triangle ABC$ は鋭角三角形なので

$$\cos B \cos C \neq 0$$

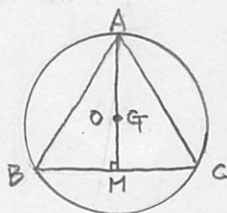
$$\frac{\sin B \sin C}{\cos B \cos C} = 3$$

よって

$$\tan B \tan C = 3$$

(2)

証明1



線分 BC の中点を M とすると

3点 A, G, M は一直線上であり、

重心 G と外心 O が一致するので

$$AM \perp BC$$

よって

$$\triangle ABM \cong \triangle ACM$$

つまり

$$AB = AC$$

(2) 証明2

($AB=AC$ は証明1と同様)

$AD=3OE$ が成り立つこと

$$2R \sin B \sin C = 3R \cos A$$

$$2 \sin B \sin C = 3 \cos A$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ AB=AC \text{ なること } B=C \\ \text{よって} \\ 2 \sin B \sin C = 2 \sin B \sin B = 2 \sin^2 B \\ = -\cos(\pi - 2B) + \cos 0 \\ = \cos A + 1 \end{array} \right)$$

$$\cos A + 1 = 3 \cos A$$

$$\cos A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore A = \frac{\pi}{3}$$

よって

$$B=C=\frac{\pi}{3} \text{ も成り立ち}$$

$\triangle ABC$ は正三角形である。 ■