

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題89]

- (1) 関数 $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x + 10$ の区間 $-2 \leq x \leq 2$ における最大値と最小値を求めよ。
 (2) 関数 $f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 10$ の区間 $-2 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値、およびそのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(1)

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x + 10$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^2 + 12x + 15 \\ &= -3(x^2 - 4x - 5) \\ &= -3(x+1)(x-5) \end{aligned}$$

$f'(x)$ の符号!

x	-2	...	-1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	12	↘	2	↗	56

増減表より

$$\begin{cases} \text{Max} = 56 & (x=2) \\ \text{min} = 2 & (x=-1) \end{cases}$$

(2)

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 10$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x - 8 \\ &= 4(x^3 - 3x - 2) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} &= 4(x+1)(x^2-x-2) \\ &= 4(x+1)^2(x-2) \end{aligned}$$

$f'(x)$ の符号!

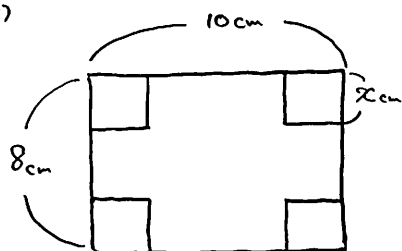
x	-2	...	-1	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	+	
$f(x)$	18	↘		↘	-14	↗	13

増減表より

$$\begin{cases} \text{Max} = 18 & (x=-2) \\ \text{min} = -14 & (x=2) \end{cases}$$

- (1) 2辺の長さが10 cm と8 cm である長方形の紙の四隅から、合同な正方形を切り取った残りで、ふたのない直方体の箱を作る。この箱の容積を最大にするには、切り取る正方形の1辺を何 cm にすればよいか。
- (2) 半径3の球に内接する円柱の体積の最大値を求めよ。

(1)



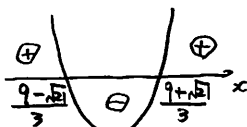
$$0 < 2x < 8 \quad \text{よ} \quad 0 < x < 4$$

体積 V は

$$\begin{aligned} V &= (8-2x)(10-2x)x \\ &= 4x^3 - 36x^2 + 80x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= 12x^2 - 72x + 80 \\ &= 4(3x^2 - 18x + 20) \end{aligned}$$

V' の符号!



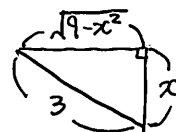
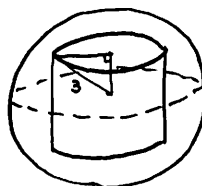
$$\begin{aligned} 3x^2 - 18x + 20 &= 0 \quad \text{とかく} \\ x &= \frac{9 \pm \sqrt{21}}{3} \end{aligned}$$

x	(0)	...	$\frac{9-\sqrt{21}}{3}$	...	(4)
V'		+	0	-	
V		↗		↘	

増減表より

$$\underline{\underline{x = \frac{9-\sqrt{21}}{3} \quad (\text{cm})}}$$

(2)



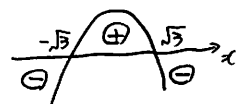
$$0 < x < 3 \quad \text{のもとで}$$

体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi (\sqrt{9-x^2})^2 \times 2x \\ &= 2\pi x(9-x^2) \\ &= -2\pi x^3 + 18\pi x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V' &= -6\pi x^2 + 18\pi \\ &= -6\pi(x^2 - 3) \end{aligned}$$

V' の符号!



x	(0)	...	$\sqrt{3}$	...	(3)
V'		+	0	-	
V		↗	$12\sqrt{3}\pi$	↘	

よって

$$\underline{\underline{\text{Max } V = 12\sqrt{3}\pi \quad (x = \sqrt{3} \text{ のとき)}}$$

(1) $1 \leq x \leq 4$ のとき、関数 $y = (\log_2 x)^3 - \log_2 x^3 + 1$ の最大値、最小値と、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(2) $s > 0, t > 0, s+t=6$ のとき、 $\log_3 s + 2\log_3 t$ の最大値を求めよ。

(1) 2013 成城大

(2) 2016 福岡大

(1)

$X = \log_2 x$ とおくと

$x=4$ のとき
 $X = \log_2 4 = 2$
 $x=1$ のとき
 $X = \log_2 1 = 0$
 $\therefore$
 $0 \leq X \leq 2$

$$y = (\log_2 x)^3 - \log_2 x^3 + 1$$

$$= X^3 - 3X + 1$$

$$y' = 3X^2 - 3 = 3(X^2 - 1)$$

y' の符号!

X	0	...	1	...	2
y'	-		0	+	
y	1	↘	-1	↗	3

$\therefore$

$$\begin{cases} \text{Max} = 3 & (x=4) \\ \text{min} = -1 & (x=1) \end{cases}$$

∴

$X=2$ のとき
 $x=4$
 $X=1$ のとき
 $\log_2 x = 1$
 $\log_2 x = \log_2 2$
 $x=2$

$\therefore$

$$\begin{cases} \text{Max} = 3 & (x=4) \\ \text{min} = -1 & (x=2) \end{cases}$$

(2)

$s+t=6$ より
 $t=6-s$
 $s>0$ かつ $t>0$ より
 $s>0$ かつ $6-s>0$
 $\therefore 0 < s < 6$

∴

$$\log_3 s + 2\log_3 t$$

$$= \log_3 s + \log_3 (6-s)^2$$

$$= \log_3 s(6-s)^2$$

$$f(s) = s(6-s)^2$$

$$= s^3 - 12s^2 + 36s \quad \text{とおく}$$

$f(s)$ が最大なとき $\log_3 s + 2\log_3 t$ が最大

$$f'(s) = 3s^2 - 24s + 36$$

$$= 3(s^2 - 8s + 12)$$

$$= 3(s-2)(s-6)$$

$f'(s)$ の符号!

s	(0)	...	2	...	(6)
$f'(s)$		+	0	-	
$f(s)$		↗	32	↘	

$\therefore$

$$\text{Max} (\log_3 s + 2\log_3 t)$$

$$= \log_3 32$$

$$= \log_3 2^5$$

$$= 5 \log_3 2 \quad (s=2, t=4)$$

関数 $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ ($0 \leq x < 2\pi$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ として、 $\sin x \cos x$ と y をそれぞれ t の関数で表せ。
 (2) y の最大値と最小値、および、そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(2013 公立はこだて未来大)

(1)

$$t = \sin x + \cos x \quad \text{とおく。}$$

両辺を2乗して

$$t^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x$$

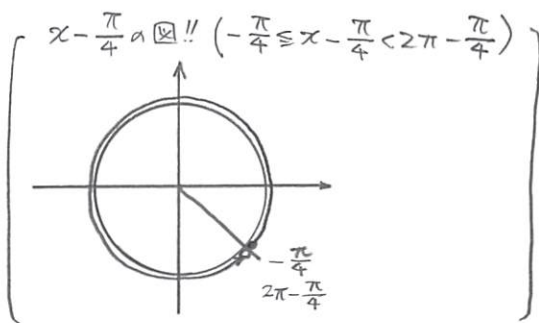
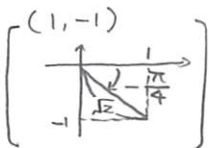
$$= (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$= t^3 - 3 \times \frac{t^2 - 1}{2} \times t$$

$$= -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

(2)

$$t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$



$$-1 \leq \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

よって

$$y = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

$$y' = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{3}{2}(t^2 - 1)$$



t	$-\sqrt{2}$	...	-1	...	1	...	$\sqrt{2}$
y'		-	0	+	0	-	
y	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

よって

$$\begin{cases} \text{Max} = 1 & (t = 1) \\ \text{min} = -1 & (t = -1) \end{cases}$$

ここで

$$t = 1 \text{ のとき}$$

$$\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = 1$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}$$

$$t = -1 \text{ のとき}$$

$$\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$$

$$x = \pi, \frac{3}{2}\pi$$

よって

$$\begin{cases} \text{Max} = 1 & (x = 0, \frac{\pi}{2}) \\ \text{min} = -1 & (x = \pi, \frac{3}{2}\pi) \end{cases}$$

a, b は定数とし, $0 < a < 1$ とする。関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + b$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) 区間 $-2 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の最大値が 1, 最小値が -5 となるような a, b の値を求めよ。 (2007 大阪市立大)

(1)

$$f(x) = x^3 + 3ax^2 + b$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax$$

$$= 3x(x + 2a)$$

$f'(x)$ の符号!

x	...	$-2a$	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$4a^3 + b$	$\searrow$	b

極大値 $4a^3 + b$ ($x = -2a$)
 極小値 b ($x = 0$)

(2) 解法1

$(0 < a < 1 \text{ より})$
 $(-2 < -2a < 0)$

x	-2	...	$-2a$	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{-8}{3} + 12a + b$	$\nearrow$	$4a^3 + b$	$\searrow$	b	$\nearrow$	$1 + 3a + b$

よって

$$\begin{cases} \text{Max}(4a^3 + b, 1 + 3a + b) = 1 \\ \text{min}(-\frac{8}{3} + 12a + b, b) = -5 \end{cases}$$

⊗ $f(-2) = -\frac{8}{3} + 12a + b = -5$

$$(4a^3 + b) - (1 + 3a + b) = 4a^3 - 3a - 1 = g(a) \quad \text{とおく}$$

$$g'(a) = 12a^2 - 3$$

$$= 3(4a^2 - 1)$$

$$= 3(2a+1)(2a-1)$$

$g'(a)$ の符号!

a	(0)	...	$\frac{1}{2}$	...	(1)
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$	(-1)	$\searrow$		$\nearrow$	(0)

よって

$$g(a) < 0 \text{ より}$$

$$4a^3 + b < 1 + 3a + b$$

つまり

$$1 + 3a + b = 1$$

$$b = -3a$$

(i) $-8 + 12a + b = -5$ とき

$$-8 + 12a - 3a = -5$$

$$9a = 3$$

$$a = \frac{1}{3}$$

これは $0 < a < 1$ を満たす。

このとき $b = -1$

(ii) $b = -5$ とき

$$-5 = -3a$$

$$a = \frac{5}{3}$$

これは $0 < a < 1$ に不合理

(i), (ii) より

$$\underline{a = \frac{1}{3}, b = -1}$$

解法2 ⊗ a部分

$$(4a^3 - b) - (1 + 3a + b) = 4a^3 - 3a - 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & -3 & -1 \\ & & 4 & 4 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$= (a-1)(4a^2 + 4a + 1)$$

$$= (a-1)(2a+1)^2 < 0 \quad (\because 0 < a < 1)$$

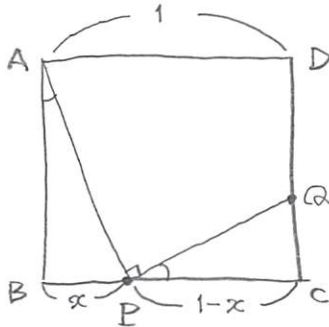
よって

$$4a^3 - b < 1 + 3a + b$$

1 辺の長さが1の正方形 ABCD を考える。点 P は、点 B, C を除いた辺 BC 上を動くとする。点 P を通り直線 AP と垂直な直線と辺 CD との交点を Q とする。線分 BP の長さを x とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle CPQ$ の面積 S を、 x を用いて表せ。
- (2) 面積 S の最大値と、そのときの x の値を求めよ。
- (3) 線分 AQ の長さ L の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

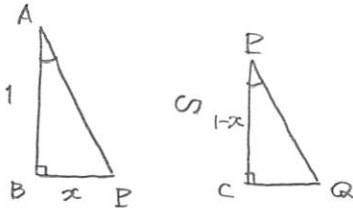
(2013 新潟大)



x	(0)	...	$\frac{1}{3}$	...	(1)
S'		+	0	-	
S		$\nearrow$	$\frac{2}{27}$	$\searrow$	

$$\text{よって } \underline{\underline{\text{Max } S = \frac{2}{27} \quad (x = \frac{1}{3})}}$$

(1)



$$1:x = (1-x):CQ$$

$$CQ = x(1-x)$$

よって

$$\underline{\underline{S = \frac{1}{2} x(1-x)^2}}$$

(2)

$$0 < x < 1 \text{ のとき}$$

$$S = \frac{1}{2} x(1-x)^2$$

$$= \frac{1}{2} x^3 - x^2 + \frac{1}{2} x$$

$$S' = \frac{3}{2} x^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (3x^2 - 4x + 1)$$

$$= \frac{1}{2} (3x-1)(x-1)$$

$$\left[\begin{array}{c} S' \text{ の符号!} \\ \oplus \quad \quad \quad \oplus \\ \quad \quad \quad \ominus \\ \frac{1}{3} \quad \quad \quad 1 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x \end{array} \right]$$

(3)

$$DQ = 1 - CQ$$

$$= 1 - x(1-x)$$

$$= x^2 - x + 1$$

 $\triangle ADQ$ は 平方の和 により

$$AQ^2 = 1 + (x^2 - x + 1)^2$$

$$L^2 = (x^2 - x + 1)^2 + 1$$

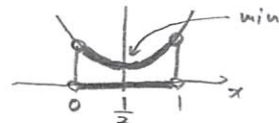
$$f(x) = x^2 - x + 1 \text{ とおく}$$

 $f(x)$ が 最小 のとき, L も 最小

$$f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$\text{頂点 } (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$$

$$\text{軸: } x = \frac{1}{2}, \text{ 下に凸}$$



$$\min f(x) = \frac{3}{4} \quad (x = \frac{1}{2})$$

よって

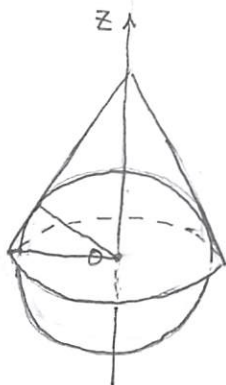
$$\min L = \sqrt{(\frac{3}{4})^2 + 1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{4} \quad (x = \frac{1}{2})}}$$

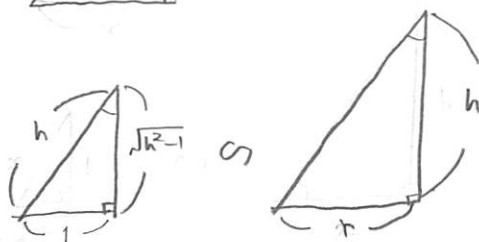
[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題34]

頂点が z 軸上にあり、底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が、原点を中心とする半径1の球に接している。円錐の体積 V の最小値を求めよ。

(2602 - 橋大)



円錐の高さを h とする. ($h > 1$)



$$1 : \sqrt{h^2 - 1} = r : h$$

$$r \sqrt{h^2 - 1} = h$$

$$r = \frac{h}{\sqrt{h^2 - 1}}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{\sqrt{h^2 - 1}} \right)^2 \cdot h$$

$$= \frac{\pi h^3}{3(h^2 - 1)}$$

$$= \frac{\pi}{3 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h^3} \right)}$$

$$\frac{1}{h} = x \quad \text{とおくと} \quad (0 < x < 1)$$

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{h^3} = x - x^3 = f(x) \quad \text{と置く}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 1$$

$$\left[\begin{array}{c} f(x) \text{ の符号!} \\ \begin{array}{c} \text{---} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \oplus \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \text{---} \\ \ominus \quad \quad \quad \ominus \end{array} x \end{array} \right]$$

x	(0)	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\dots$	(1)
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	(0)

増減表より

$$0 < f(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$0 < 3f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{3f(x)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{3f(x)} \geq \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

$$V \geq \frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

よって

$$\underline{\underline{\min V = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}}}$$

$a > 0$ である定数 a に対して、関数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - a^2x - \frac{2}{3}a^3$ を考える。

(1) $y = |f(x)|$ のグラフの概形をかけ。

(2) $-1 \leq x \leq 1$ における関数 $|f(x)|$ の最大値を求めよ。

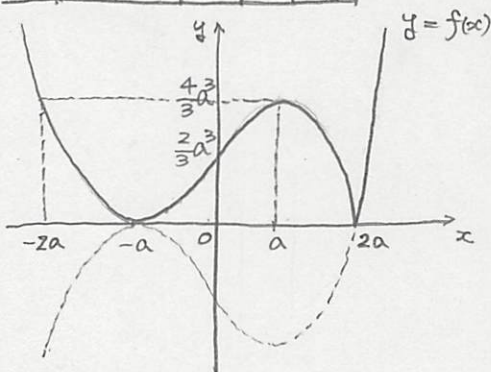
(2013 弘前大)

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - a^2x - \frac{2}{3}a^3 \\ &= \frac{1}{3}(x^3 - 3a^2x - 2a^3) \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -a & 1 & 0 & -3a^2 & -2a^3 \\ & & -a & a^2 & 2a^3 \\ & 1 & -a & -2a^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}(x+a)(x^2 - ax - 2a^2) \\ &= \frac{1}{3}(x+a)^2(x-2a) \end{aligned}$$

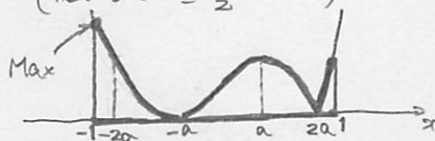
$$f'(x) = x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$$

x	...	$-a$	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f''(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4a^2}{3}$	↗



(iii) $-1 \leq -2a$ $a \geq \frac{1}{2}$ とき

(i.e. $0 < a \leq \frac{1}{2}$ $a \geq \frac{1}{2}$ とき)



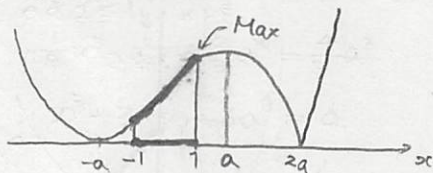
$$\begin{aligned} \text{Max} &= -\left(\frac{1}{3} + a^2 - \frac{2}{3}a^3\right) (x = -1) \\ &= \frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(i) ~ (iii) より

$$\text{Max} = \begin{cases} \frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{1}{3} & (1 \leq a \text{ とき}) \\ \frac{4}{3}a^3 & (\frac{1}{2} \leq a \leq 1 \text{ とき}) \\ \frac{2}{3}a^3 - a^2 + \frac{1}{3} & (0 < a \leq \frac{1}{2} \text{ とき}) \end{cases}$$

(2)

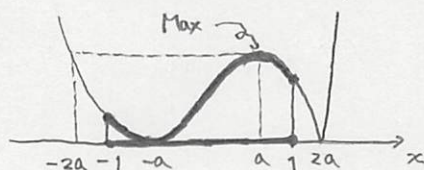
(i) $1 \leq a$ $a \geq 1$ とき



$$\begin{aligned} \text{Max} &= -\left(\frac{1}{3} - a^2 - \frac{2}{3}a^3\right) (x = 1) \\ &= \frac{2}{3}a^3 + a^2 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(ii) $-2a \leq -1 \leq -a$ $a \geq \frac{1}{2}$ とき

(i.e. $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ $a \geq \frac{1}{2}$ とき)



$$\text{Max} = \frac{4}{3}a^3 (x = a)$$

実数 x, y が条件 $x^2 + xy + y^2 = 6$ を満たしながら動くとき、 $x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2012 京都大)

$$x+y=S, \quad xy=T \quad \text{とおく。}$$

x, y は 2次方程式

$$u^2 - Su + T = 0$$

の2解である。

x, y は 実数 である。

判別式 $D \geq 0$ である。

$$S^2 - 4T \geq 0$$

$$\text{よって } T \leq \frac{1}{4}S^2 \quad \text{--- (1)}$$

$$x^2 + xy + y^2 = 6 \quad \text{より}$$

$$(x+y)^2 - xy = 6$$

$$S^2 - T = 6$$

$$T = S^2 - 6 \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) より

$$S^2 - 6 \leq \frac{1}{4}S^2$$

$$\frac{3}{4}S^2 - 6 \leq 0$$

$$S^2 - 8 \leq 0$$

$$-2\sqrt{2} \leq S \leq 2\sqrt{2}.$$

この条件のもとで

$$x^2y + xy^2 - x^2 - 2xy - y^2 + x + y$$

$$= xy(x+y) - (x+y)^2 + (x+y)$$

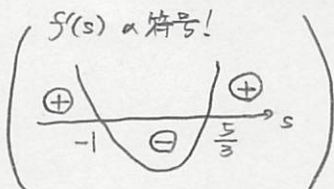
$$= TS - S^2 + S$$

$$= (S^2 - 6)S - S^2 + S$$

$$= S^3 - S^2 - 5S = f(S) \quad \text{とおく。}$$

$$f'(S) = 3S^2 - 2S - 5$$

$$= (3S - 5)(S + 1)$$



S	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(S)$		+	0	-	0	+	
$f(S)$	$-8-6\sqrt{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	$-8+6\sqrt{2}$

$$\begin{cases} f(-1) > f(2\sqrt{2}) \\ f(-2\sqrt{2}) < f(\frac{5}{3}) \end{cases} \quad \text{である。}$$

$$\underline{\underline{-8-6\sqrt{2} \leq f(S) \leq 3}}$$

a を正の定数とし、放物線 $y = \frac{x^2}{4}$ を C_1 とする。

(1) 点 P が C_1 上を動くとき、 P と点 $Q(2a, \frac{a^2}{4} - 2)$ の距離の最小値を求めよ。

(2) Q を中心とする円 $(x-2a)^2 + (y - \frac{a^2}{4} + 2)^2 = 2a^2$ を C_2 とする。 P が C_1 上を動き、点 R が C_2 上を動くとき、 P と R の距離の最小値を求めよ。

(2016 東京工業大)

(1)

$P(P, \frac{P^2}{4})$ とおく

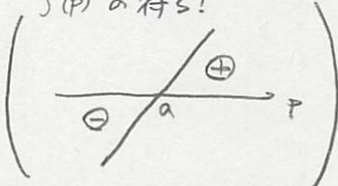
$$\begin{aligned} PQ^2 &= (P-2a)^2 + \left(\frac{P^2}{4} - \frac{a^2}{4} + 2\right)^2 \\ &= P^2 - 4aP + 4a^2 \\ &\quad + \frac{1}{16}P^4 + \frac{1}{16}a^4 + 4 - \frac{1}{8}a^2P^2 - a^2 + P^2 \\ &= \frac{1}{16}P^4 + \left(-\frac{1}{8}a^2 + 2\right)P^2 - 4aP + \left(\frac{1}{16}a^4 + 3a^2 + 4\right) \\ &= f(P) \quad \text{とおく。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(P) &= \frac{1}{4}P^3 + \left(-\frac{1}{4}a^2 + 4\right)P - 4a \\ &= \frac{1}{4}\{P^3 + (-a^2 + 16)P - 16a\} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c} a & 1 & 0 & -a^2+16 & -16a \\ & & a & a^2 & 16a \\ \hline & 1 & a & 16 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{4}(P-a)(P^2 + aP + 16) \quad \oplus$$

$f(P)$ の符号!



P	...	a	...
$f'(P)$	-	0	+
$f(P)$	↘	a^2+4	↗

よって

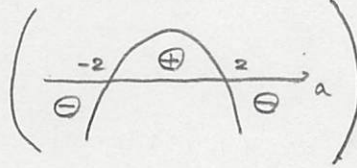
$P=a$ のとき $f(P)$ が最小 となる。

このとき、 PQ も最小 となる。

つまり

$$\min PQ = \sqrt{a^2 + 4}$$

$$\begin{aligned} (2) & \left(\sqrt{a^2+4}\right)^2 - (\sqrt{2}a)^2 \\ &= a^2 + 4 - 2a^2 \\ &= -a^2 + 4 \\ &= -(a+2)(a-2) \end{aligned}$$



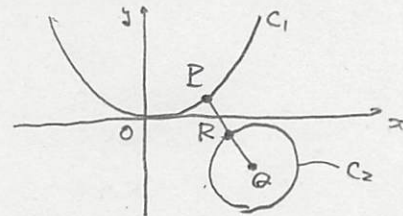
よって

$0 < a < 2$ のとき $\sqrt{a^2+4} > \sqrt{2}a$

つまり C_1 と C_2 は 共有点 をもたない。

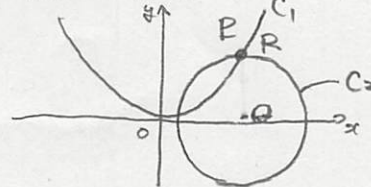
$a \geq 2$ のとき $\sqrt{a^2+4} \leq \sqrt{2}a$

つまり C_1 と C_2 は 共有点 をもつ。

(i) $0 < a < 2$ のとき

PR が最小 となるとき、3点 P, R, Q はこの順に一直線上 であり。

$$\begin{aligned} \min PR &= \min PQ - QR \\ &= \sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a \end{aligned}$$

(ii) $a \geq 2$ のとき

P と R は C_1 と C_2 の 共有点 として 存在 する。

$$\min PR = 0$$

(i), (ii) より

$$\min PR = \begin{cases} \sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a & (0 < a < 2 \text{ のとき}) \\ 0 & (a \geq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$