

[2018スタンダードⅡAB受 基本問題78]

- (1) $\frac{5}{3}\sqrt[5]{9} + \sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}}$ を簡単にせよ。
 (2) $\left(\log_2 9 + \log_4 \frac{1}{3}\right) \left(\log_3 2 + \log_9 \frac{1}{8}\right)$ を計算せよ。
 (3) $x = \log_{10} \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ のとき, $(10^x + 10^{-x})(10^x - 10^{-x})$ の値を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned} & \frac{5}{3}\sqrt[5]{9} + \sqrt[3]{-81} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \\ &= \frac{5}{3} \times 3^{\frac{2}{5}} + (-3^4)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{5}{3} \times 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3} \times 3^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\frac{5}{3} - 3 + \frac{1}{3}\right) \times 3^{\frac{1}{3}} \\ &= \underline{\underline{-\sqrt[3]{3}}} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (\log_2 9 + \log_4 \frac{1}{3}) (\log_3 2 + \log_9 \frac{1}{8}) \\ &= \left(2\log_2 3 + \frac{\log_2 \frac{1}{3}}{\log_2 4}\right) \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 3} + \frac{\log_2 \frac{1}{8}}{\log_2 9}\right) \\ &= \left(2\log_2 3 - \frac{1}{2}\log_2 3\right) \left(\frac{1}{\log_2 3} - \frac{3}{2\log_2 3}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\log_2 3\right) \left(\frac{-1}{2\log_2 3}\right) \\ &= \underline{\underline{-\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & (10^x + 10^{-x})(10^x - 10^{-x}) \\ &= 10^{2x} - 10^{-2x} \\ &= (7+4\sqrt{3}) - \frac{1}{7+4\sqrt{3}} \\ &= (7+4\sqrt{3}) - (7-4\sqrt{3}) \\ &= \underline{\underline{8\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題79]

次の4つの数を小さい方から順に並べよ。

(1) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}, \sqrt[6]{19}$

(2) $\frac{3}{2}, \log_3 0.6, \log_3 4, \log_4 3$

(1)

$$\sqrt{3}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{7}, \sqrt[6]{19}$$

それぞれ12乗すると

$$3^6, 5^4, 7^3, 19^2$$

$$\begin{array}{cccc} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ 729 & 625 & 343 & 361 \end{array}$$

であり

$$7^3 < 19^2 < 5^4 < 3^6 \quad \text{よ} \rangle$$

$$\sqrt[4]{7} < \sqrt[6]{19} < \sqrt[3]{5} < \sqrt{3}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{l} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \log_3 3 = \log_3 \sqrt{27} \\ \log_3 0.6 = \log_3 \frac{3}{5} \\ \log_3 4 \\ \log_4 3 = \frac{1}{\log_3 4} \end{array} \right)$$

$\log_3 x$ は増加関数で

$$\frac{3}{5} < \sqrt{27} < 4 \quad \text{よ} \rangle$$

$$\log_3 \frac{3}{5} < \log_3 1 < \log_3 3 < \log_3 4 < \log_3 \sqrt{27}$$

$$\log_3 \frac{3}{5} < 0 < 1 < \log_3 4 < \log_3 \sqrt{27}$$

$$\left(\begin{array}{l} - \text{②} \\ \log_3 4 > \log_3 3 = 1 \quad \text{よ} \rangle \\ 0 < \frac{1}{\log_3 4} < 1 \end{array} \right)$$

よ、②

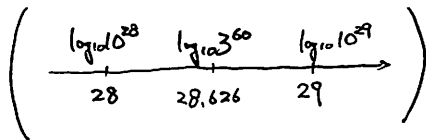
$$\log_3 \frac{3}{5} < \frac{1}{\log_3 4} < \log_3 4 < \log_3 \sqrt{27}$$

つまり、

$$\log_3 0.6 < \log_4 3 < \log_3 4 < \frac{3}{2}$$

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。 3^{60} の桁数は $\boxed{}$ であり, $\left(\frac{1}{2}\right)^{60}$ は小数第 $\boxed{}$ 位に初めて 0 でない数字が現れる。

$$\begin{aligned}\log_{10} 3^{60} &= 60 \log_{10} 3 \\ &= 60 \times 0.4771 \\ &= 28.626\end{aligned}$$

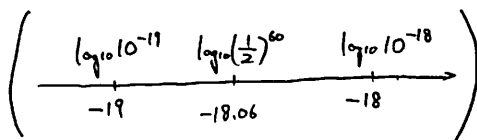


$$10^{28} < 3^{60} < 10^{29}$$

よて

$$3^{60} \text{ の桁数は } \underline{\underline{29}}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{60} &= -60 \log_{10} 2 \\ &= -60 \times 0.3010 \\ &= -18.06\end{aligned}$$



$$10^{-19} < \left(\frac{1}{2}\right)^{60} < 10^{-18}$$

よて

小数第 19 位に初めて 0 でない数字が現れる。

- (1) 実数 x が $x+x^{-1}=47$ を満たすとき, $x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}$, $x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}$ の値をそれぞれ求めよ。
 (2) $2\log_3(2x+3y)=\log_3 x+\log_3 y+3$, $x>y$ のとき, $\frac{x^2+xy-4y^2}{xy+y^2}$ の値を求めよ。
 (3) 0 でない実数 a, b, c, d が $3^a=5^b=7^c=105^d$ を満たすとき, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{d}$ が成り立つことを示せ。

(1) 2015 愛知大

(2) 2012 神戸女大

(3) 2015 鹿児島大

(1)

$$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=a \quad \text{とおく}$$

両辺 2乗して

$$x^{\frac{1}{2}}+2+x^{-\frac{1}{2}}=a^2$$

$$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=a^2-2$$

両辺 2乗して

$$x+2+x^{-1}=(a^2-2)^2$$

$$49=(a^2-2)^2$$

$$a^2-2=\pm 7$$

$$a^2=9, -5$$

$$a^2>0 \text{ より } a^2=9$$

$$a>0 \text{ より } a=3$$

つまり

$$\underline{\underline{x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3}}$$

$$x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}=(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})^3-3\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{-\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})$$

$$=3^3-3\times 3$$

$$=27-9$$

$$=\underline{\underline{18}}$$

(2)

$$2\log_3(2x+3y)=\log_3 x+\log_3 y+3$$

$$\log_3(2x+3y)^2=\log_3 x+\log_3 y+\log_3 3^3$$

$$\log_3(2x+3y)^2=\log_3 27xy$$

$$(2x+3y)^2=27xy$$

$$4x^2+12xy+9y^2=27xy$$

$$4x^2-15xy+9y^2=0$$

$$(4x-3y)(x-3y)=0$$

$$y=\frac{4}{3}x \quad \text{or} \quad y=\frac{x}{3}$$

ここで

$$(真数)>0 \quad \text{より}$$

$$2x+3y>0, \quad x>0, \quad y>0.$$

よって

$$x>y \text{ より}$$

$$y=\frac{x}{3}$$

よって

$$\begin{aligned} x^2+xy-4y^2 &= x^2+\frac{1}{3}x^2-\frac{4}{9}x^2 \\ &= \frac{8}{9}x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy+y^2 &= \frac{1}{3}x^2+\frac{1}{9}x^2 \\ &= \frac{4}{9}x^2 \end{aligned}$$

よって

$$\frac{x^2+xy-4y^2}{xy+y^2}=\frac{\frac{8}{9}x^2}{\frac{4}{9}x^2}=\underline{\underline{2}}$$

(3) 証明

$$3^a=5^b=7^c=105^d=k \quad \text{とおく}$$

$$a=\log_3 k$$

$$b=\log_5 k=\frac{\log_3 k}{\log_3 5}$$

$$c=\log_7 k=\frac{\log_3 k}{\log_3 7}$$

$$d=\log_{105} k=\frac{\log_3 k}{\log_3 105}$$

よって

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\log_3 k}+\frac{\log_3 5}{\log_3 k}+\frac{\log_3 7}{\log_3 k}$$

$$=\frac{\log_3 3+\log_3 5+\log_3 7}{\log_3 k}$$

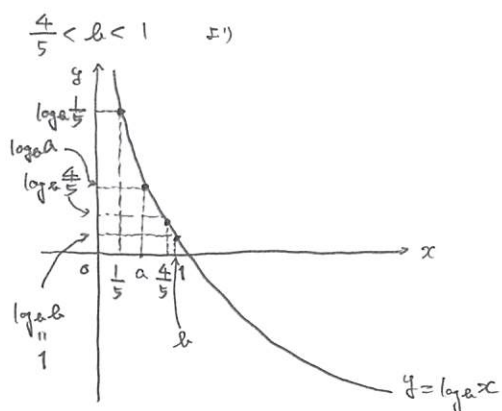
$$=\frac{\log_3 105}{\log_3 k}$$

$$=\frac{1}{d}$$

よって、与等式は成り立つ。

$\frac{1}{5} < a < \frac{4}{5} < b < 1$ とする。 $\log_b \frac{1}{5}$, $\log_b \frac{4}{5}$, $\log_a b$, $\log_{\frac{4}{5}} b$, 1 のうち最小であるものと、最大であるものを求めよ。

(1996 神戸学院大)



①より

$$1 < \log_a \frac{4}{5} < \log_a a < \log_a \frac{1}{5} \quad \text{--- ①}$$

が成り立ち

$$\begin{cases} \log_a b = \frac{1}{\log_a a} \\ \log_{\frac{4}{5}} b = \frac{1}{\log_{\frac{4}{5}} \frac{4}{5}} \end{cases} \quad \text{--- ②}$$

①より

$$1 > \frac{1}{\log_a \frac{4}{5}} > \frac{1}{\log_a a}$$

$$1 > \log_{\frac{4}{5}} b > \log_a b \quad \text{--- ③}$$

①, ③より

$$\log_a b < \log_{\frac{4}{5}} b < 1 < \log_a \frac{4}{5} < \log_a \frac{1}{5}$$

よって

$$\begin{cases} \text{最小であるものは } a = \log_a b \\ \text{最大であるものは } a = \log_a \frac{1}{5} \end{cases}$$

[2018スタンダードⅡⅡAB受 問題A233]

整数 12^{34} について、次の問いに答えよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

- (1) 桁数の数か。
- (2) 一の位の数字は何か。
- (3) 最高位の数字は何か。

(2016 名古屋市立大)

(1)

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 12^{34} &= 34 \log_{10} 12 \\
 &= 34 (2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3) \\
 &= 34 \times (2 \times 0.3010 + 0.4771) \\
 &= 34 \times 1.0791 \\
 &= 36.6894
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \log_{10} 10^{36} & \log_{10} 12^{34} & \log_{10} 10^{37} \\ \hline 36 & 36.6894 & 37 \end{array} \right)$$

$$10^{36} < 12^{34} < 10^{37}$$

よて

$$12^{34} \text{ は } \underline{\underline{37 \text{ 桁の数}}}$$

(2)

mod 10 で考える

$$\begin{aligned}
 12^{34} &\equiv 2^{34} \\
 &\equiv 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16 \\
 &\equiv 4 \times 4 \times 4 \times 6 \\
 &\equiv \underline{\underline{4}}
 \end{aligned}$$

(3)

最高位の数字 = a とおくと

$$\begin{aligned}
 a \times 10^{36} &\leq 12^{34} < (a+1) \times 10^{36} \\
 \log_{10}(a \times 10^{36}) &\leq \log_{10} 12^{34} < \log_{10}((a+1) \times 10^{36}) \\
 \log_{10} a + 36 &\leq 36.6894 < \log_{10}(a+1) + 36 \\
 \log_{10} a &\leq 0.6894 < \log_{10}(a+1)
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \therefore \\ \log_{10} 4 = 2 \log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020 \\ \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 \\ \quad = 1 - 0.3010 = 0.6990 \end{array} \right)$$

よて

$$\underline{\underline{a=4}}$$

$1 < a < b < c$ のとき, 不等式 $\log_a \frac{c}{b} + \log_b \frac{a}{c} + \log_c \frac{b}{a} > 0$ が成り立つことを示せ。

(2006 大阪市立大)

証明

$$\left(\begin{array}{l} 1 < a < b < c \quad \text{より} \\ \log_a 1 < \log_a a < \log_a b < \log_a c \\ \text{つまり} \\ 1 < \log_a b < \log_a c \end{array} \right)$$

このとき

$$\begin{aligned} & \log_a \frac{c}{b} + \log_b \frac{a}{c} + \log_c \frac{b}{a} \\ &= \log_a c - \log_a b + \log_b a - \log_b c + \log_c b - \log_c a \\ &= \log_a c - \log_a b + \frac{1}{\log_a b} - \frac{\log_a c}{\log_a b} + \frac{\log_a b}{\log_a c} - \frac{1}{\log_a c} \\ &= \frac{(\log_a b)(\log_a c)^2 - (\log_a b)^2(\log_a c) + \log_a c - (\log_a c)^2 + (\log_a b)^2 - \log_a b}{(\log_a b)(\log_a c)} \\ &= \frac{(1 - \log_a c)(\log_a b)^2 + ((\log_a c)^2 - 1)(\log_a b) + \log_a c - (\log_a c)^2}{(\log_a b)(\log_a c)} \\ &= \frac{(1 - \log_a c) \{ (\log_a b)^2 + (-1 - \log_a c)(\log_a b) + \log_a c \}}{(\log_a b)(\log_a c)} \\ &= \frac{(1 - \log_a c)(\log_a b - 1)(\log_a b - \log_a c)}{(\log_a b)(\log_a c)} \\ &= \frac{(\log_a b - 1)(\log_a c - 1)(\log_a c - \log_a b)}{(\log_a b)(\log_a c)} > 0 \end{aligned}$$

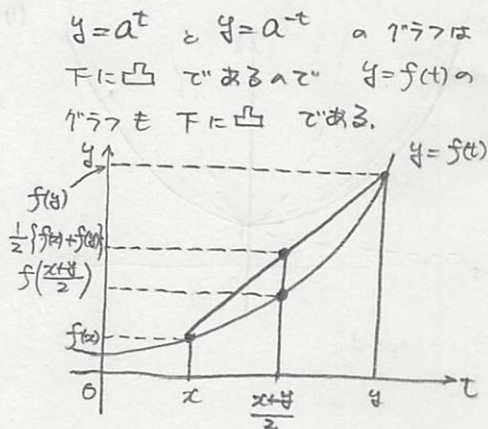
よって

与不等式は成り立つ。 ■

- (1) $a > 0$ とし、関数 $f(t) = \frac{a^t + a^{-t}}{2}$ について考える。実数 x, y に対して、 $f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ と $\frac{1}{2}\{f(x) + f(y)\}$ の大小関係を調べよ。
- (2) $x > 2, y > 2$ のとき、 $\log_a\left(\frac{x+y}{2}\right), \frac{\log_a(x+y)}{2}, \frac{\log_a x + \log_a y}{2}$ の大小関係を不等号で表せ。
- ただし、 $a > 0, a \neq 1$ とする。

(1) (2005 帯広畜産大) (2) (1997 横浜国立大)

(1) 解法1



図より

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{f(x) + f(y)\}$$

(等号成立は $x = y$ のとき)

解法2

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\{f(x) + f(y)\} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{a^x + a^{-x}}{2} + \frac{a^y + a^{-y}}{2}\right\} - \frac{a^{\frac{x+y}{2}} + a^{-\frac{x+y}{2}}}{2} \\ &= \frac{1}{4}(a^x + a^{-x} + a^y + a^{-y} - 2a^{\frac{x+y}{2}} - 2a^{-\frac{x+y}{2}}) \\ &= \frac{1}{4}\{(a^{\frac{x}{2}} + a^{\frac{y}{2}})^2 + (a^{-\frac{x}{2}} + a^{-\frac{y}{2}})^2\} \geq 0 \end{aligned}$$

よって

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{f(x) + f(y)\}$$

(2)

$x > 0, y > 0$ とする。

(相加) $\geq$ (相乗)

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \quad \text{--- ①}$$

(等号成立は $x = y$ のとき)

また

$$\begin{aligned} & xy - (x+y) \\ &= xy - x - y \\ &= (x-1)(y-1) - 1 > 0 \end{aligned}$$

($\because x > 2, y > 2$)

よって

$$xy > x + y \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$$\frac{x+y}{2} \geq (xy)^{\frac{1}{2}} > (x+y)^{\frac{1}{2}}$$

したがって

$$\begin{cases} a > 1 \text{ のとき} \\ \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\log_a x + \log_a y}{2} > \frac{\log_a(x+y)}{2} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} \\ \log_a\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\log_a x + \log_a y}{2} < \frac{\log_a(x+y)}{2} \end{cases}$$

- (1) $\log_{10} 3$ は無理数であることを示せ。
 (2) $\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。
 (3) 3^{26} の桁数を求めよ。

(2012 新潟大)

(1)

<背理法>

 $\log_{10} 3$ が有理数であると仮定すると互いに素な $a, b \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\log_{10} 3 = \frac{a}{b} \quad \text{と仮定}$$

$$10^{\frac{a}{b}} = 3$$

$$10^a = 3^b$$

左辺は 3 の倍数ではないが

右辺は 3 の倍数であるので矛盾。

よって

 $\log_{10} 3$ は無理数である。

(2) (証明)

$$\begin{aligned} \log_{10} 3 - \frac{6}{13} &= \frac{1}{13} (13 \log_{10} 3 - 6) \\ &= \frac{1}{13} (\log_{10} 3^{13} - \log_{10} 10^6) \\ &= \frac{1}{13} (\log_{10} 1594323 - \log_{10} 1000000) > 0. \end{aligned}$$

$$\text{よって } \frac{6}{13} < \log_{10} 3 \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \log_{10} 3 &= \frac{1}{2} (2 \log_{10} 10 - \log_{10} 3) \\ &= \frac{1}{2} (\log_{10} 100 - \log_{10} 3) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{よって } \log_{10} 3 < \frac{1}{2} \quad \text{--- ②}$$

①, ② より

$$\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2}$$

(3)

$$\log_{10} 3^{26} = 26 \log_{10} 3$$

(2) より

$$\frac{6}{13} < \log_{10} 3 < \frac{1}{2} \quad \text{より}$$

$$12 < 26 \log_{10} 3 < 13$$

$$12 < \log_{10} 3^{26} < 13$$

$$\log_{10} 10^{12} < \log_{10} 3^{26} < \log_{10} 10^{13}$$

左 $10 > 1$ なるので

$$10^{12} < 3^{26} < 10^{13}$$

よって 3^{26} は 13桁の数である。

自然数 m, n と $0 < a < 1$ を満たす実数 a を, 等式 $\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$ が成り立つようにとる.

- (1) 自然数 m, n を求めよ.
 (2) 不等式 $a > \frac{2}{3}$ が成り立つことを示せ.

(2006 大阪大)

(1)

$$m, n \in \mathbb{N} \quad \text{と} \quad 0 < \frac{1}{n+a} < 1$$

$$\begin{aligned} \log_2 6 &= \log_2 (2 \times 3) \\ &= \log_2 2 + \log_2 3 \\ &= 1 + \log_2 3. \end{aligned}$$

ここで

$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \quad \text{と} \quad \text{仮定}$$

$$1 < \log_2 3 < 2$$

$$2 < 1 + \log_2 3 < 3$$

$$2 < \log_2 6 < 3$$

$$\text{よって} \quad m = 2$$

ここで

$$1 + \log_2 3 = 2 + \frac{1}{n+a}$$

$$\log_2 3 - 1 = \frac{1}{n+a}$$

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{1}{n+a}$$

$$2^{\frac{1}{n+a}} = \frac{3}{2}$$

$$2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+a} \quad \text{--- ①}$$

$$0 < a < 1 \quad \text{と} \quad \text{仮定} \quad n < n+a < n+1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n < \left(\frac{3}{2}\right)^{n+a} < \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n < 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

これを満たす $n \in \mathbb{N}$ は

$$n = 1$$

よって

$$\underline{\underline{m=2, n=1}}$$

(2) (証明)

① より

$$2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1+a}$$

$$\frac{4}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^a$$

$$\log_2 \frac{4}{3} = a \log_2 \left(\frac{3}{2}\right)$$

$$2 - \log_2 3 = a (\log_2 3 - 1)$$

$$a = \frac{2 - \log_2 3}{\log_2 3 - 1}$$

よって

$$a - \frac{2}{3} = \frac{2 - \log_2 3}{\log_2 3 - 1} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{6 - 3\log_2 3 - 2\log_2 3 + 2}{3(\log_2 3 - 1)}$$

$$= \frac{8 - 5\log_2 3}{3(\log_2 3 - 1)}$$

$$= \frac{\log_2 2^8 - \log_2 3^5}{3(\log_2 3 - \log_2 2)}$$

$$= \frac{\log_2 256 - \log_2 243}{3(\log_2 3 - \log_2 2)} > 0$$

よって

$$a > \frac{2}{3}$$

■