

- (1) $f(x) = x^3 + kx^2 + x + 2$ が常に単調に増加するように、定数 k の値の範囲を定めよ。
 (2) 関数 $y = -2x^3 + 3ax^2 - 6$ が $x > 0$ で単調に減少するような定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)

$$f(x) = x^3 + kx^2 + x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx + 1$$

$f'(x)$ の符号!

常に単調に増加するためには

$$f'(x) = 0 \text{ の判別式 } D \leq 0$$

となるとよい。

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= k^2 - 3 \\ &= (k + \sqrt{3})(k - \sqrt{3}) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{-\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}}$$

(2) **解法1**

$$y = -2x^3 + 3ax^2 - 6$$

$$y' = -6x^2 + 6ax$$

$$= -6x(x - a)$$

$x > 0$ で単調に減少するためには

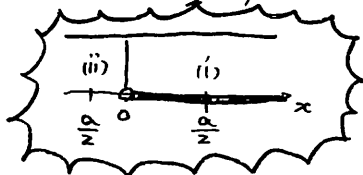
$$x > 0 \text{ のとき } y' \leq 0$$

となるとよい。 ———— ⑧

$$\begin{aligned} y' &= -6x^2 + 6ax \\ &= -6\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}a^2 \end{aligned}$$

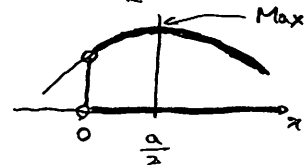
頂点 $\left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a^2\right)$

軸: $x = \frac{a}{2}$, 上に凸



(i) $0 \leq \frac{a}{2}$ のとき

(つまり $0 \leq a$ のとき)



$$\text{Max} = \frac{3}{2}a^2 \quad (x = \frac{a}{2})$$

より,

$$\frac{3}{2}a^2 \leq 0$$

$$a^2 \leq 0$$

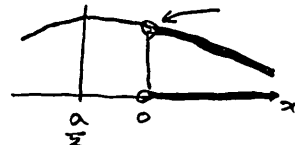
$$\therefore a = 0$$

$$0 \leq a \text{ のとき}$$

$$a = 0$$

(ii) $\frac{a}{2} \leq 0$ のとき

(つまり $a \leq 0$ のとき)



$$y'(x=0) = 0$$

$$\therefore x > 0 \text{ のとき } y' < 0 \text{ が満たす。}$$

より,

$$a \leq 0$$

(i), (ii) より

$$\underline{a \leq 0}$$

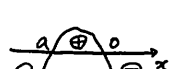
解法2 (⑧以降)

y' の符号!

$$a > 0 \text{ のとき}$$

$$a = 0 \text{ のとき}$$

$$a < 0 \text{ のとき}$$



より,

$$\underline{a \leq 0}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題88]

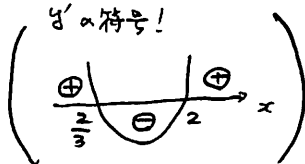
- (1) 関数 $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ の増減を調べて、そのグラフの概形をかけ。
- (2) 関数 $y = x^3 + \boxed{}x^2 - 24x + \boxed{}$ は $x = \boxed{}$ で極小値 2 をとり、 $x = -4$ で極大値 $\boxed{}$ をとる。
- (3) 関数 $f(x) = x(x-a)^2 + b$ が $x = -1$ で極小値 5 をとるとき、定数 a, b の値を求めよ。

(1)

$$y = x^3 - 4x^2 + 4x$$

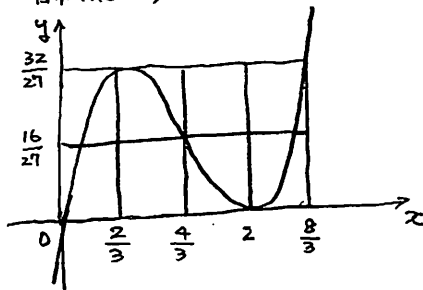
$$y' = 3x^2 - 8x + 4$$

$$= (3x-2)(x-2)$$



x	$\dots$	$\frac{2}{3}$	$\dots$	2	$\dots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より



(2)

$$y = x^3 + ax^2 - 24x + b \quad \text{とおく}$$

$$y' = 3x^2 + 2ax - 24$$

$x = -4$ で極値をとるから

$$y'(-4) = 48 - 8a - 24$$

$$= 24 - 8a = 0$$

$$a = 3 \quad (\text{必要})$$

逆にこのとき

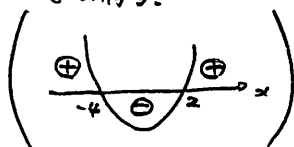
$$y = x^3 + 3x^2 - 24x + b$$

$$y' = 3x^2 + 6x - 24$$

$$= 3(x^2 + 2x - 8)$$

$$= 3(x+4)(x-2)$$

y' の符号!



x	$\dots$	-4	$\dots$	2	$\dots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$b+80$	$\searrow$	$b-28$	$\nearrow$

増減表より

確かに $x = -4$ で極大値をとる

$$\therefore a = 3 \quad (\text{十分})$$

このとき

$x = 2$ で極小値 2 をとるから

$$b - 28 = 2$$

$$b = 30$$

よって

$$b + 80 = 30 + 80 = 110$$

以上より

$$\underline{\underline{a: 3, \quad b: 110}}$$

(3)

$$f(x) = x(x-a)^2 + b$$

$$f'(x) = (x-a)^2 + x \cdot 2(x-a)$$

$$= (x-a)(x-a+2x)$$

$$= (x-a)(3x-a)$$

$x = -1$ で極小値 5 をとるから

$$f(-1) = 5 \quad \text{かつ} \quad f'(-1) = 0$$

$$f(-1) = 5 \quad \text{より}$$

$$-1(-1-a)^2 + b = 5$$

$$b = 5 + (a+1)^2 \quad \text{--- ①}$$

$$f'(-1) = 0 \quad \text{より}$$

$$(-1-a)(-3-a) = 0$$

$$(a+1)(a+3) = 0$$

$$a = -1, -3 \quad (\text{必要})$$

(裏に続く)

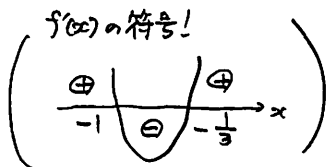
(i) $a = -1$ のとき ① より

$$b = 5$$

逆に a のとき

$$f(x) = x(x+1)^2 + 5$$

$$f'(x) = (x+1)(3x+1)$$



x	...	-1	...	$-\frac{1}{3}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

増減表より

$x = -1$ で極小値をとらない

よって

$$a \neq -1.$$

(ii) $a = -3$ のとき ① より

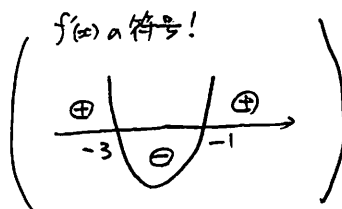
$$b = 9$$

逆に a のとき

$$f(x) = x(x+3)^2 + 9$$

$$f'(x) = (x+3)(3x+3)$$

$$= 3(x+3)(x+1)$$



x	...	-3	...	-1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

増減表より

確かに $x = -1$ で極小値をとる.

よって

$$a = -3, b = 9. (+分)$$

(i), (ii) より

$$\underline{a = -3, b = 9}$$

p, q を定数とし、 $p \neq 0$ とする。関数 $f(x) = px^3 - qx + p$ は $x = \alpha$ で極大値 q をもつとする。このとき、 α の値を求めよ。また、そのときの q を p で表せ。

(2004 西南学院大)

$$f(x) = px^3 - qx + p$$

$$f'(x) = 3px^2 - q$$

$x = \alpha$ で極大値 q をもつので

$$f(\alpha) = q \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha) = 0$$

$$f(\alpha) = q \quad \text{より}$$

$$p\alpha^3 - q\alpha + p = q$$

$$p(\alpha^3 + 1) - q(\alpha + 1) = 0$$

$$p(\alpha + 1)(\alpha^2 - \alpha + 1) - q(\alpha + 1) = 0$$

$$(\alpha + 1)(p\alpha^2 - p\alpha + p - q) = 0$$

$$\alpha = -1 \quad \text{or} \quad q = p\alpha^2 - p\alpha + p$$

$$f'(\alpha) = 0 \quad \text{より}$$

$$3p\alpha^2 - q = 0$$

$$q = 3p\alpha^2 \quad (\text{必要})$$

$$(i) \quad \alpha = -1 \quad \alpha \text{ とき}$$

$$q = 3p$$

逆にこのとき

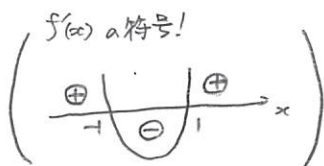
$$f(x) = px^3 - 3px + p$$

$$f'(x) = 3px^2 - 3p$$

$$= 3p(x^2 - 1)$$

$$= 3p(x+1)(x-1)$$

$$(p) \quad p > 0 \quad \alpha \text{ とき}$$



x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

増減表より

確かに $x = \alpha (= -1)$ で

極大値をとる。

$$(r) \quad p < 0 \quad \alpha \text{ とき}$$



$$x = \alpha (= -1) \quad \alpha \text{ とき}$$

極小値をとることとなり不合理。

$$(ii) \quad q = p\alpha^2 - p\alpha + p \quad \alpha \text{ とき}$$

$$3p\alpha^2 = p\alpha^2 - p\alpha + p$$

$$2p\alpha^2 + p\alpha - p = 0$$

$$p \neq 0 \quad \text{より}$$

$$2\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$(2\alpha - 1)(\alpha + 1) = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, -1$$

$$\alpha = -1 \quad \alpha \text{ ときは (i) で調べたので}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \alpha \text{ とき}$$

$$q = \frac{1}{4}p - \frac{1}{2}p + p = \frac{3}{4}p$$

逆にこのとき

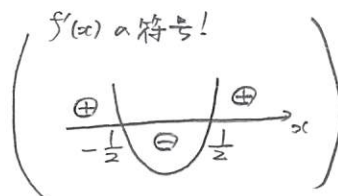
$$f(x) = px^3 - \frac{3}{4}px + p$$

$$f'(x) = 3px^2 - \frac{3}{4}p$$

$$= \frac{3}{4}p(4x^2 - 1)$$

$$= \frac{3}{4}p(2x+1)(2x-1)$$

$$(v) \quad p > 0 \quad \alpha \text{ とき}$$

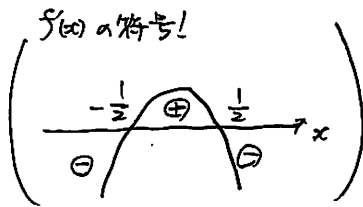


x	...	-1/2	...	1/2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

(裏に続く)

$x = \alpha (= \frac{1}{2})$ で極小値をとる
こととなり不合理

(E) $p < 0$ のとき



確かに $x = \alpha (= \frac{1}{2})$ で極大値をとる。

以上より

$$\begin{cases} \alpha = -1, g = 3p & (p > 0) \\ \alpha = \frac{1}{2}, g = \frac{3}{4}p & (p < 0) \end{cases}$$

関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$ について、次の問いに答えよ。ただし、 a は定数である。

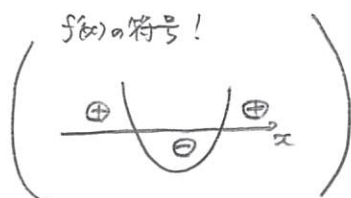
- (1) $f(x)$ が極大値と極小値をもつような a のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $f(x)$ が極大値と極小値をとるとき x の値をそれぞれ α, β ($\alpha < \beta$) とする。 $\alpha + \beta$ および $\alpha\beta$ を a で表せ。
- (3) $f(x)$ の極大値と極小値の和が 0 となるとき、 a の値を求めよ。

(2016 鳥取環境大)

(1)

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + a$$



極大値と極小値をもつためには

$$f'(x) = 0 \text{ の判別式 } D > 0$$

となるよ。

$$D = 9 - 3a > 0$$

$$\underline{\underline{a < 3}}$$

解法2

$y = f(x)$ のグラフは

極値をとる2点 $(\alpha, f(\alpha)), (\beta, f(\beta))$

の midpoint において対称であり、

$$\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

を満たす。

$$f(\alpha) + f(\beta) = 0 \text{ より } \alpha + \beta = -2 \text{ より}$$

$$0 = f(-1)$$

$$f(-1) = -1 + 3 - a = 0$$

$$\underline{\underline{a = 2}}$$

(2)

$$f'(x) = 0 \text{ の2解 } x = \alpha, \beta \text{ であり、}$$

解と係数の関係より

$$\underline{\underline{\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = \frac{a}{3}}}$$

(3) 解法1

$$f(\alpha) + f(\beta)$$

$$= (\alpha^3 + 3\alpha^2 + a\alpha) + (\beta^3 + 3\beta^2 + a\beta)$$

$$= (\alpha^3 + \beta^3) + 3(\alpha^2 + \beta^2) + a(\alpha + \beta)$$

$$= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + 3\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + a(\alpha + \beta)$$

$$= -8 - 3 \times \frac{a}{3} \times (-2) + 3\left(4 - \frac{2}{3}a\right) - 2a$$

$$= -8 + 2a + 12 - 2a - 2a$$

$$= -2a + 4 = 0$$

$$\underline{\underline{a = 2}}$$

関数 $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減および極値を調べて、そのグラフの概形をかけ。
- (2) t を定数とする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(t, f(t))$ における接線 ℓ の方程式を、 t を用いて表せ。
- (3) (2) で求めた接線 ℓ と関数 $y = f(x)$ のグラフが、異なる3つの共有点をもつための t の条件を求めよ。

(2017 静岡大)

(1)

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$$

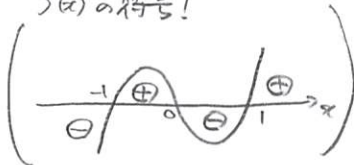
$$= (x^2-1)^2$$

$$= x^4 - 2x^2 + 1$$

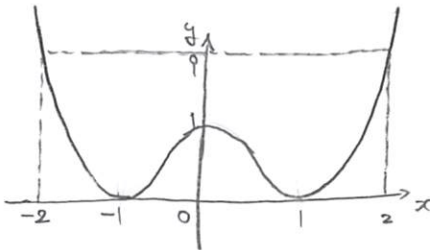
$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$= 4x(x^2-1)$$

$$= 4x(x+1)(x-1)$$

 $f'(x)$ の符号!

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗	1	↘	0	↗



(2)

接点 $(t, t^4 - 2t^2 + 1)$

$$f'(x=t) = 4t^3 - 4t$$

$$\ell: y - (t^4 - 2t^2 + 1) = (4t^3 - 4t)(x - t)$$

$$y = (4t^3 - 4t)x - 3t^4 + 2t^2 + 1$$

(3)

 $y = f(x)$ と ℓ を連立して

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (4t^3 - 4t)x - 3t^4 + 2t^2 + 1$$

$$x^4 - 2x^2 + (-4t^3 + 4t)x + 3t^4 - 2t^2 = 0$$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} t & 1 & 0 & -2 & -4t^3+4t & 3t^4-2t^2 \\ & & t & t^2 & t^3-2t & -3t^4+2t^2 \\ \hline t & 1 & t & t^2-2 & -3t^3+2t & 0 \\ & & t & 2t^2 & 3t^3-2t & \\ \hline & 1 & 2t & 3t^2-2 & 0 & \end{array} \right)$$

$$(x-t)^2(x^2+2tx+3t^2-2)=0$$

$$x=t \text{ or } x^2+2tx+3t^2-2=0$$

異なる3つの共有点をもつためには、

$$x^2+2tx+3t^2-2=0$$

が $x \neq t$ なる異なる2つの実数解をもつとよい。

$$\left(\begin{array}{l} x=t \text{ のとき} \\ t^2+2t^2+3t^2-2=0 \\ 6t^2-2=0 \\ t^2=\frac{1}{3} \\ t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \text{よって } t \neq \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right)$$

判別式 $D > 0$ より

$$D/4 = t^2 - (3t^2 - 2)$$

$$= -2t^2 + 2 > 0$$

$$t^2 - 1 < 0$$

$$(t+1)(t-1) < 0$$

$$-1 < t < 1$$

よって

$$\underline{-1 < t < -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} < t < 1}$$

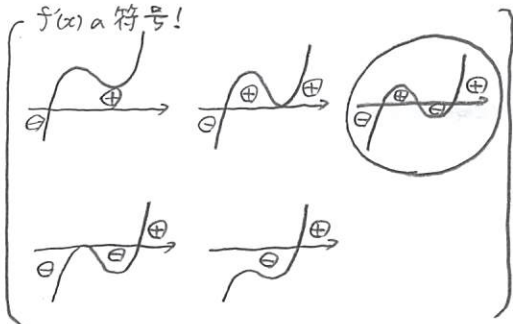
a, b を実数とする。 x の4次関数 $f(x) = x^4 - ax^2 + bx$ が極大値をもつための必要十分条件を、 a と b に関する不等式で表せ。

(2012 東京理科大)

$$f(x) = x^4 - ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 4x^3 - 2ax + b$$

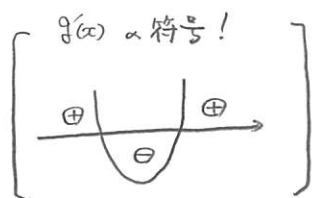
$f'(x)$ の符号!



$f'(x) = 0$ が異なる3つの解をもつとよい。

$$f'(x) = g(x) \quad \text{とおく}$$

$$g(x) = 4x^3 - 2ax$$



条件を満たすには、

$$2a > 0$$

つまり $a > 0$ が必要。

$$g'(x) = 0 \quad \text{より}$$

$$12x^2 - 2a = 0$$

$$x^2 = \frac{a}{6} \quad \text{すなわち } x = \pm \sqrt{\frac{a}{6}}$$

$g(x)$ は

$$\begin{cases} x = -\sqrt{\frac{a}{6}} & \text{で極大} \\ x = \sqrt{\frac{a}{6}} & \text{で極小} \end{cases}$$

となり、

$$g\left(-\sqrt{\frac{a}{6}}\right) > 0, \quad \text{かつ } g\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) < 0$$

となるとよい。

$$g\left(-\sqrt{\frac{a}{6}}\right) = 4\left(-\frac{a\sqrt{a}}{6\sqrt{6}}\right) - 2a\left(-\sqrt{\frac{a}{6}}\right) + b$$

$$= -\frac{a\sqrt{6a}}{9} + \frac{2a\sqrt{6a}}{3} + b$$

$$= \frac{2a\sqrt{6a}}{9} + b > 0$$

$$\text{よって } b > -\frac{2a\sqrt{6a}}{9}$$

$$g\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) = 4\left(\frac{a\sqrt{a}}{6\sqrt{6}}\right) - 2a\sqrt{\frac{a}{6}} + b$$

$$= \frac{a\sqrt{6a}}{9} - \frac{2a\sqrt{6a}}{3} + b$$

$$= -\frac{2a\sqrt{6a}}{9} + b < 0$$

$$\text{よって } b < \frac{2a\sqrt{6a}}{9}$$

$a > 0$ より

$$-\frac{2a\sqrt{6a}}{9} < \frac{2a\sqrt{6a}}{9} \quad \text{となる}$$

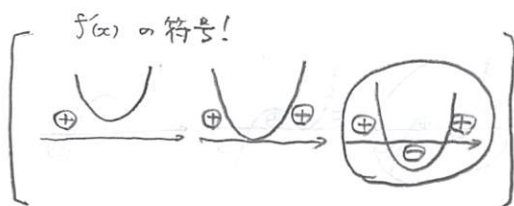
$$\underline{\underline{a > 0 \text{ かつ } -\frac{2a\sqrt{6a}}{9} < b < \frac{2a\sqrt{6a}}{9}}}$$

3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ は極大値と極小値をもち、それらを区間 $-1 \leq x \leq 1$ 内にとるものとする。この条件を満たすような実数の組 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ。

(東京大)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$



$$f'(x) = 0 \quad \text{が} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{で}$$

異なる2つの実数解をもつとよい。

そのためには

$$\begin{cases} \text{判別式 } D > 0 & \text{--- ①} \\ -1 \leq \text{軸} \leq 1 & \text{--- ②} \\ f'(-1) \geq 0 & \text{--- ③} \\ f'(1) \geq 0 & \text{--- ④} \end{cases}$$

① より

$$D/4 = a^2 - 3b > 0$$

$$b < \frac{1}{3}a^2$$

② より

$$-1 \leq -\frac{a}{3} \leq 1$$

$$-3 \leq a \leq 3$$

③ より

$$3 - 2a + b \geq 0$$

$$b \geq 2a - 3$$

④ より

$$3 + 2a + b \geq 0$$

$$b \geq -2a - 3$$

ここで

$$b = \frac{1}{3}a^2 \quad \text{と} \quad b = 2a - 3 \quad \text{を連立して}$$

$$\frac{1}{3}a^2 = 2a - 3$$

$$a^2 - 6a + 9 = 0$$

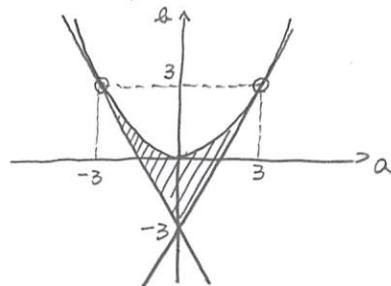
$$(a - 3)^2 = 0$$

$$a = 3$$

$$b = \frac{1}{3}a^2 \quad \text{と} \quad b = -2a - 3 \quad \text{も同様に}$$

$$a = -3$$

① ~ ④ より



求める (a, b) の存在範囲は

図の斜線部。

ただし、境界は放物線上の点

を除いて含む。

a, b, c を実数とし, β, m をそれぞれ $0 < \beta < 1, m > 0$ を満たす実数とする。また, 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x = \beta, -\beta$ で極値をとり, $f(-1) = f(\beta) = -m, f(1) = f(-\beta) = m$ を満たすとする。

(1) a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ は, $-1 \leq x \leq 1$ に対して $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$ を満たすとする。

$h(x) = f(x) - g(x)$ とおくと, $h(-1), h(-\beta), h(\beta), h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより, $h(x)$ を求めよ。

(2017 筑波大)

(1) **解法1**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$x = \beta, -\beta$ で極値をとるから

$$\begin{cases} f(\beta) = 0 \\ f(-\beta) = 0 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} 3\beta^2 + 2a\beta + b = 0 & \text{--- ①} \\ 3\beta^2 - 2a\beta + b = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\beta^2 + 2a\beta + b = 0 & \text{--- ①} \\ 3\beta^2 - 2a\beta + b = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

① - ② より

$$4a\beta = 0$$

$$0 < \beta < 1 \text{ より } a = 0$$

よって ①, ② は ともに

$$3\beta^2 + b = 0 \text{ より } b = -3\beta^2 \text{ --- ③}$$

また $f(x) = x^3 + bx + c$

$$f(-1) = f(\beta) = -m \text{ より}$$

$$-1 - b + c = \beta^3 + b\beta + c = -m$$

つまり

$$\begin{cases} -1 - b + c = -m & \text{--- ④} \\ \beta^3 + b\beta + c = -m & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

$$f(1) = f(-\beta) = m \text{ より}$$

$$1 + b + c = -\beta^3 - b\beta + c = m$$

つまり

$$\begin{cases} 1 + b + c = m & \text{--- ⑥} \\ -\beta^3 - b\beta + c = m & \text{--- ⑦} \end{cases}$$

⑤ + ⑦ より

$$2c = 0 \text{ より } c = 0$$

よって ⑤, ⑦ は ともに

$$\beta^3 + b\beta = -m \text{ --- ⑧}$$

また, ④, ⑥ も ともに

$$1 + b = m$$

③ とあわせて

$$m = 1 - 3\beta^2 \text{ --- ⑨}$$

③, ④ を ⑨ に代入して

$$\beta^3 - 3\beta^3 = -1 + 3\beta^2$$

$$2\beta^3 + 3\beta^2 - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ & -2 & -1 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\beta + 1)(2\beta^2 + \beta - 1) = 0$$

$$(\beta + 1)^2(2\beta - 1) = 0$$

$$\beta = -1, \frac{1}{2}$$

$$0 < \beta < 1 \text{ より } \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{③ より } b = -\frac{3}{4}$$

$$\text{⑨ より } m = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} (> 0)$$

$$\therefore a = 0, b = -\frac{3}{4}, c = 0, \beta = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x) = x^3 - \frac{3}{4}x \text{ であり}$$

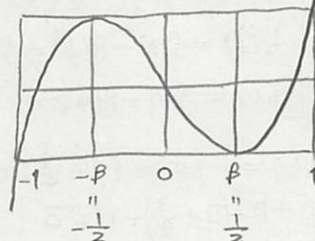
$$f(x) = 3x^2 - \frac{3}{4} = 3(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$$

となり, $x = \pm \beta$ で極値をとる。

$$\therefore a = 0, b = -\frac{3}{4}, c = 0, \beta = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4}$$

(2) **解法1**

(1) より



$-1 \leq x \leq 1$ で $f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$ を満たすから

$$\begin{cases} f(-1) \leq g(-1) \\ f(-\beta) \leq g(-\beta) \\ f(\beta) \leq g(\beta) \\ f(1) \leq g(1) \end{cases} \iff \begin{cases} h(-1) \leq 0 \\ h(-\beta) \leq 0 \\ h(\beta) \leq 0 \\ h(1) \leq 0 \end{cases} \quad \text{--- (A)}$$

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

$$= (x^3 - \frac{3}{4}x) - (x^3 + px^2 + qx + r)$$

$$= -px^2 + (-\frac{3}{4} - q)x - r$$

となり、高々 2 次関数 であるが

条件 ④ を満たす a は

関数 $h(x)$ が恒等的に 0

であるときに限る。

よって

$$h(x) = 0$$

(1) **解法 2** ④ の部分。

$f(x) = 0$ は $x = \beta, -\beta$ を解にもつ a である

解と係数の関係により

$$\begin{cases} \beta + (-\beta) = -\frac{2}{3}a \\ \beta(-\beta) = \frac{a}{3} \end{cases}$$

よって

$$a = 0, a = -3\beta^2$$

(2) **解法 2**

$f(-1) \leq g(x) \leq f(1)$ より

$$\begin{cases} h(-1) = f(-1) - g(-1) \leq 0 \\ h(-\beta) = f(-\beta) - g(-\beta) = f(1) - g(-\beta) \geq 0 \\ h(\beta) = f(\beta) - g(\beta) = f(-1) - g(\beta) \leq 0 \\ h(1) = f(1) - g(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$h(x) = -px^2 - (q + \frac{3}{4})x - r \quad \text{である。}$$

$$\begin{cases} -p + (q + \frac{3}{4}) - r \leq 0 & \text{--- ⑦} \\ -\frac{p}{4} + \frac{1}{2}(q + \frac{3}{4}) - r \geq 0 & \text{--- ⑧} \\ -\frac{p}{4} - \frac{1}{2}(q + \frac{3}{4}) - r \leq 0 & \text{--- ⑨} \\ -p - (q + \frac{3}{4}) - r \geq 0 & \text{--- ⑩} \end{cases}$$

$$\text{⑩} \times (-1) \quad p + q + \frac{3}{4} + r \leq 0$$

$$\text{⑦} \quad -p + q + \frac{3}{4} - r \leq 0 \quad (+)$$

$$2(q + \frac{3}{4}) \leq 0$$

$$q \leq -\frac{3}{4} \quad \text{--- ⑪}$$

$$\text{⑧} \times (-1) \quad \frac{p}{4} + \frac{1}{2}(q + \frac{3}{4}) + r \geq 0$$

$$\text{⑦} \quad -\frac{p}{4} + \frac{1}{2}(q + \frac{3}{4}) - r \leq 0 \quad (+)$$

$$q + \frac{3}{4} \geq 0$$

$$q \geq -\frac{3}{4} \quad \text{--- ⑫}$$

⑪, ⑫ より

$$q = -\frac{3}{4}$$

これと ⑦, ⑩ より

$$\begin{cases} -p - r \leq 0 \\ -p - r \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad -p - r = 0 \quad \text{--- ⑬}$$

⑪, ⑫ より

$$\begin{cases} -\frac{p}{4} - r \geq 0 \\ -\frac{p}{4} - r \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{よって} \quad -\frac{p}{4} - r = 0 \quad \text{--- ⑭}$$

⑬, ⑭ より

$$p = r = 0$$

つまり

$$h(x) = 0$$

関数 $f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$ を考える。

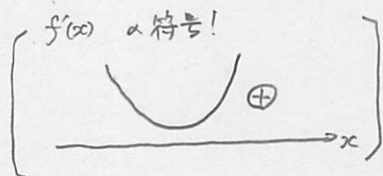
(2001 九州大)

- (1) 関数 $f(x)$ が常に増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。
 (2) $a=0$ のとき、関数 $f(x)$ が $x > -1$ において常に増加するための b の条件を求めよ。
 (3) 関数 $f(x)$ が $x > -1$ において常に増加するための a, b の条件を求め、その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(1)

$$f(x) = \frac{2}{3}ax^3 + (a+b)x^2 + (b+1)x$$

$$f'(x) = 2ax^2 + 2(a+b)x + (b+1)$$

 $f(x)$ が常に増加するためには

$$(i) \begin{cases} 2a > 0 \\ f'(x) = 0 \text{ の判別式 } D \leq 0 \end{cases}$$

or

$$(ii) \begin{cases} 2a = 0 \\ 2(a+b) = 0 \\ b+1 > 0 \end{cases}$$

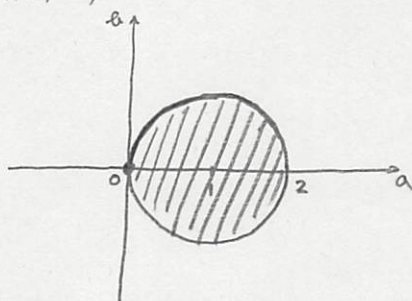
(i) より

$$\begin{cases} a > 0 \\ \frac{D}{4} = (a+b)^2 - 2a(b+1) \\ = a^2 + b^2 - 2a \leq 0 \\ (a-1)^2 + b^2 \leq 1 \end{cases}$$

(ii) より

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -a = 0 \\ b > -1 \end{cases}$$

(i), (ii) より



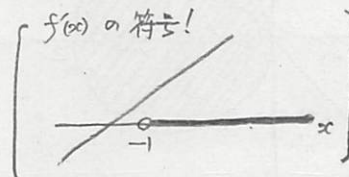
求める領域は図の斜線部
 ただし、境界を含む。

(2)

 $a=0$ のとき

$$f(x) = bx^2 + (b+1)x$$

$$f'(x) = 2bx + b+1$$

 $f(x)$ が $x > -1$ で常に増加するためには

$$(i) \begin{cases} 2b = 0 \\ b+1 > 0 \end{cases}$$

or

$$(ii) \begin{cases} 2b > 0 \\ f'(-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$(i) \text{ より } b = 0$$

$$(ii) \text{ より } 0 < b \leq 1$$

(i), (ii) より

$$\underline{0 \leq b \leq 1}$$

(3)

 $f(x)$ が $x > -1$ で常に増加するためには

$$2a \geq 0$$

i.e. $a \geq 0$ が必要

$$[I] \ a = 0 \text{ のとき}$$

$$(2) \text{ より } 0 \leq b < 1$$

$$[II] \ a > 0 \text{ のとき 下に }\square$$

$$\text{軸: } x = \frac{-a-b}{2a}$$

$$(i) \ \frac{-a-b}{2a} \leq -1 \text{ のとき}$$

$$(i.e. \ b \geq a \text{ のとき})$$

$$f'(-1) \geq 0 \text{ となるように}$$

$$-2b + b + 1 \geq 0$$

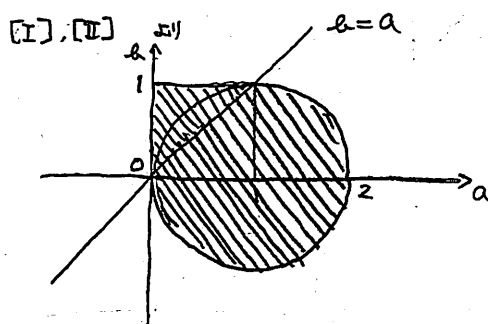
$$b \leq 1$$

$$(ii) \frac{-a-b}{2a} > -1 \quad a \neq 0$$

$$(i.e. \quad b < a \quad a \neq 0)$$

$$f'(a) = 0 \quad a \neq 0 \text{ 則式 } D \leq 0 \quad \text{となる} \quad \text{とある}$$

$$\text{よって} \quad (a-1)^2 + b^2 \leq 1$$



求める領域は図の斜線部
ただし、境界を含む。