

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題91]

- (1) 3次方程式 $-x^3 + 3x^2 + 24x - m = 0$ が2つの異なる正の解と1つの負の解をもつとき、実数 m の値の範囲を求めよ。
- (2) 3次方程式 $\frac{2}{3}x^3 - ax^2 + a = 0$ が異なる3個の実数解をもつとき、実数の定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)

$$-x^3 + 3x^2 + 24x - m = 0$$

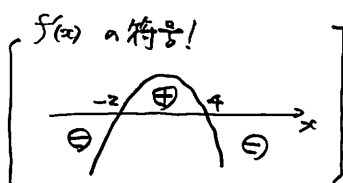
$$-x^3 + 3x^2 + 24x = m$$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x \quad \text{とおく}$$

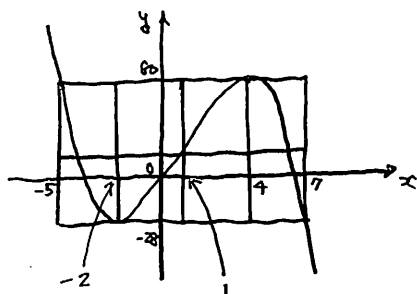
$$f(x) = -3x^2 + 6x + 24$$

$$= -3(x^2 - 2x - 8)$$

$$= -3(x-4)(x+2)$$



x	...	-2	...	0	...	4	...
$f(x)$	-	0	+	+	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-28	$\nearrow$	0	$\nearrow$	80	$\searrow$



$y = f(x)$ と $y = m$ のグラフを

$x > 0$ で異なる2つの共有点をもたせよ。

$x < 0$ で1つの共有点をもたせよ。

より

$$0 < m < 80$$

(2)

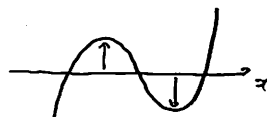
$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - ax^2 + a \quad \text{とおく}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2ax$$

$$= 2x(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{より異なる3個の実数解をもつ}$$

ためには $a \neq 0$ が必要。



このとき

$$f(0)f(a) < 0$$

となるとよい。

$$a\left(\frac{2}{3}a^3 - a^3 + a\right) < 0$$

$$a\left(-\frac{1}{3}a^3 + a\right) < 0$$

$$a^2(a^2 - 3) > 0$$

$$a^2 > 0 \quad \text{より}$$

$$a^2 - 3 > 0$$

$$(a + \sqrt{3})(a - \sqrt{3}) > 0$$

$$\underline{a < -\sqrt{3}, \sqrt{3} < a} \quad (a \neq 0 \text{ を満たす})$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題92]

(1) $x \geq 0$ のとき, 不等式 $x^3 + 2 \geq 3x$ を証明せよ。

(2) すべての実数 x に対して $x^4 - 4p^3x + 12 \geq 0$ が成立するような実数 p の範囲を求めよ。

(1) 証明

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 + 2) - 3x \\ &= x^3 - 3x + 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$= (x-1)(x^2+x-2)$$

$$= (x-1)^2(x+2) \geq 0 \quad (\because x \geq 0)$$

等号成立は $x=1$ のとき

よって

$x \geq 0$ のとき

不等式は成立する。■

$$p^2 + 2 > 0 \quad \text{より}$$

$$p^2 - 2 \leq 0$$

$$(p + \sqrt{2})(p - \sqrt{2}) \leq 0$$

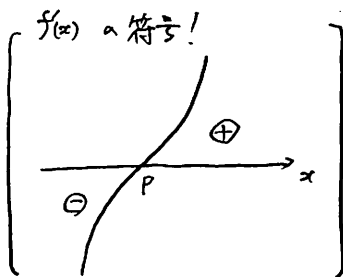
$$\underline{\underline{-\sqrt{2} \leq p \leq \sqrt{2}}}$$

(2)

$$f(x) = x^4 - 4p^3x + 12$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 4p^3 \\ &= 4(x^3 - p^3) \end{aligned}$$



x	...	p	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-3p^4 + 12$	$\nearrow$

増減表 より

$$-3p^4 + 12 \geq 0$$

$$p^4 - 4 \leq 0$$

$$(p^2 + 2)(p^2 - 2) \leq 0$$

k を定数とする。3 次方程式 $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - k = 0$ が異なる 3 つの実数解 α, β, γ (ただし $\alpha < \beta < \gamma$) をもつとき、次の問いに答えよ。

- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) α, β, γ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $\alpha\gamma$ が最小となるとき k の値と、そのときの $\alpha\gamma$ の最小値を求めよ。

(2014 東京理科大)

(1)

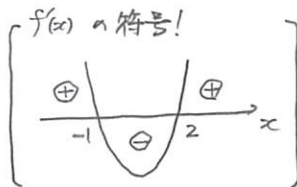
$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - k = 0$$

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x = k$$

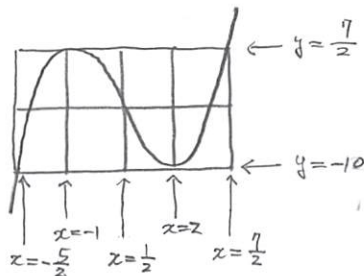
$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

とおく。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3x - 6 \\ &= 3(x^2 - x - 2) \\ &= 3(x-2)(x+1) \end{aligned}$$



x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗



$y = f(x)$ と $y = k$ のグラフが異なる 3 つの共有点をもつとき

$$\underline{\underline{-10 < k < \frac{7}{2}}}$$

(2)

(1) より

$$\underline{\underline{-\frac{5}{2} < \alpha < -1, -1 < \beta < 2, 2 < \gamma < \frac{7}{2}}}$$

(3)

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2} & \text{--- ①} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -6 & \text{--- ②} \\ \alpha\beta\gamma = k & \text{--- ③} \end{cases}$$

① より

$$\alpha + \gamma = \frac{3}{2} - \beta$$

② より

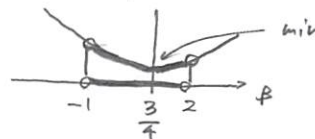
$$\beta(\alpha + \gamma) + \alpha\gamma = -6$$

$$\beta\left(\frac{3}{2} - \beta\right) + \alpha\gamma = -6$$

$$\alpha\gamma = \beta^2 - \frac{3}{2}\beta - 6$$

$$= \left(\beta - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{105}{16}$$

$$\begin{cases} \text{頂点} \left(\frac{3}{4}, -\frac{105}{16}\right) \\ \text{軸: } \beta = \frac{3}{4}, \text{下に凸} \end{cases}$$



$$\min \alpha\gamma = -\frac{105}{16} \quad (\beta = \frac{3}{4})$$

このとき、③は

$$k = -\frac{105}{16} \times \frac{3}{4} = -\frac{315}{64}$$

よって

$$\underline{\underline{k = -\frac{315}{64} \quad \text{のとき} \quad \min \alpha\gamma = -\frac{105}{16}}}$$

関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 8$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式を求めよ。
 (2) 点 $P(0, p)$ から曲線 $y = f(x)$ に異なる3本の接線が引けるような p の値の範囲を求めよ。 (2016 福岡大)

(1)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 8$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 3$$

$$\text{接点 } (t, t^3 - 6t^2 + 3t - 8)$$

$$f'(t) = 3t^2 - 12t + 3$$

$$\text{接線 } y - (t^3 - 6t^2 + 3t - 8) = (3t^2 - 12t + 3)(x - t)$$

$$y = (3t^2 - 12t + 3)x - 2t^3 + 6t^2 - 8 \quad \text{--- ①}$$

(2)

① 点 $P(0, p)$ を通るとき

$$p = -2t^3 + 6t^2 - 8$$

これが異なる3つの解をもつとよい。

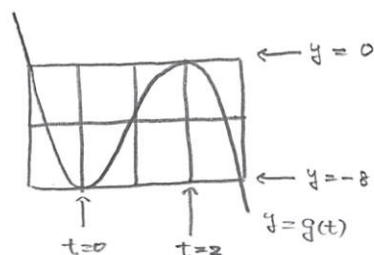
$$g(t) = -2t^3 + 6t^2 - 8 \quad \text{とおく}$$

$$g'(t) = -6t^2 + 12t$$

$$= -6t(t-2)$$

$$g'(t) \text{ の符号!}$$

t	...	0	...	2	...
g'(t)	-	0	+	0	-
g(t)	↘	-8	↗	0	↘



$$y = g(t) \text{ と } y = p \text{ のグラフを}$$

異なる3つの共有点をもつとよい。

よって

$$\underline{\underline{-8 < p < 0}}$$

すべての $x \geq 0$ に対して、 $x^3 - 3x^2 \geq k(3x^2 - 12x - 4)$ が成り立つ定数 k の値の範囲を求めよ。(1998 慶応義塾大)

$$f(x) = (x^3 - 3x^2) - k(3x^2 - 12x - 4)$$

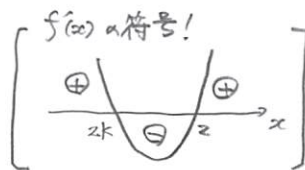
$$= x^3 + (-3k - 3)x^2 + 12kx + 4k$$

とおく

$$f'(x) = 3x^2 + (-6k - 6)x + 12k$$

$$= 3\{x^2 + (-2k - 2)x + 4k\}$$

$$= 3(x - 2k)(x - 2)$$

i) $2k < 2$ のとき(つまり $k < 1$ のとき)(ii) $k < 0$ のとき

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘		↗

$$f(2) = 8 + (-12k - 12) + 24k + 4k$$

$$= 16k - 4$$

$$\min f(x) \geq 0 \quad \text{と仮定すると}$$

$$16k - 4 \geq 0$$

$$k \geq \frac{1}{4}$$

 $k < 0$ より 不適(i) $0 \leq k < 1$ のとき

x	0	...	2k	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$4k$	↗		↘		↗

$$\min f(x) = \{4k, 16k - 4\} \quad \text{より}$$

$$4k \geq 0 \quad \text{かつ} \quad 16k - 4 \geq 0$$

$$k \geq 0 \quad \text{かつ} \quad k \geq \frac{1}{4}$$

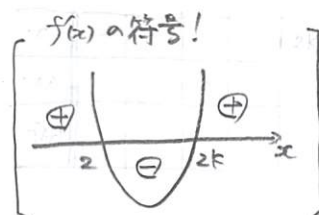
$$0 \leq k < 1 \quad \text{とあわせて}$$

$$\frac{1}{4} \leq k < 1$$

(ii) $2k = 2$ のとき(つまり $k = 1$ のとき)

$$f'(x) = 3(x - 2)^2 \geq 0$$

x	0	...
$f'(x)$		+
$f(x)$	4	↗

これは $\min f(x) \geq 0$ を満たす。(iii) $2k > 2$ のとき(つまり $k > 1$ のとき)

x	0	...	2	...	2k	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$4k$	↗		↘		↗

$$f(2k) = 8k^3 + (-12k^3 - 12k^2) + 24k^2 + 4k$$

$$= -4k^3 + 12k^2 + 4k$$

$$\min f(x) = \min \{4k, -4k^3 + 12k^2 + 4k\} \quad \text{より}$$

$$4k \geq 0 \quad \text{かつ} \quad -4k^3 + 12k^2 + 4k \geq 0$$

と仮定すると

$$4k \geq 0 \quad \text{より} \quad k \geq 0 \quad \text{--- ①}$$

$$-4k^3 + 12k^2 + 4k \geq 0$$

$$k^3 - 3k^2 - k \leq 0$$

$$k(k^2 - 3k - 1) \leq 0$$

 $k > 1$ より

$$k^2 - 3k - 1 \leq 0$$

$$\frac{3 - \sqrt{13}}{2} \leq k \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{--- ②}$$

①, ②, $k > 1$ より

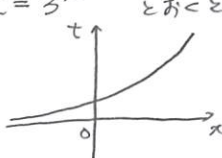
$$1 < k \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

(i) ~ (iii) より

$$\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

方程式 $27^x - 3^{2x+1} + a = 0$ が異なる2つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2014 成蹊大)

$t = 3^x$ とおくと

 $t > 0$

$$27^x - 3^{2x+1} + a = 0$$

$$3^{3x} - 3 \times 3^{2x} + a = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + a = 0$$

$$a = -t^3 + 3t^2$$

$t > 0$ で異なる2つの実数解をもつとよい。

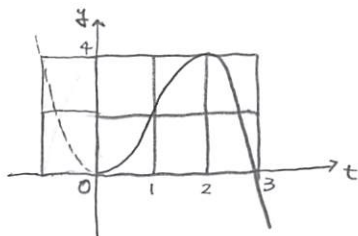
$$f(t) = -t^3 + 3t^2$$

とおく

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= -3t^2 + 6t \\
 &= -3t(t-2)
 \end{aligned}$$

$f'(t)$ の符号!


t	(0)	$\dots$	2	$\dots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$	(0)	$\nearrow$	4	$\searrow$



$y = f(t)$ と $y = a$ のグラフが $t > 0$ で異なる2つの共有点をもつとよいので

$$\underline{\underline{0 < a < 4}}$$

関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。
- (2) $a = \cos \frac{5\pi}{9}$ とするとき、 $f(a)$ の値を求めよ。
- (3) 不等式 $-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$ を証明せよ。

(2016 岡山大学)

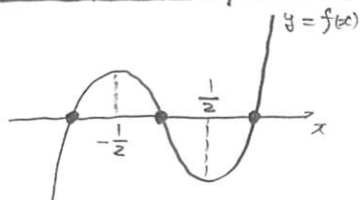
(1)

$$f(x) = 8x^3 - 6x - 1$$

$$f'(x) = 24x^2 - 6$$

$$\left[\begin{array}{c} f(x) \text{ の符号!} \\ \begin{array}{c} \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} \end{array} \right]$$

x	...	$-\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$



よ、て

3個

(2)

$$f(a) = 8 \cos^3 \frac{5\pi}{9} - 6 \cos \frac{5\pi}{9} - 1$$

$$= 2 \left(4 \cos^3 \frac{5\pi}{9} - 3 \cos \frac{5\pi}{9} \right) - 1$$

$$= 2 \cos \frac{5\pi}{3} - 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} - 1$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

(3) 証明

$$y = \cos \theta \quad \text{は } 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{で}$$

減少関数 であるので

$$\cos \frac{2\pi}{3} < \cos \frac{5\pi}{9} < \cos \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}$$

また、(2) で $f(a) = 0$ となるので

$$f(x) = 0 \quad \text{の } 3 \text{ つの解は } \alpha, \beta, \gamma \quad (\alpha < \beta < \gamma)$$

よ、て $\beta = a$ である。

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{5}\right) &= -\frac{8}{125} + \frac{6}{5} - 1 \\ &= \frac{-8 + 150 - 125}{125} \end{aligned}$$

$$= \frac{17}{125} > 0$$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{8}{216} + \frac{6}{6} - 1$$

$$= -\frac{1}{27} < 0$$

よ、て

$$-\frac{1}{5} < a < -\frac{1}{6}$$

つまり

$$-\frac{1}{5} < \cos \frac{5\pi}{9} < -\frac{1}{6}$$

[2018スタンダードⅡAB受 例題35]

座標平面上の点 (a, b) から曲線 $y = x^3 - 3x$ に引ける接線の本数が3本であるような点 (a, b) の範囲を図示せよ。

(2017 千葉大)

$$y = x^3 - 3x$$

$$y' = 3x^2 - 3$$

接点 $(t, t^3 - 3t)$ とおくと

$$y'(x=t) = 3t^2 - 3$$

$$\text{接線: } y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t)$$

$$y = (3t^2 - 3)x - 2t^3$$

これが点 (a, b) を通るとき

$$b = (3t^2 - 3)a - 2t^3$$

$$2t^3 - 3at^2 + 3a + b = 0$$

これが異なる3つの実数解をもつとき

$$f(t) = 2t^3 - 3at^2 + 3a + b$$

とおくと

$$f'(t) = 6t^2 - 6at$$

$$= 6t(t - a)$$

条件を満たすには

$$a \neq 0 \quad \text{が} \quad \text{必要}$$

また

$$\left[\begin{array}{c} f'(t) \text{ の符号!} \\ \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ t \end{array} \right]$$

$$f(0)f(a) < 0$$

となるとよく

$$(3a + b)(2a^3 - 3a^3 + 3a + b) < 0$$

$$(3a + b)(-a^3 + 3a + b) < 0$$

よって

$$\begin{cases} 3a + b > 0 \\ -a^3 + 3a + b < 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} 3a + b < 0 \\ -a^3 + 3a + b > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b > -3a \\ b < a^3 - 3a \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} b < -3a \\ b > a^3 - 3a \end{cases}$$

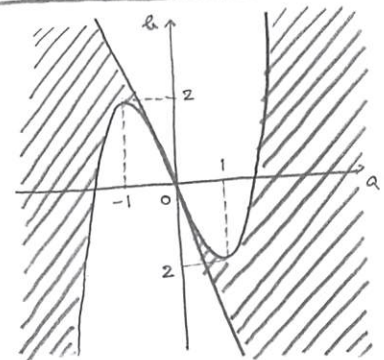
$$\left(\begin{array}{l} b = -3a \text{ と } b = a^3 - 3a \text{ を} \\ \text{連立して} \\ -3a = a^3 - 3a \\ a^3 = 0 \\ a = 0 \end{array} \right)$$

$$b = a^3 - 3a$$

$$b' = 3a^2 - 3$$

$$\left[\begin{array}{c} b' \text{ の符号!} \\ \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ -1 \quad 1 \quad a \end{array} \right]$$

a	...	-1	...	1	...
b'	+	0	-	0	+
b	↗	2	↘	-2	↗



点 (a, b) の存在範囲は図の斜線部
ただし、境界を含めない。

a, b を実数とする。3次関数 $f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + b$ について

- (1) 関数 $f(x)$ が極値をもつための a の条件を求めよ。
- (2) 方程式 $f(x) = 0$ が相異なる3つの正の実数解をもつための条件を a, b を用いて表し、この条件を満たす点 (a, b) の全体を ab 平面上に図示せよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ が2つの相異なる正の実数解と1つの負の実数解をもつための条件を a, b を用いて表し、この条件を満たす点 (a, b) の全体を ab 平面上に図示せよ。

(2016 静岡大)

(1)

$$f(x) = 2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + b$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6(a+1)x + 6a$$

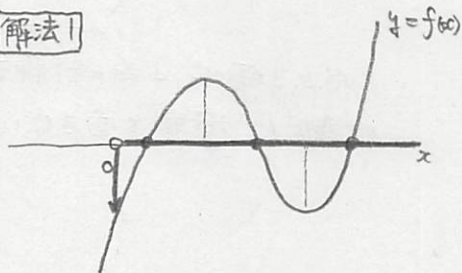
$$= 6\{x^2 + (-a-1)x + a\}$$

$$= 6(x-a)(x-1)$$

$$\left(\begin{array}{c} f'(x) \text{ の符号!} \\ \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ x \end{array} \right)$$

$f(x)$ が極値をもつためには
 $a \neq 1$

(2) 解法1



$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) < 0 \quad \text{--- ①} \\ a > 0 \quad \text{--- ②} \\ f(1)f(a) < 0 \quad \text{--- ③} \end{array} \right.$$

と仮定しよう。

①より $b < 0$

②より

$$\{2 - 3(a+1) + 6a + b\} \{2a^3 - 3(a+1)a^2 + 6a^2 + b\} < 0$$

$$(b + 3a - 1)(b - a^3 + 3a^2) < 0$$

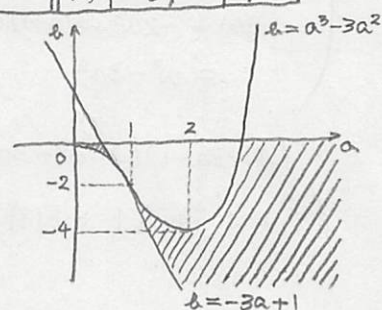
$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ b = -3a + 1 \quad \text{と} \quad b = a^3 - 3a^2 \quad \text{を連立して} \\ a^3 - 3a^2 = -3a + 1 \\ a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 0 \\ (a-1)^3 = 0 \\ a = 1 \end{array} \right)$$

$$b = a^3 - 3a^2 \quad \text{について}$$

$$\frac{db}{da} = 3a^2 - 6a = 3a(a-2)$$

$$\left(\begin{array}{c} \frac{db}{da} \text{ の符号!} \\ \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ a \end{array} \right)$$

a	(0)	...	2	...
$\frac{db}{da}$	/	-	0	+
b	(0)	↘	-4	↗



①, ②, ③より

求める領域は図の斜線部
ただし、境界を含まない。

解法2

$$f(x) = 0 \quad \text{より}$$

$$2x^3 - 3(a+1)x^2 + 6ax + b = 0$$

$$b = -2x^3 + 3(a+1)x^2 - 6ax$$

$$y = b \quad \text{と} \quad y = -2x^3 + 3(a+1)x^2 - 6ax$$

の共有点を考える。

$$g(x) = -2x^3 + 3(a+1)x^2 - 6ax$$

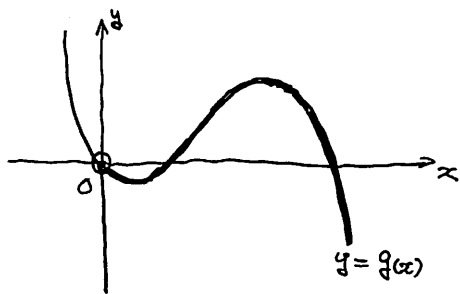
とおく。

$$g'(x) = -6x^2 + 6(a+1)x - 6a$$

$$= -6(x-a)(x-1)$$

$$g(0) = 0 \quad \text{また}$$

正の部分で相異なる3つの
共有点をもつためには、



$a > 0$ かつ $b < 0$ で"ある"は"必要".

また,

$$g(1) < b < g(a)$$

or

$$g(a) < b < g(1)$$

が"成り立つ"と"し"る

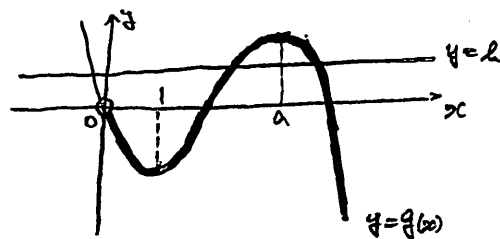
$$(b - g(1))(b - g(a)) < 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ g(1) = -2 + 3(a+1) - 6a \\ \quad = -3a + 1 \\ g(a) = -2a^3 + 3(a+1)a^2 - 6a^2 \\ \quad = a^3 - 3a^2 \end{array} \right) \quad \text{よ} \rangle$$

$$(b + 3a - 1)(b - a^3 + 3a^2) < 0$$

(あとは解法1と同様.)

(iii) $1 < a$ a と $\frac{1}{3}$

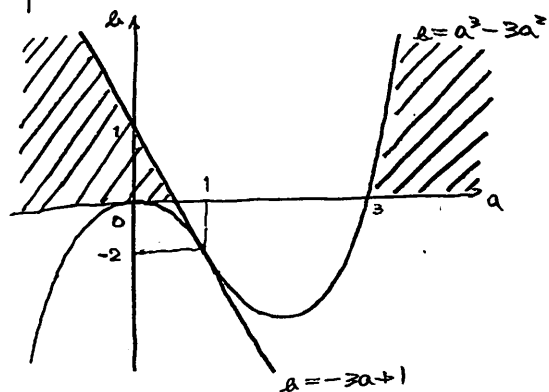


$0 < b < g(a)$ と仮定しよう.

$$\therefore 0 < b < a^3 - 3a^2$$

(i) ~ (iii) より

$$\begin{cases} a < 1 & a \text{ と } \frac{1}{3} & 0 < b < -3a + 1 \\ 1 < a & a \text{ と } \frac{1}{3} & 0 < b < a^3 - 3a^2 \end{cases}$$

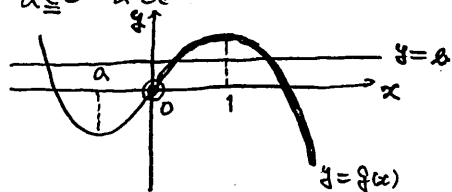


求める領域は図の斜線部
ただし、境界を含まない.

(2)

$y=b$ と $y=g(x)$ の共有点を考える.

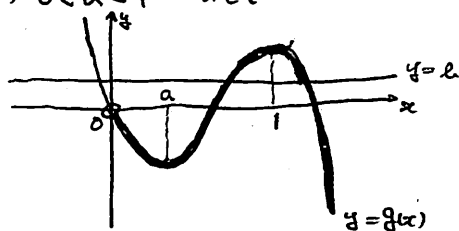
(i) $a \leq 0$ a と $\frac{1}{3}$



$0 < b < g(1)$ と仮定しよう.

$$\therefore 0 < b < -3a + 1$$

(ii) $0 < a < 1$ a と $\frac{1}{3}$



$0 < b < g(a)$ と仮定しよう.

$$\therefore 0 < b < -3a + 1$$

半径1の円を内接円とする $\triangle ABC$ が、 $AB=AC$ の二等辺三角形であるとする。辺 BC , CA , AB と内接円の接点をそれぞれ P , Q , R とする。また、 $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$ とし、 $\triangle ABC$ の面積を S とする。

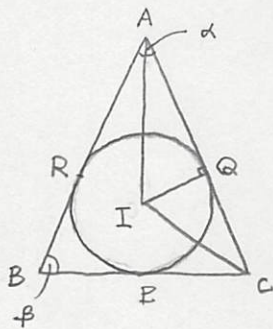
(1) 線分 AQ の長さを α を用いて表し、線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2) $t = \tan \frac{\beta}{2}$ とおく。このとき、 S を t を用いて表せ。

(3) 不等式 $S \geq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに、等号が成立するのは、 $\triangle ABC$ が正三角形のときに限ることを示せ。

(2015 筑波大)

(1)



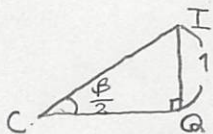
内心 I とすると、



$$AQ \tan \frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} \neq 0 \text{ 故 } \alpha \neq \pi$$

$$AQ = \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}}$$



$$QC \tan \frac{\beta}{2} = 1$$

$$\tan \frac{\beta}{2} \neq 0 \text{ 故 } \beta \neq \pi$$

$$QC = \frac{1}{\tan \frac{\beta}{2}}$$

よて

$$AQ = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$QC = \frac{1}{t}$$

※ 73)

$$AC = \frac{2t}{1-t^2} + \frac{1}{t}$$

$$= \frac{2t^2 + (1-t^2)}{t(1-t^2)}$$

$$= \frac{1+t^2}{t(1-t^2)}$$

また、

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \times \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \times \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \tan \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$= 2 \times \frac{1-t^2}{2t} \times \frac{1}{1 + \frac{1-t^2+t^4}{4t^2}}$$

$$= \frac{1-t^2}{t} \times \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}$$

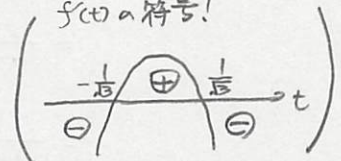
$$= \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

よて

$$S = \frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1+t^2}{t(1-t^2)} \right\}^2 \times \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{2}{t(1-t^2)}$$

$f(t)$ の符号!



t	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	(1)
$f(t)$		+	0	-	
$f(t)$	(0)	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	(0)

増減表より

$$0 < f(t) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\frac{1}{f(t)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2}{f(t)} \geq 3\sqrt{3}$$

$$S \geq 3\sqrt{3}$$

等号成立は

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき}$$

つまり

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\beta = \frac{\pi}{3}$$

よて

$$\alpha = \pi - \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

よて

$\triangle ABC$ は

正三角形である。

(2) 解法1

$$\alpha + 2\beta = \pi \text{ 故 } \alpha \neq \pi$$

$$\alpha = \pi - 2\beta$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right)$$

$$= \frac{1}{\tan \beta}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 \frac{\beta}{2}}{2 \tan \frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{1-t^2}{2t}$$

(3) (証明)

$$t(1-t^2) = -t^3 + t = f(t)$$

とおく。

$$\left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \text{ より } 0 < \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{つまり } 0 < t < 1$$

$$f'(t) = -3t^2 + 1$$

(2) 解法2 (* 升降)

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \times 1 + \frac{1}{2} \times BC \times 1 + \frac{1}{2} \times CA \times 1$$

$$= \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$$

$$= \frac{1}{2} (2AQ + 4QC)$$

$$= AQ + 2QC$$

$$= \frac{zt}{1-t^2} + \frac{2}{t}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{t(1-t^2)}}}$$