

(1) 関数 $f(x) = x^4$ について、極限值 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h}$ を求めよ。

(2) $f(x) = ax + b$, $g(x) = cx^2 + dx + e$ において

$$\{f(x) + g(x)\}' = -3x - 7, \quad \{f(x)g(x)\}' = 9x^2 + 23x + 1$$

が成り立つとき、 $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

(1)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2$$

$$= 2f'(1)$$

$$= 2 \times 4$$

$$= \underline{\underline{8}}$$

$$f(x) = x^4 \quad \text{より}$$

$$f'(x) = 4x^3$$

(2) ①

$$-2 + d = -7$$

$$d = -5$$

②

$$2 \left((-2) \times (-5) + b \left(-\frac{3}{2} \right) \right) = 23$$

$$20 - 3b = 23$$

$$-3b = 3$$

$$b = -1$$

(2)

$$f(x) + g(x) = (ax + b) + (cx^2 + dx + e)$$

$$= cx^2 + (a+d)x + (b+e)$$

$$\{f(x) + g(x)\}' = 2cx + a + d$$

よって

$$2cx + a + d = -3x - 7$$

x に $\rightarrow$ して恒等式をみる

$$\begin{cases} 2c = -3 & \text{--- ①} \\ a + d = -7 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$f(x)g(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e)$$

$$= acx^3 + (ad + bc)x^2 + (ae + bd)x + be$$

$$\{f(x)g(x)\}' = 3acx^2 + 2(ad + bc)x + (ae + bd)$$

よって

$$3acx^2 + 2(ad + bc)x + (ae + bd) = 9x^2 + 23x + 1$$

x に $\rightarrow$ して恒等式をみる

$$\begin{cases} 3ac = 9 & \text{--- ③} \\ 2(ad + bc) = 23 & \text{--- ④} \\ ae + bd = 1 & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

① より $c = -\frac{3}{2}$

③ より

$$3a \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = 9$$

$$-\frac{9}{2}a = 9$$

$$a = -2$$

⑤

$$-2e + (-1) \cdot (-5) = 1$$

$$-2e + 5 = 1$$

$$-2e = -4$$

$$e = 2$$

よって

$$\begin{cases} f(x) = -2x - 1 \\ g(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 5x + 2 \end{cases}$$

[2018スタンダードⅡⅡAB受 基本問題85]

3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ のグラフは、 $x=2$ で x 軸に接しており、原点における接線の方程式が $y = -2x$ であるという。定数 a, b, c, d の値を求めよ。

解法1

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{とおく}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$x=2$ で x 軸に接するので

$$f(2) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(2) = 0$$

よって

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

原点 における接線の方程式が

$$y = -2x \quad \text{なので}$$

$$f(0) = 0 \quad \text{かつ} \quad f'(0) = -2$$

よって

$$\begin{cases} d = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

以上により

$$\underline{\underline{a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = -2, d = 0}}$$

解法2

$x=2$ で x 軸に接し、原点を通る

3次関数は

$$y = ax(x-2)^2 \quad \text{と仮定}$$

$$y' = a(x-2)^2 + ax \cdot 2(x-2)$$

$$= a(x-2)(x-2+2x)$$

$$= a(x-2)(3x-2)$$

原点 における接線の傾きは -2 より

$$y'(x=0) = a(-2)(-2)$$

$$= 4a = -2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

よって

$$y = -\frac{1}{2}x(x-2)^2$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 - 2x$$

つまり

$$\underline{\underline{a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = -2, d = 0}}$$

3次関数 $y = x^3 + x^2 - 1$ のグラフの接線で、原点を通るものの方程式を求めよ。また、そのときの接点の座標を求めよ。

$$y = x^3 + x^2 - 1$$

$$y' = 3x^2 + 2x$$

接点 $(t, t^3 + t^2 - 1)$ とおく。

$$y'(x=t) = 3t^2 + 2t$$

$$\text{接線 } y - (t^3 + t^2 - 1) = (3t^2 + 2t)(x - t)$$

$$y = (3t^2 + 2t)x - 2t^3 - t^2 - 1 \quad \text{--- ①}$$

原点を通るとき、

$$-2t^3 - t^2 - 1 = 0$$

$$2t^3 + t^2 + 1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ & & -2 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$(t+1)(2t^2 - t + 1) = 0$$

$$t = -1 \quad \text{or} \quad 2t^2 - t + 1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} 2t^2 - t + 1 = 0 \quad \text{a 判別式 } D \text{ は} \\ D = 1 - 8 \\ = -8 < 0 \\ \text{とさり 実数解をもたない} \end{array} \right)$$

よって

$$t = -1$$

よって ① より

$$\underline{\underline{\text{接線 } y = x, \text{ 接点 } (-1, -1)}}$$

[2018スタンダードⅡAB受問題A245]

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とする。曲線 $y = f(x)$ は直線 $y = x + 3$ と点 $P(-1, 2)$ で接している。
 また、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $Q(2, f(2))$ における接線は点 P を通る。このとき、定数 a, b, c の値を求めよ。

(2005 津田塾大)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

接点 $P(-1, 2)$

$$f'(-1) = 3 - 2a + b$$

$$\text{接線 } y - 2 = (3 - 2a + b)(x + 1)$$

$$y = (3 - 2a + b)x + 5 - 2a + b$$

これより $y = x + 3$ と一致するから

$$\begin{cases} 3 - 2a + b = 1 \\ 5 - 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow b = 2a - 2$$

また、

$$f(-1) = 2 \quad \text{を満足するから}$$

$$-1 + a - b + c = 2$$

$$c = -a + b + 3$$

$$= -a + (2a - 2) + 3$$

$$= a + 1$$

このとき

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (2a - 2)x + a + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2a - 2$$

接点 $Q(2, 9a + 5)$

$$f'(2) = 12 + 4a + 2a - 2$$

$$= 6a + 10$$

$$\text{接線 } y - (9a + 5) = (6a + 10)(x - 2)$$

$$y = (6a + 10)x - 3a - 15$$

これより $P(-1, 2)$ を通るとき

$$-6a - 10 - 3a - 15 = 2$$

$$-9a = 27$$

$$a = -3$$

よって

$$\underline{\underline{a = -3, b = -8, c = -2}}$$

a は実数とする。2つの曲線 $y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ と $y=ax^2-2a^2x-3a$ は、ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき、 a の値を求めよ。

(2005 千葉大)

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 2ax^2 - 3a^2x - 4 \\ g(x) = ax^2 - 2a^2x - 3a \end{cases}$$

とおくと

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 4ax - 3a^2 \\ g'(x) = 2ax - 2a^2 \end{cases}$$

(接点の x 座標) = t とおくと

$$f(t) = g(t) \quad \text{かつ} \quad f'(t) = g'(t)$$

とするとよい。

$$f(t) = g(t) \quad \text{より}$$

$$t^3 + 2at^2 - 3a^2t - 4 = at^2 - 2a^2t - 3a$$

$$t^3 + at^2 - a^2t + 3a - 4 = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$f'(t) = g'(t) \quad \text{より}$$

$$3t^2 + 4at - 3a^2 = 2at - 2a^2$$

$$3t^2 + 2at - a^2 = 0$$

$$(3t - a)(t + a) = 0$$

$$t = \frac{a}{3}, -a$$

$$(i) \quad t = \frac{a}{3} \quad \text{a とき} \quad \text{① は}$$

$$\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{3}a^3 + 3a - 4 = 0$$

$$-\frac{5}{27}a^3 + 3a - 4 = 0$$

$$5a^3 - 81a + 108 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 0 & -81 & 108 & \\ & & 15 & 45 & -108 & \\ \hline & 5 & 15 & -36 & 0 & \end{array} \right)$$

$$(a-3)(5a^2+15a-36) = 0$$

$$a=3 \quad \text{or} \quad 5a^2+15a-36=0$$

$$a=3, \quad \frac{-15 \pm \sqrt{225+720}}{10}$$

$$a=3, \quad \frac{-15 \pm \sqrt{945}}{10}$$

$$a=3, \quad \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}$$

$$(ii) \quad t = -a \quad \text{a とき} \quad \text{① は}$$

$$-a^3 + a^3 + a^3 + 3a - 4 = 0$$

$$a^3 + 3a - 4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -4 & \\ & & 1 & 1 & 4 & \\ \hline & & 1 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right)$$

$$(a-1)(a^2+a+4) = 0$$

$$a=1 \quad \text{or} \quad a^2+a+4=0$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ a^2+a+4=0 \quad \text{a 判別式 } D \text{ は} \\ D = 1-16 \\ = -15 < 0 \\ \text{となり、実数解をもたない} \end{array} \right)$$

よって

$$a=1$$

(i), (ii) より

$$\underline{\underline{a=1, 3, \frac{-15 \pm 3\sqrt{105}}{10}}}$$

a, b, c を実数とし, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく。曲線 $C: y = f(x)$ 上に異なる2点 $P(s, f(s)), Q(t, f(t))$ がある。

- (1) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を s, t, a の関係式として求めよ。
 (2) (1) の条件のもとで, 線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。

(2016 北海道大)

(1)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(P における C の接線) $\parallel$ (Q における C の接線)

となるための条件は

$$f'(s) = f'(t) \quad \text{である。}$$

$$3s^2 + 2as + b = 3t^2 + 2at + b$$

$$3(s^2 - t^2) + 2a(s - t) = 0$$

$$(s - t)(3(s + t) + 2a) = 0$$

$$s \neq t \quad \text{である。}$$

$$\underline{\underline{3(s + t) + 2a = 0}}$$

ここで

$$f(u) = f\left(-\frac{1}{3}a\right)$$

$$= -\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

$$= \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

$$= b$$

$$u = f(u) \quad \text{を満足する} a \text{ である。}$$

線分 PQ の中点は C 上にある。

(2) 証明(1) $a \neq 0$ のとき

$$3(s + t) + 2a = 0$$

$$s + t = -\frac{2}{3}a$$

$$P(s, s^3 + as^2 + bs + c)$$

$$Q(t, t^3 + at^2 + bt + c)$$

線分 PQ の中点 $M(u, v)$ である。

$$u = \frac{s + t}{2} = -\frac{1}{3}a$$

$$v = \frac{(s^3 + as^2 + bs + c) + (t^3 + at^2 + bt + c)}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (s^3 + t^3) + a(s^2 + t^2) + b(s + t) + 2c \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ (s + t)^3 - 3st(s + t) + a(s + t)^2 - 2st + b(s + t) + 2c \}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{8}{27}a^3 + 2ast + a\left(\frac{4}{9}a^2 - 2st\right) - \frac{2}{3}ab + 2c \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{27}a^3 - \frac{2}{3}ab + 2c \right)$$

$$= \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

曲線 $C: y = x^3 - kx$ 上の点 $P(a, a^3 - ka)$ における接線 ℓ が、点 P と異なる点 Q で曲線 C と交わっている。さらに、点 Q における曲線 C の接線が直線 ℓ と直交している。

- (1) 点 Q の座標を a, k で表せ。
 (2) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2011 東洋大)

(1)

$$C: y = x^3 - kx$$

$$y' = 3x^2 - k$$

$$\text{接点 } P(a, a^3 - ka)$$

$$y'_{(x=a)} = 3a^2 - k$$

$$\text{接線 } \ell: y - (a^3 - ka) = (3a^2 - k)(x - a)$$

$$y = (3a^2 - k)x - 2a^3$$

C と連立して

$$x^3 - kx = (3a^2 - k)x - 2a^3$$

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 0 & -3a^2 & 2a^3 \\ & & a & a^2 & -2a^3 \\ \hline & 1 & a & -2a^2 & 0 \end{array} \right)$$

$$(x - a)(x^2 + ax - 2a^2) = 0$$

$$(x - a)^2(x + 2a) = 0$$

$$x \neq a \text{ より}$$

$$x = -2a$$

このとき

$$y = -8a^3 + 2ka$$

よって

$$\underline{\underline{Q(-2a, -8a^3 + 2ka)}}$$

(2)

$$P \neq Q \text{ より}$$

$$a \neq -2a$$

$$\text{つまり } a \neq 0$$

$$\text{接点 } Q(-2a, -8a^3 + 2ka)$$

$$y'_{(x=-2a)} = 12a^2 - k$$

点 Q における接線と ℓ が

直交するから

$$(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1$$

$$36a^4 - 15a^2k + k^2 = -1$$

$$36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0$$

$$t = a^2 \text{ とおくと}$$

$$a \neq 0 \text{ より } t > 0$$

$$36t^2 - 15kt + k^2 + 1 = 0$$

この t についての2次方程式が

正の解をもつとよい。

2つの解 α, β とおくと

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{15}{36}k = \frac{5}{12}k \\ \alpha\beta = \frac{k^2 + 1}{36} \end{cases}$$

条件を満たすには

$$\begin{cases} \text{判別式 } D \geq 0 & \text{--- ①} \\ \alpha + \beta > 0 & \text{--- ②} \\ \alpha\beta > 0 & \text{--- ③} \end{cases}$$

① より

$$D = 225k^2 - 144(k^2 + 1)$$

$$= 81k^2 - 144 \geq 0$$

$$9k^2 - 16 \geq 0$$

$$(3k + 4)(3k - 4) \geq 0$$

$$k \leq -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \leq k$$

② より

$$\frac{5}{12}k > 0$$

$$k > 0$$

③ より

$$\frac{k^2 + 1}{36} > 0$$

これはすべて k について成り立つ。

① ~ ③ より

$$\underline{\underline{k \geq \frac{4}{3}}}$$

(3x+2)f'(x)=6f(x) と f(1)=25 を満たす整式 f(x) を求めよ。

(2016 北海道薬科大)

f(x) が 定数関数 であると仮定すると

$$f(x) = c \quad \text{と仮定}$$

$$f(1) = 25 \quad \text{より}$$

$$c = 25$$

$$\text{つまり } f(x) = 25$$

このとき f'(x) = 0 とあり

$$(3x+2)f'(x) = 6f(x) \quad \text{より}$$

$$0 = 6 \times 25$$

これは 不合理

よって

f(x) は n 次式 (n ≥ 1) と仮定

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$(a_i \in \mathbb{R}, i=0, 1, 2, \dots, n)$$

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

最高次の項に着目すると

$$(3x+2)f'(x) \quad \text{では } 3n a_n x^n$$

$$6f(x) \quad \text{では } 6a_n x^n$$

よって

$$3n = 6$$

$$n = 2$$

つまり

f(x) は 2 次式 とあり

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{と仮定}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$(3x+2)f'(x) = (3x+2)(2ax+b)$$

$$= 6ax^2 + (4a+3b)x + 2b$$

$$6f(x) = 6ax^2 + 6bx + 6c$$

よって

$$\begin{cases} 4a+3b=6b \\ 2b=6c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a=3b \\ b=3c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{4}{3}a \\ c = \frac{4}{9}a \end{cases}$$

$$f(1) = 25 \quad \text{より}$$

$$a + b + c = 25$$

$$a + \frac{4}{3}a + \frac{4}{9}a = 25$$

$$\frac{25}{9}a = 25$$

$$a = 9$$

よって

$$b = 12, c = 4$$

よって

$$\underline{f(x) = 9x^2 + 12x + 4}$$

$2xf'(x) = 5f(x) + f(x-2)$ と $f(0) = -2$ を満たす整式 $f(x)$ を求めよ。

(2015 愛知医科大学)

$f(x)$ が 0 次式 と仮定すると

$$f(0) = -2 \quad \text{より} \quad f(x) = -2$$

このとき

$$(\text{左辺}) = 2 \cdot x \cdot 0 = 0$$

$$(\text{右辺}) = 5 \cdot (-2) + (-2) = -12$$

これは 不合理

$f(x)$ が n 次式 ($n \neq 0$) であるとして

$$f(x) = ax^n + \dots \quad \text{とおく}$$

最高次の項は

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 2x \cdot anx^{n-1} \\ &= 2anx^n \\ (\text{右辺}) &= 5ax^n + ax^n \\ &= 6ax^n \end{aligned}$$

よって

$$2an = 6a$$

$$n = 3$$

つまり

$f(x)$ は 3 次式 であり

$$f(0) = -2 \quad \text{より}$$

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx - 2$$

と定める。

このとき

$$\begin{aligned} 2xf'(x) &= 2x(3ax^2 + 2bx + c) \\ &= 6ax^3 + 4bx^2 + 2cx \end{aligned}$$

$$5f(x) + f(x-2)$$

$$\begin{aligned} &= 5(ax^3 + bx^2 + cx - 2) \\ &\quad + a(x-2)^3 + b(x-2)^2 + c(x-2) - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 5ax^3 + 5bx^2 + 5cx - 10 \\ &\quad + ax^3 - 6ax^2 + 12ax - 8a \\ &\quad + bx^2 - 4bx + 4b \\ &\quad + cx - 2c \\ &\quad - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 6ax^3 + (-6a + 6b)x^2 \\ &\quad + (12a - 4b + 6c)x + (-8a + 4b - 2c - 12) \end{aligned}$$

$$2xf'(x) = 5f(x) + f(x-2) \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} 4b = -6a + 6b \\ 2c = 12a - 4b + 6c \\ 0 = -8a + 4b - 2c - 12 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = 3, \quad b = 9, \quad c = 0$$

よって

$$\underline{\underline{f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 2}}$$

a を実数とする。 xy 平面において、関数 $y=x^2$ と $y=-x^2+2ax-a$ のグラフをそれぞれ C_1, C_2 とする。

- (1) C_1 と C_2 が共有点をもたないような a の範囲を求めよ。
- (2) a が (1) で求めた範囲にあるとき、 C_1 と C_2 の両方に接する直線が 2 本存在することを示せ。
- (3) a が (1) で求めた範囲を動くとき、 C_1 と C_2 の両方に接する 2 本の直線の交点が描く図形を図示せよ。

(2015 東北大)

(1)

 C_1 と C_2 を連立して

$$x^2 = -x^2 + 2ax - a$$

$$2x^2 - 2ax + a = 0$$

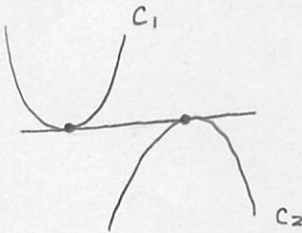
判別式 $D_1 < 0$ となるよ。

$$D_1/4 = a^2 - 2a < 0$$

$$a(a-2) < 0$$

$$0 < a < 2$$

(2) (証明)

 C_1 上の接点 (t, t^2) とおく。

$$y' = 2x$$

$$y'(x=t) = 2t$$

$$\text{接線 } y - t^2 = 2t(x - t)$$

$$y = 2tx - t^2$$

 C_2 と連立して

$$2tx - t^2 = -x^2 + 2ax - a$$

$$x^2 + (2t - 2a)x - t^2 + a = 0$$

接するとき 判別式 $D_2 = 0$ であり。

$$D_2/4 = (t-a)^2 - (-t^2+a)$$

$$= t^2 - 2at + a^2 + t^2 - a$$

$$= 2t^2 - 2at + a^2 - a = 0 \quad \text{--- ①}$$

① の判別式 D_3 とおくと

$$D_3/4 = a^2 - 2(a^2 - a)$$

$$= -a^2 + 2a$$

$$= a(2-a) > 0$$

$$(\because 0 < a < 2)$$

よて

① は つねに異なる2つの実数解をもつ。

つまり。

 C_1 と C_2 の共通接線は。

必ず 2 本存在する。

(3)

① の 2 解を t_1, t_2 とおくと

解と係数の関係より

$$t_1 + t_2 = a, \quad t_1 t_2 = \frac{a^2 - a}{2}$$

2 本の共通接線は

$$\begin{cases} y = 2t_1x - t_1^2 \\ y = 2t_2x - t_2^2 \end{cases}$$

とでき、交点は

$$2t_1x - t_1^2 = 2t_2x - t_2^2$$

$$2(t_1 - t_2)x = (t_1 + t_2)(t_1 - t_2)$$

 $t_1 \neq t_2$ より

$$x = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{a}{2}$$

= a とおき

$$y = 2t_1 \times \frac{t_1 + t_2}{2} - t_1^2$$

$$= t_1 t_2$$

$$= \frac{a^2 - a}{2}$$

よて

$$\begin{cases} a = 2x \\ y = \frac{a^2 - a}{2} \end{cases} \quad \text{であり}$$

(1) で $0 < a < 2$ より

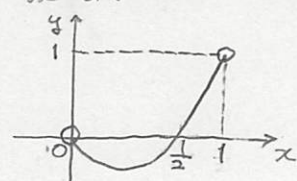
$$0 < 2x < 2$$

$$0 < x < 1$$

$$y = \frac{4x^2 - 2x}{2} = 2x^2 - x$$

つまり。

交点の軌跡は

放物弧 $y = 2x^2 - x$ ($0 < x < 1$)

曲線 $y = \frac{x^2}{2}$ ($x \leq 0$) 上に点 $P(a, \frac{a^2}{2})$ を、曲線 $y = x^2$ ($x \geq 0$) 上に点 $Q(b, b^2)$ をとる。P および Q における接線をそれぞれ ℓ , m とする。 ℓ と m の交点を R とし、 $\theta = \angle PRQ$ とする。 $2b - a = 4$ のとき、次の問いに答えよ。

- (1) θ を直角にする a の値を求めよ。
- (2) θ が直角でないとき、 $\tan \theta$ を a で表せ。
- (3) θ が最大および最小となる a の値をそれぞれ求めよ。

(2013 名古屋市立大)

(1)

 $y = \frac{x^2}{2}$ において接点 $P(a, \frac{a^2}{2})$

$$y' = x$$

$$y'(x=a) = a \quad (\leq 0)$$

 $y = x^2$ において接点 $Q(b, b^2)$

$$y' = 2x$$

$$y'(x=b) = 2b \quad (\geq 0)$$

よって

$$(\ell \text{ の傾き}) = a$$

$$(m \text{ の傾き}) = 2b$$

$$\ell \perp m \quad a \text{ と } b$$

$$a \cdot 2b = -1$$

$$\begin{pmatrix} \because \\ 2b - a = 4 \quad \text{より} \\ 2b = a + 4 \\ b \geq 0 \quad \text{より} \\ a + 4 \geq 0 \\ a \geq -4 \\ a \leq 0 \quad \text{とあわせて} \\ -4 \leq a \leq 0 \end{pmatrix}$$

$$a(a+4) = -1$$

$$a^2 + 4a + 1 = 0$$

$$a = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$-4 \leq a \leq 0 \quad \text{より}$$

$$\underline{a = -2 \pm \sqrt{3}}$$

(2)

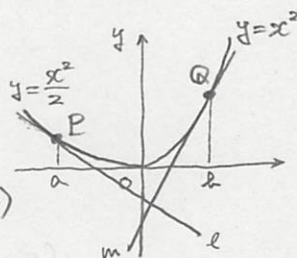
 ℓ, m と x 軸正方向とのなす角をそれぞれ α, β とおくと

$$\tan \alpha = a, \quad \tan \beta = 2b$$

$$\theta = \alpha - \beta$$

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$



$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{a - 2b}{1 + a \cdot 2b} \\ &= \frac{a - (a+4)}{1 + a(a+4)} \\ &= \frac{-4}{a^2 + 4a + 1} \end{aligned}$$

(3)

$$a^2 + 4a + 1 = (a+2)^2 - 3$$

(頂点 $(-2, -3)$
軸: $a = -2$, 下に凸)



$$\begin{pmatrix} \text{Max} = 1 & (a = -4, 0) \\ \text{min} = -3 & (a = -2) \end{pmatrix}$$

よって

$$-3 \leq a^2 + 4a + 1 \leq 1$$

$$\theta = 90^\circ \quad a \text{ と } b \quad a = -2 + \sqrt{3} \quad \text{などあり}$$

$$a^2 + 4a + 1 = 0$$

$$a^2 + 4a + 1 \neq 0 \quad a \text{ と } b$$

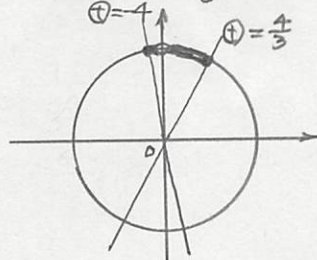
$$-3 \leq a^2 + 4a + 1 < 0, \quad 0 < a^2 + 4a + 1 \leq 1$$

$$\frac{1}{a^2 + 4a + 1} \leq -\frac{1}{3}, \quad 1 \leq \frac{1}{a^2 + 4a + 1}$$

$$\frac{-4}{a^2 + 4a + 1} \geq \frac{4}{3}, \quad -4 \geq \frac{-4}{a^2 + 4a + 1}$$

より

$$\tan \theta \leq -4, \quad \frac{4}{3} \leq \tan \theta$$



$$\begin{pmatrix} \theta \text{ が最大 } a \text{ と } b \quad \tan \theta = -4 \\ \theta \text{ が最小 } a \text{ と } b \quad \tan \theta = \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$\tan \theta = -4 \quad \alpha \text{ とき}$$

$$\frac{-4}{a^2+4a+1} = -4$$

$$a^2+4a+1=1$$

$$a(a+4)=0$$

$$a=0, -4$$

$$-4 \leq a \leq 0 \quad \text{より}$$

$$a=0, -4$$

$$\tan \theta = \frac{4}{3} \quad \alpha \text{ とき}$$

$$\frac{-4}{a^2+4a+1} = \frac{4}{3}$$

$$a^2+4a+1=-3$$

$$a^2+4a+4=0$$

$$(a+2)^2=0$$

$$a=-2$$

$$-4 \leq a \leq 0 \quad \text{より}$$

$$a=-2$$

よ、2

$$\left| \begin{array}{ll} \theta \text{ が最大 } \alpha \text{ とき} & a=-4, 0 \\ \theta \text{ が最小 } \alpha \text{ とき} & a=-2 \end{array} \right.$$

$$\underline{\underline{a=-2}}$$