

[2018スタンダードⅡAB受 基本問題81]

次の方程式を解け。

(1) $16^{x-1} = 8^{y+1}, 27^x = 9^{y-1}$

(2) $\log_2 x = \log_4(3x+10)$

(3) $2^{\log_4(0.1-x)} = 0.1-x$

(1)

$$\begin{cases} 16^{x-1} = 8^{y+1} \\ 27^x = 9^{y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{4(x-1)} = 2^{3(y+1)} \\ 3^{3x} = 3^{2(y-1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-1) = 3(y+1) \\ 3x = 2(y-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ 3x - 2y = -2 \end{cases}$$

これを解いて

$$\underline{\underline{x = -20, y = -29}}$$

$$\sqrt{0.1-x} = 0.1-x$$

両辺ともに正であり、2乗して

$$0.1-x = (0.1-x)^2$$

$$(0.1-x)(1-(0.1-x)) = 0$$

$$(0.1-x)(0.9+x) = 0$$

$$x = 0.1, -0.9$$

$$x < 0.1 \text{ より}$$

$$\underline{\underline{x = -0.9}}$$

(2)

$$\left(\begin{array}{l} \text{(真数)} > 0 \text{ より} \\ x > 0 \text{ より } 3x+10 > 0 \\ x > 0 \text{ より } x > -\frac{10}{3} \\ \text{つまり } x > 0 \end{array} \right)$$

$$\log_2 x = \log_4(3x+10)$$

$$\log_4 x^2 = \log_4(3x+10)$$

$$x^2 = 3x+10$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x-5)(x+2) = 0$$

$$x = 5, -2$$

$$x > 0 \text{ より}$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

(3)

$$\left(\begin{array}{l} \text{(真数)} > 0 \text{ より} \\ 0.1-x > 0 \\ \text{つまり } x < 0.1 \end{array} \right)$$

$$2^{\log_4(0.1-x)} = 0.1-x$$

$$2^{\frac{\log_2(0.1-x)}{\log_2 4}} = 0.1-x$$

$$2^{\frac{1}{2}(\log_2(0.1-x))} = 0.1-x$$

$$2^{\log_2 \sqrt{0.1-x}} = 0.1-x$$

次の不等式を解け。

(1) $2^{2x} - 2^{x+1} - 48 < 0$

(2) $\log_9(\log_2 x - 1) \leq \frac{1}{2}$

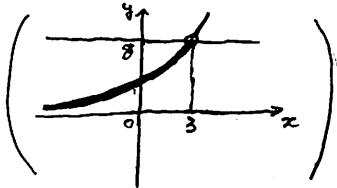
(1)

$$2^{2x} - 2^{x+1} - 48 < 0$$

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 48 < 0$$

$$(2^x - 8)(2^x + 6) < 0$$

$$-6 < 2^x < 8$$



$$\underline{\underline{x < 3}}$$

(2)

(真数) > 0 より

$$\left(\begin{array}{l} x > 0 \quad \text{かつ} \quad \log_2 x - 1 > 0 \\ x > 0 \quad \text{かつ} \quad \log_2 x > \log_2 2 \\ x > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 2 \\ \text{つまり} \quad x > 2 \end{array} \right)$$

よって

$$\log_9(\log_2 x - 1) \leq \frac{1}{2}$$

$$\log_9(\log_2 x - 1) \leq \frac{1}{2} \log_9 9$$

$$\log_9(\log_2 x - 1) \leq \log_9 3$$

$$\log_2 x - 1 \leq 3$$

$$\log_2 x \leq 4$$

$$\log_2 x \leq \log_2 16$$

$$x \leq 16$$

 $x > 2$ より

$$\underline{\underline{2 < x \leq 16}}$$

[2018スタンダードⅡAB受 基本問題83]

(1) $(0.25)^n < 10^{-9}$ を満たす整数 n の最小値を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

(2) 関数 $2(\log_{10} x)^2 + \log_{10}(10x^3)$ $\left(\frac{1}{100} \leq x \leq 1\right)$ の最大値をとる x は $\boxed{\quad}$ で、最小値をとる x は $\boxed{\quad}$ である。

(1)

$$(0.25)^n < 10^{-9}$$

$$\log_{10} (0.25)^n < \log_{10} 10^{-9}$$

$$\log_{10} \left(\frac{1}{4}\right)^n < \log_{10} 10^{-9}$$

$$-2n \log_{10} 2 < -9$$

$$-2 \times 0.3010 \times n < -9$$

$$n > \frac{9}{0.6020} > 14.9$$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ より}$$

$$\underline{\underline{\min n = 15}}$$

最大となる n は

$t = -2$ のときであり

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{100}}}$$

最小となる n は

$t = -\frac{3}{4}$ のときであり

$$\log_{10} x = -\frac{3}{4}$$

$$\log_{10} x = \log_{10} 10^{-\frac{3}{4}}$$

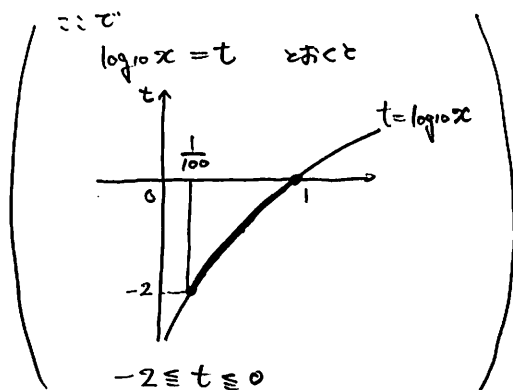
$$\underline{\underline{x = 10^{-\frac{3}{4}}}}$$

(2)

$$2(\log_{10} x)^2 + \log_{10}(10x^3)$$

$$= 2(\log_{10} x)^2 + 1 + 3\log_{10} x$$

$$= 2(\log_{10} x)^2 + 3\log_{10} x + 1$$

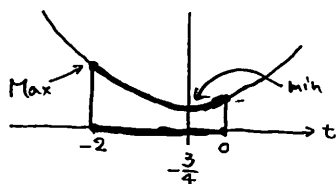


$$f(t) = 2t^2 + 3t + 1$$

$$= 2\left(t + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$$

(頂点 $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{8})$)

(軸: $t = -\frac{3}{4}$, 下に凸)



(1) 方程式 $2 \cdot 8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$ を解け。

(2013 宮崎大)

(2) 方程式 $\log_x 4 - \log_2 x^4 = 7$ を解け。

(2013 松本大)

(3) 連立方程式 $3^x + 3^y = 12$, $3^{x+y} = 27$ を解け。

(2006 武庫川女子大)

(4) 連立方程式 $\log_2 x - \log_2 y = 1$, $x \log_2 x - y \log_2 y = 0$ を解け。

(2015 愛媛大)

(1)

$$2 \cdot 8^x - 3 \cdot 4^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$$

$$2 \cdot (2^x)^3 - 12 \cdot (2^x)^2 + 10 \cdot 2^x + 24 = 0$$

$$\left(\begin{array}{c} t = 2^x \text{ とおくと} \\ \begin{array}{c} t \\ \uparrow \\ \text{ } \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ } \\ \downarrow \\ \text{ } \end{array} \\ t > 0 \end{array} \right)$$

$$2t^3 - 12t^2 + 10t + 24 = 0$$

$$t^3 - 6t^2 + 5t + 12 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -6 & 5 & 12 \\ & & -1 & 7 & -12 \\ \hline & 1 & -7 & 12 & 0 \end{array} \right)$$

$$(t+1)(t^2-7t+12) = 0$$

$$(t+1)(t-3)(t-4) = 0$$

$$t = -1, 3, 4$$

$$t > 0 \text{ より}$$

$$t = 3, 4$$

$$2^x = 3, 4$$

$$x = \log_2 3, \log_2 4$$

$$\underline{\underline{x = \log_2 3, 2}}$$

$$x = 2^{\frac{1}{4}}, 2^{-2}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{これは} \\ 0 < x < 1, 1 < x \text{ を満たす} \end{array} \right)$$

よって

$$\underline{\underline{x = \sqrt[4]{2}, \frac{1}{4}}}$$

(3)

$$\left(\begin{array}{l} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^{x+y} = 27 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} 3^x + 3^y = 12 \\ 3^x \cdot 3^y = 27 \end{array} \right)$$

 3^x と 3^y を解に持つ2次方程式は

$$t^2 - 12t + 27 = 0$$

$$(t-3)(t-9) = 0$$

$$t = 3, 9$$

$$\{3^x, 3^y\} = \{3, 9\}$$

よって

$$\underline{\underline{\{x, y\} = \{1, 2\}}}$$

(4)

$$\left(\begin{array}{c} \text{真数} > 0 \text{ より} \\ x > 0, y > 0 \end{array} \right)$$

$$\log_2 x - \log_2 y = 1$$

$$\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 2$$

$$\frac{x}{y} = 2$$

$$\text{よって } x = 2y$$

よって

$$x \log_2 x - y \log_2 y = 0 \text{ より}$$

$$2y \log_2 2y - y \log_2 y = 0$$

$$y \neq 0 \text{ より}$$

$$2 \log_2 2y - \log_2 y = 0$$

(裏に続く)

(2)

$$\left(\begin{array}{c} \text{底, 真数の条件より} \\ 0 < x < 1, 1 < x \end{array} \right)$$

$$\log_x 4 - \log_2 x^4 = 7$$

$$\frac{2}{\log_2 x} - 4 \log_2 x = 7$$

$$2 - 4(\log_2 x)^2 = 7 \log_2 x$$

$$4(\log_2 x)^2 + 7 \log_2 x - 2 = 0$$

$$(4 \log_2 x - 1)(\log_2 x + 2) = 0$$

$$\log_2 x = \frac{1}{4}, -2$$

$$\log_2 x = \log_2 2^{\frac{1}{4}}, \log_2 2^{-2}$$

$$2(1 + \log_2 y) = \log_2 y = 0$$

$$\log_2 y = -2$$

$$\log_2 y = \log_2 2^{-2}$$

$$y = 2^{-2}$$

$$y = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{よって } x = \frac{1}{2}$$

(これは $x > 0, y > 0$ を満たす.)

よって

$$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}}}$$

(1) 不等式 $2^{-2(3x+1)} - 5 \times 2^{-3x} + 16 < 0$ を解け。

(2010 東京経大)

(2) $0 < a < 1$ のとき、 $a^{x^2} > 3^{x-2} a^{2x}$ を満たす x の範囲を求めよ。

(2011 甲南大)

(3) $a > 0, a \neq 1$ のとき、 x の不等式 $\log_a(x+2) \geq \log_a(3x+16)$ を解け。

(2003 早稲田大)

(4) x を 1 でない正の数とすると、 $\log_4 x^2 - \log_x 64 \leq 1$ を満たす x の範囲を求めよ。

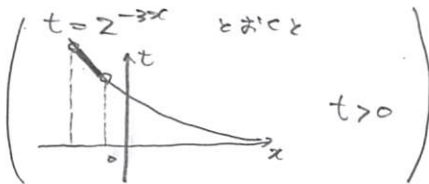
(類 2014 愛知工大)

(1)

$$2^{-2(3x+1)} - 5 \times 2^{-3x} + 16 < 0$$

$$2^{-6x-2} - 5 \times 2^{-3x} + 16 < 0$$

$$\frac{1}{4} \times 2^{-6x} - 5 \times 2^{-3x} + 16 < 0$$



$$\frac{1}{4} t^2 - 5t + 16 < 0$$

$$t^2 - 20t + 64 < 0$$

$$(t-4)(t-16) < 0$$

$$4 < t < 16$$

$$4 < 2^{-3x} < 16$$

$$\left(\begin{array}{l} 2^{-3x} = 4 \quad x \text{ と } \neq \\ -3x = \log_2 4 \\ -3x = 2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} 2^{-3x} = 16 \quad x \text{ と } \neq \\ -3x = \log_2 16 \\ -3x = 4 \\ x = -\frac{4}{3} \end{array} \right)$$

∴

$$\underline{\underline{-\frac{4}{3} < x < -\frac{2}{3}}}$$

(2)

$$a^{x^2} > 3^{x-2} a^{2x}$$

$$\log_3 a^{x^2} > \log_3 3^{x-2} a^{2x}$$

$$x^2 \log_3 a > \log_3 3^{x-2} + \log_3 a^{2x}$$

$$x^2 \log_3 a > x-2 + 2x \log_3 a$$

$$(\log_3 a) x^2 + (-2 \log_3 a - 1) x + 2 > 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \log_3 a < 0 \quad \text{---} \quad -1 \rightarrow -1 \\ \log_3 a > 0 \quad \text{---} \quad -2 \rightarrow -2 \log_3 a \end{array} \right)$$

$$\{(\log_3 a) x - 1\} (x-2) > 0$$

$$0 < a < 1 \quad \text{∴} \quad \log_3 a < 0 \quad \text{∴} \quad \text{①}$$

$$\boxed{\{(-\log_3 a) x + 1\} (x-2) < 0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(-\log_3 a) x + 1\} (x-2) = 0 \quad \text{と } \neq \\ a \neq 1 \quad \text{∴} \quad \log_3 a \neq 0 \quad \text{∴} \quad \text{②} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{1}{-\log_3 a}, 2$$

$$\left(\begin{array}{l} 0 < a < 1 \quad \text{∴} \quad \log_3 a < 0 \quad \text{∴} \\ \frac{1}{-\log_3 a} < 2 \end{array} \right)$$



$$\underline{\underline{\frac{1}{-\log_3 a} < x < 2}}$$

(裏に続<)

(3)

$$\left(\begin{array}{l} (\text{真数}) > 0 \text{ かつ} \\ x+2 > 0 \text{ かつ } 3x+16 > 0 \\ x > -2 \text{ かつ } x > -\frac{16}{3} \\ \text{つまり } x > -2 \end{array} \right)$$

∴ $a \geq 1$ のとき

$$\log_a(x+2) \geq \log_a(3x+16)$$

$$\log_a(x+2)^2 \geq \log_a(3x+16)$$

(i) $0 < a < 1$ $a \geq 1$ $0 < a^2 < 1$ のとき

$$(x+2)^2 \leq 3x+16$$

$$x^2 + x - 12 \leq 0$$

$$(x+4)(x-3) \leq 0$$

$$-4 \leq x \leq 3$$

$$x > -2 \text{ かつ}$$

$$-2 < x \leq 3$$

(ii) $1 < a$ $a \geq 1$ $1 < a^2$ のとき

$$(x+2)^2 \geq 3x+16$$

$$(x+4)(x-3) \geq 0$$

$$x \leq -4, 3 \leq x$$

$$x > -2 \text{ かつ}$$

$$3 \leq x$$

(i), (ii) より

$$\begin{cases} -2 < x \leq 3 & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \\ 3 \leq x & (1 < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

(4)

$$\log_4 x^2 - \log_4 64 \leq 1$$

$$2\log_4 x - \frac{\log_4 64}{\log_4 x} \leq 1$$

$$2\log_4 x - \frac{3}{\log_4 x} \leq 1$$

(i) $0 < x < 1$ $a \geq 1$ $\log_4 x < 0$ のとき

$$2(\log_4 x)^2 - 3 \geq \log_4 x$$

$$2(\log_4 x)^2 - \log_4 x - 3 \geq 0$$

$$(2\log_4 x - 3)(\log_4 x + 1) \geq 0$$

$$\log_4 x \leq -1, \frac{3}{2} \leq \log_4 x$$

$$\log_4 x \leq \log_4 4^{-1}, \log_4 4^{\frac{3}{2}} \leq \log_4 x$$

$$x \leq \frac{1}{4}, 8 \leq x$$

$$0 < x < 1 \text{ かつ}$$

$$0 < x \leq \frac{1}{4}$$

(ii) $1 < x$ $a \geq 1$ $\log_4 x > 0$ のとき

$$2(\log_4 x)^2 - 3 \leq \log_4 x$$

$$(2\log_4 x - 3)(\log_4 x + 1) \leq 0$$

$$-1 \leq \log_4 x \leq \frac{3}{2}$$

$$\log_4 4^{-1} \leq \log_4 x \leq \log_4 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{4} \leq x \leq 8$$

$$1 < x \text{ かつ}$$

$$1 < x \leq 8$$

(i), (ii) より

$$\underline{0 < x \leq \frac{1}{4}, 1 < x \leq 8}$$

$x \geq 0$ における、関数 $f(x) = \log_2 \{4(4^x + 4^{-x}) - 20(2^x + 2^{-x}) + 97\}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。

$$t = 2^x + 2^{-x} \quad \text{とおく}$$

$$2^x > 0, \quad 2^{-x} > 0 \quad \text{なので}$$

(相加) $\geq$ (相乗)

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}$$

$$t \geq 2$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ 2^x = 2^{-x} \text{ より } x \geq 0 \\ \text{つまり } x = 0 \text{ とき} \end{array} \right)$$

このとき

$$t^2 = (2^x + 2^{-x})^2$$

$$t^2 = 4^x + 2 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} + 4^{-x}$$

$$4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$$

であり

$$f(x) = \log_2 \{4(4^x + 4^{-x}) - 20(2^x + 2^{-x}) + 97\}$$

$$= \log_2 \{4(t^2 - 2) - 20t + 97\}$$

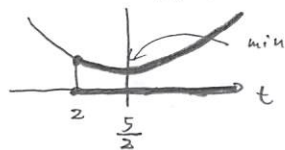
$$= \log_2 (4t^2 - 20t + 89)$$

$f(x)$ の最小値となる x は

$$g(t) = 4t^2 - 20t + 89 \quad \text{が最小のとき}$$

$$g(t) = 4\left(t - \frac{5}{2}\right)^2 + 64$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{頂点 } \left(\frac{5}{2}, 64\right) \\ \text{軸: } t = \frac{5}{2}, \text{ 下に凸} \end{array} \right)$$



$$\min g(t) = 64 \quad \left(t = \frac{5}{2}\right)$$

よって

$$\min f(x) = \log_2 64 = 6$$

$$t = \frac{5}{2} \quad \text{より}$$

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2}$$

$$2(2^x)^2 + 2 = 5 \cdot 2^x$$

(2010 上智大)

$$2(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$(2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) = 0$$

$$2^x = \frac{1}{2}, 2$$

$$x = -1, 1$$

$$x \geq 0 \text{ より}$$

$$x = 1$$

よって

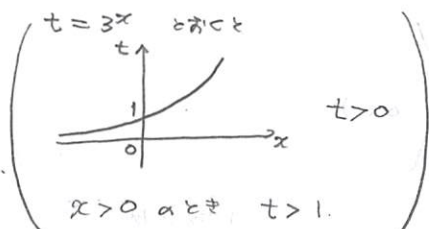
$$\min f(x) = 6 \quad (x = 1)$$

x の方程式 $9^x - a \cdot 3^{x+1} + a + 1 = 0$ が、異なる2つの正の実数解をもつとき、 a の値の範囲を求めよ。

(2016 立命館大)

$$9^x - a \cdot 3^{x+1} + a + 1 = 0$$

$$9^x - 3a \cdot 3^x + a + 1 = 0$$



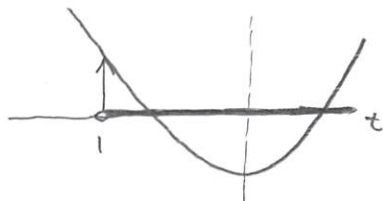
$$t^2 - 3at + a + 1 = 0$$

$$f(t) = t^2 - 3at + a + 1$$

とおくと、

$y = f(t)$ のグラフは t 軸と

$t > 1$ で異なる2点を共有するとよい。



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{判別式 } D > 0 \quad \text{--- ①} \\ \text{軸} > 1 \quad \text{--- ②} \\ f(1) > 0 \quad \text{--- ③} \end{array} \right.$$

① より

$$D = 9a^2 - 4(a+1)$$

$$= 9a^2 - 4a - 4 > 0$$

$$\left(\begin{array}{l} 9a^2 - 4a - 4 = 0 \quad \text{とおくと} \\ a = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{9} \\ \text{Graph of } 9a^2 - 4a - 4 = 0 \end{array} \right)$$

$$a < \frac{2-2\sqrt{10}}{9}, \frac{2+2\sqrt{10}}{9} < a$$

② より

$$\frac{3a}{2} > 1$$

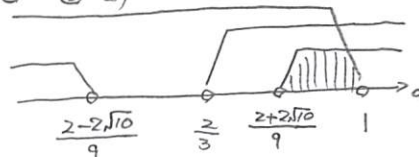
$$a > \frac{2}{3}$$

③ より

$$-2a + 2 > 0$$

$$a < 1$$

① ~ ③ より



$$\frac{2-2\sqrt{10}}{9} < a < 1$$

不等式 $\log_x y + 2\log_y x < 3$ を満たす点 (x, y) の存在する範囲を図示せよ。

(2015 津田塾大)

真数, 底 $\neq 1$ 条件より

$$\begin{cases} 0 < x < 1, 1 < x \\ 0 < y < 1, 1 < y \end{cases}$$

$$\log_x y + 2\log_y x < 3$$

$$\log_x y + 2 \times \frac{1}{\log_x y} < 3$$

$$t = \log_x y \quad t \neq 0$$

$$t + \frac{2}{t} < 3$$

両辺に $t^2 (> 0)$ をかけると

$$t^3 + 2t < 3t^2$$

$$t^3 - 3t^2 + 2t < 0$$

$$t(t^2 - 3t + 2) < 0$$

$$t(t-1)(t-2) < 0$$



$$t < 0, 1 < t < 2$$

$$\log_x y < 0, 1 < \log_x y < 2$$

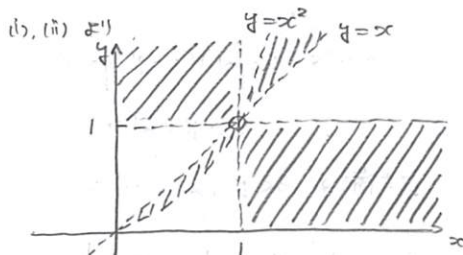
$$\log_x y < \log_x 1, \log_x x < \log_x y < \log_x x^2$$

$$(i) \quad 0 < x < 1 \quad a \neq 1$$

$$y > 1 \text{ or } x > y > x^2$$

$$(ii) \quad 1 < x \quad a \neq 1$$

$$y < 1 \text{ or } x < y < x^2$$



点 (x, y) の存在範囲は図の斜線部
ただし, 境界を含まない.

不等式 $\log_x 2 - (\log_2 y)(\log_x y) < 4(\log_2 x - \log_2 y)$ を満たす x, y の組 (x, y) の範囲を座標平面上に図示せよ。

(2011 岩手大)

(真数) > 0 である $x > 0, y > 0$

また、条件から $x \neq 1$ である。

$$\log_x 2 - (\log_2 y)(\log_x y) < 4(\log_2 x - \log_2 y)$$

$$\frac{1}{\log_2 x} - (\log_2 y) \times \frac{\log_2 y}{\log_2 x} < 4(\log_2 x - \log_2 y)$$

(i) $0 < x < 1$ のとき

$$\log_2 x < 0 \quad \text{である。}$$

$$1 - (\log_2 y)^2 > 4(\log_2 x)^2 - 4(\log_2 x)(\log_2 y)$$

$$4(\log_2 x)^2 - 4(\log_2 x)(\log_2 y) + (\log_2 y)^2 < 1$$

$$(2\log_2 x - \log_2 y)^2 < 1$$

$$-1 < 2\log_2 x - \log_2 y < 1$$

$$2\log_2 x - 1 < \log_2 y < 2\log_2 x + 1$$

$$\log_2 x^2 - \log_2 2 < \log_2 y < \log_2 x^2 + \log_2 2$$

$$\log_2 \frac{x^2}{2} < \log_2 y < \log_2 2x^2$$

$$\frac{1}{2}x^2 < y < 2x^2$$

(ii) $x > 1$ のとき

$$\log_2 x > 0 \quad \text{である。}$$

$$1 - (\log_2 y)^2 < 4(\log_2 x)^2 - 4(\log_2 x)(\log_2 y)$$

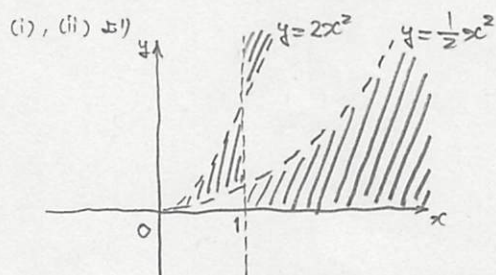
$$(2\log_2 x - \log_2 y)^2 > 1$$

$$2\log_2 x - \log_2 y < -1, \quad 1 < 2\log_2 x - \log_2 y$$

$$2\log_2 x + 1 < \log_2 y \quad \text{または} \quad \log_2 y < 2\log_2 x - 1$$

$$\log_2 2x^2 < \log_2 y \quad \text{または} \quad \log_2 y < \log_2 \frac{x^2}{2}$$

$$2x^2 < y \quad \text{または} \quad y < \frac{1}{2}x^2$$



点 (x, y) の存在領域は図の斜線部

ただし、境界を含まない。

x に関する方程式 $\{\log_{\frac{1}{10}}(ax)\}^2 + \log_{\frac{1}{10}}x + \frac{1}{4} = 0$ が解をもつとき、すべての解が $\sqrt{10}$ より大きくなるように a の値の範囲を定めよ。

(2003 大阪府立大)

(真数) > 0 である $x > 0, a > 0$

$$\log_{\frac{1}{10}} a = A, \log_{\frac{1}{10}} x = X \quad \text{とおく.}$$

$$\left(\begin{array}{l} x > \sqrt{10} \quad \text{とき} \\ X = \log_{\frac{1}{10}} x < \log_{\frac{1}{10}} \sqrt{10} \\ \text{つまり} \quad X < -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\{\log_{\frac{1}{10}}(ax)\}^2 + \log_{\frac{1}{10}}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$(\log_{\frac{1}{10}} a + \log_{\frac{1}{10}} x)^2 + \log_{\frac{1}{10}} x + \frac{1}{4} = 0$$

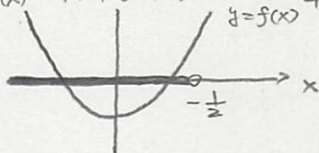
$$(A+X)^2 + X + \frac{1}{4} = 0$$

$$X^2 + (2A+1)X + A^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad \text{--- ①}$$

 x と X は 1 対 1 に対応するから① の 2 つの解 x_1, x_2 ともに $X < -\frac{1}{2}$

となるとよい。

$$f(x) = X^2 + (2A+1)X + A^2 + \frac{1}{4} \quad \text{とおく.}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{判別式 } D \geq 0 \quad \text{--- ②} \\ \text{軸} < -\frac{1}{2} \quad \text{--- ③} \\ f(-\frac{1}{2}) > 0 \quad \text{--- ④} \end{array} \right.$$

② より

$$(2A+1)^2 - 4(A^2 + \frac{1}{4})$$

$$= 4A^2 + 4A + 1 - 4A^2 - 1$$

$$= 4A \geq 0$$

$$A \geq 0 \quad \text{--- ②'}$$

③ より

$$\frac{-2A-1}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$-2A-1 < -1$$

$$-2A < 0$$

$$A > 0 \quad \text{--- ③'}$$

④ より

$$\frac{1}{4} - A - \frac{1}{2} + A^2 + \frac{1}{4} > 0$$

$$A^2 - A > 0$$

$$A(A-1) > 0$$

$$A < 0, 1 < A \quad \text{--- ④'}$$

②', ③', ④' より

$$A > 1$$

$$\log_{\frac{1}{10}} a > 1$$

$$\log_{\frac{1}{10}} a > \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)$$

$$0 < \frac{1}{10} < 1 \quad \text{である}$$

$$a < \frac{1}{10}$$

$$a > 0 \quad \text{であるから}$$

$$\underline{\underline{0 < a < \frac{1}{10}}}$$

実数 x, y が $4^x - 4 \cdot 2^x + 9^y - 2 \cdot 3^y \leq -1$ を満たすとき、 $2^x + 3^y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2012 東北大)

$$2^x = X, 3^y = Y \quad \text{とおく} \quad X > 0, Y > 0 \quad \text{--- ①}$$

$$4^x - 4 \cdot 2^x + 9^y - 2 \cdot 3^y \leq -1 \quad \text{より}$$

$$X^2 - 4X + Y^2 - 2Y \leq -1$$

$$(X-2)^2 - 4 + (Y-1)^2 - 1 \leq -1$$

$$(X-2)^2 + (Y-1)^2 \leq 4 \quad \text{--- ②}$$

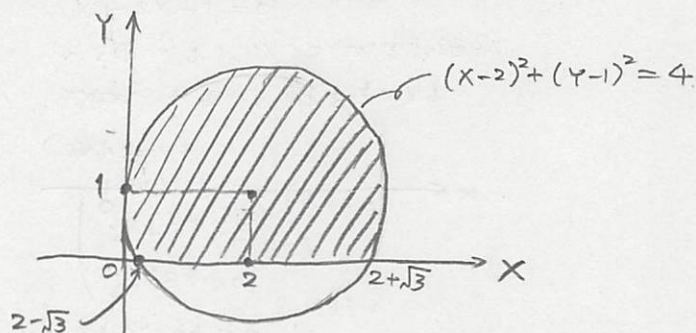
このとき

$$2^x + 3^y = X + Y = k \quad \text{とおく}$$

$$Y = -X + k \quad (\text{傾き}-1, Y\text{切片 } k \text{ の直線}) \quad \text{--- ③}$$

①, ② を満たす領域と2つの共有点をもつ(接するときを含む)ように、

③ が動くような k の範囲を求める。



$$\left(\begin{array}{l} (X-2)^2 + (Y-1)^2 = 4 \quad \text{で} \quad Y=0 \quad \text{と} \text{し} \\ (X-2)^2 = 3 \\ X = 2 \pm \sqrt{3} \end{array} \right)$$

円の中心 $(2, 1)$ と ③ $X + Y - k = 0$

との距離 d は

$$d = \frac{|2+1-k|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|3-k|}{\sqrt{2}}$$

$$r = 2.$$

接するとき $d = r$ とおくと

$$\frac{|3-k|}{\sqrt{2}} = 2$$

$$|k-3| = 2\sqrt{2}$$

$$k = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

③ が点 $(2-\sqrt{3}, 0)$ を通るとき

$$k = 2 - \sqrt{3} \quad (< 3 - 2\sqrt{2})$$

以上により

$$\underline{\underline{2 - \sqrt{3} < k \leq 3 + 2\sqrt{2}}}$$

ボタンを押すと「当たり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある。「当たり」の表示される確率は毎回同じであるとする。この装置のボタンを20回押したとき、1回以上「当たり」の出る確率は36%である。1回以上「当たり」の出る確率が90%以上となるためには、この装置のボタンを最低何回押せばよいか。
 必要なら $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を用いてよい。

(2016 京都大)

1回の試行で「はずれ」が表示される

確率 P とおくと

$$1 - P^{20} = \frac{36}{100}$$

$$P^{20} = \frac{64}{100}$$

$$P^{10} = \frac{8}{10}$$

$$\log_{10} P^{10} = \log_{10} \frac{8}{10}$$

$$10 \log_{10} P = 3 \log_{10} 2 - 1$$

$$\log_{10} P = \frac{3 \log_{10} 2 - 1}{10} \quad \text{--- ①}$$

n 回の試行で、「1回以上「当たり」」の出る確率が90%以上になるとすると、

$$1 - P^n \geq \frac{90}{100}$$

$$P^n \leq \frac{1}{10}$$

$$\log_{10} P^n \leq \log_{10} \frac{1}{10}$$

$$n \log_{10} P \leq -1$$

①より

$$n \times \frac{3 \log_{10} 2 - 1}{10} \leq -1$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ 3 \log_{10} 2 - 1 = \log_{10} 8 - \log_{10} 10 < 0 \end{array} \right) \quad \text{よ)} \quad \left(\begin{array}{l} \because \\ 3 \log_{10} 2 - 1 = \log_{10} 8 - \log_{10} 10 < 0 \end{array} \right)$$

$$n \geq \frac{10}{1 - 3 \log_{10} 2}$$

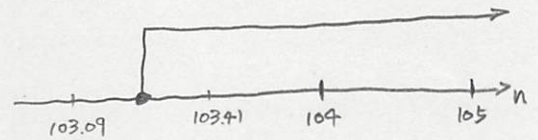
$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$$

$$0.9030 < 3 \log_{10} 2 < 0.9033$$

$$0.0967 < 1 - 3 \log_{10} 2 < 0.097$$

$$\frac{1}{0.0967} > \frac{1}{1 - 3 \log_{10} 2} > \frac{1}{0.097}$$

$$\frac{10}{0.0967} < \frac{10}{1 - 3 \log_{10} 2} < \frac{10}{0.097}$$



よって

$$\min N = 104$$

つまり

$$\underline{\underline{104 \text{ 回}}}$$