

1次関数 $f(x)$ に対し $g(x) = \int x f(x) dx$ とする。 $\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = 3x^2 + 2x + 3$ のとき $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = ax + b \quad (a \neq 0) \text{ とおく。}$$

$$f'(x) = a$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = 3x^2 + 2x + 3$$

よ、

$$f'(x) + g'(x) = 3x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) + \frac{d}{dx} \int x f(x) dx = 3x^2 + 2x + 3$$

$$f'(x) + x f(x) = 3x^2 + 2x + 3$$

$$a + x(ax + b) = 3x^2 + 2x + 3$$

$$ax^2 + bx + a = 3x^2 + 2x + 3$$

x に「 $\forall x$ 」恒等式 $\forall x$ と

$$a = 3, b = 2$$

よ、

$$\underline{\underline{f(x) = 3x + 2}}$$

次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_0^{\sqrt{2}} (1+2x-x^2)dx$

(2) $\int_1^3 (x-1)^2(x-3)dx$

(3) $\int_0^2 |(x-1)(x-2)|dx$

(1)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\sqrt{2}} (1+2x-x^2)dx \\
 &= \left[x+x^2-\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{2}+2-\frac{2\sqrt{2}}{3} \\
 &= \underline{\underline{2+\frac{\sqrt{2}}{3}}}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 (x-1)^2(x-3)dx \\
 &= \int_1^3 (x-1)^2 \{ (x-1)-2 \} dx \\
 &= \int_1^3 \{ (x-1)^3 - 2(x-1)^2 \} dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{2}{3}(x-1)^3 \right]_1^3 \\
 &= \frac{16}{4} - \frac{2}{3} \times 8 \\
 &= \frac{12-16}{3} \\
 &= \underline{\underline{-\frac{4}{3}}}
 \end{aligned}$$

(3)

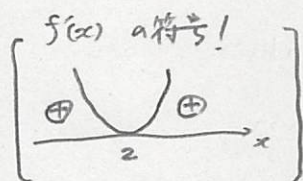
$$\left[\begin{array}{c} (x-1)(x-2) \text{ の符号!} \\ \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^2 |(x-1)(x-2)|dx \\
 &= \int_0^1 (x-1)(x-2)dx - \int_1^2 (x-1)(x-2)dx \\
 &= \int_0^1 (x^2-3x+2)dx + \frac{1}{6}(2-1)^3 \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 + \frac{1}{6} \\
 &= \frac{2-9+12+1}{6} \\
 &= \underline{\underline{\frac{6}{6} = 1}}
 \end{aligned}$$

$f'(x) = 4 - 4x + x^2$ であって、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸に接しているとき、 $f(x)$ を求めよ。 (2005 日本歯科大)

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (4 - 4x + x^2) dx \\ &= 4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 4x + 4 \\ &= (x - 2)^2 \end{aligned}$$



x	...	2	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

x 軸と接するには

$$f(2) = 0 \quad \text{となるとよい.}$$

$$8 - 8 + \frac{8}{3} + C = 0$$

$$C = -\frac{8}{3}$$

よって

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - \frac{8}{3}}}$$

(1) 定積分 $\int_0^2 |x^3 - x^2 - 4x + 4| dx$ を求めよ。

(2016 東京電機大)

(2) $f(x) = \int_0^1 |x^2 - t^2| dt$ としたとき、 $\int_0^1 f(x) dx$ の値を求めよ。

(2012 防衛医科大学)

(1)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 & 4 \\ & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 4x + 4 &= (x-1)(x^2-4) \\ &= (x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} x^3 - x^2 - 4x + 4 \text{ の符号!} \\ \begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array} \begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} &\int_0^2 |x^3 - x^2 - 4x + 4| dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - x^2 - 4x + 4) dx - \int_1^2 (x^3 - x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_0^1 \\ &\quad - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 2 + 4 \right) - \left(4 - \frac{8}{3} - 8 + 8 \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - 2 + 4 \right) \\ &= \frac{1}{2} + 2 \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

(2)

$0 < x < 1$ で考えてよい。

$$\left[\begin{array}{c} -t^2 + x^2 \text{ の符号!} \\ \begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array} \begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 |x^2 - t^2| dt \\ &= \int_0^x (x^2 - t^2) dt - \int_x^1 (x^2 - t^2) dt \\ &= \left[x^2t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^x - \left[x^2t - \frac{1}{3}t^3 \right]_x^1 \\ &= \left(x^3 - \frac{1}{3}x^3 \right) - \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) + \left(x^3 - \frac{1}{3}x^3 \right) \\ &= \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$f(x)$ を $x=-1$ で極大, $x=2$ で極小となる3次関数で $\int_0^2 f'(x)dx = -5$ を満たすものとする。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f(x)$ の極大値と極小値の差を求めよ。

(2013 熊本大)

(1)

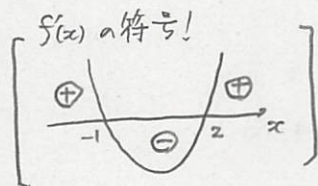
$x=-1, 2$ で極値をとるから

$$f'(x) = a(x+1)(x-2)$$

とてき。

$x=-1$ で極大, $x=2$ で極小

となるから



$a > 0$ であることが必要

$$\int_0^2 f'(x)dx = \int_0^2 a(x+1)(x-2)dx$$

$$= a \int_0^2 (x^2 - x - 2)dx$$

$$= a \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_0^2$$

$$= a \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right)$$

$$= -\frac{10}{3}a = -5$$

$$a = \frac{3}{2}$$

これは $a > 0$ を満たす。

よて

$$\underline{\underline{f'(x) = \frac{3}{2}(x+1)(x-2)}}$$

(2)

$$f(-1) - f(2) = [f(x)]_2^{-1}$$

$$= \int_2^{-1} f'(x)dx$$

$$= \int_2^{-1} \frac{3}{2}(x+1)(x-2)dx$$

$$= \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times (-1-2)^3$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1}{6} \times 27$$

$$= \underline{\underline{\frac{27}{4}}}$$

(1) すべての自然数 k に対して $\int_k^{k+1} (x^3 + ax^2 + bx + c) dx = k^3$ が成り立つように定数 a, b, c の値を定めよ。

(2) (1)を用いて、和 $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ を求めよ。

(2001 芝浦工業大)

(1)

$$\int_k^{k+1} (x^3 + ax^2 + bx + c) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right]_k^{k+1}$$

$$= \frac{1}{4} \{ (k+1)^4 - k^4 \} + \frac{a}{3} \{ (k+1)^3 - k^3 \}$$

$$+ \frac{b}{2} \{ (k+1)^2 - k^2 \} + c \{ (k+1) - k \}$$

$$= \frac{1}{4} (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) + \frac{a}{3} (3k^2 + 3k + 1)$$

$$+ \frac{b}{2} (2k + 1) + c$$

$$= k^3 + \left(\frac{3}{2} + a \right) k^2 + (1 + a + b)k + \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \right)$$

$$\int_k^{k+1} (x^3 + ax^2 + bx + c) dx = k^3$$

∴ すべての自然数 k で成り立つ a, b, c

k について a '恒等式' とみてよく、

$$\begin{cases} \frac{3}{2} + a = 0 \\ 1 + a + b = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \end{cases}$$

より、

$$\underline{\underline{a = -\frac{3}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = 0}}$$

(2)

(1) より

$$k^3 = \int_k^{k+1} \left(x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right) dx$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3$$

$$= \sum_{k=1}^n k^3$$

$$= \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \left(x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right) dx$$

$$= \int_1^2 + \int_2^3 + \dots + \int_n^{n+1}$$

$$= \int_1^{n+1} \left(x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2 \right]_1^{n+1}$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^2 (x^2 - 2x + 1) \right]_1^{n+1}$$

$$= \left[\frac{1}{4} x^2 (x-1)^2 \right]_1^{n+1}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4} (n+1)^2 n^2}}$$

$f(0)=1, g(0)=2$ を満たす2つの整式 $f(x), g(x)$ に対して

$$p(x)=f(x)+g(x), \quad q(x)=f(x)g(x)$$

とおく。 $\frac{d}{dx}p(x)=3, \quad \frac{d}{dx}q(x)=4x+k$ であるとき、 k の値を求めよ。

(2011 上智大)

$$f(0)=1, \quad g(0)=2 \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} p(0)=f(0)+g(0)=3 \\ q(0)=f(0)g(0)=2 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}p(x)=3 \quad \text{より}$$

$$p(x)=3x+C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数})$$

$$p(0)=3 \quad \text{より}$$

$$C_1=3$$

よって

$$p(x)=3x+3$$

$$\frac{d}{dx}q(x)=4x+k \quad \text{より}$$

$$q(x)=2x^2+kx+C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数})$$

$$q(0)=2 \quad \text{より}$$

$$C_2=2$$

よって

$$q(x)=2x^2+kx+2$$

$p(x), q(x)$ より $f(x), g(x)$ はともに

1次式 であり。

$$f(0)=1, \quad g(0)=2 \quad \text{とあわせて}$$

$$f(x)=ax+1, \quad g(x)=bx+2$$

とできる。

$$p(x)=f(x)+g(x) \quad \text{より}$$

$$3x+3=(ax+1)+(bx+2)$$

$$3x+3=(a+b)x+3$$

x について 恒等式 なるので

$$a+b=3 \quad \text{--- ①}$$

$$q(x)=f(x)g(x) \quad \text{より}$$

$$2x^2+kx+2=(ax+1)(bx+2)$$

$$2x^2+kx+2=abx^2+(2a+b)x+2$$

x について 恒等式 なるので

$$\begin{cases} ab=2 & \text{--- ②} \\ k=2a+b & \text{--- ③} \end{cases}$$

①, ② より

a, b は 解 にもつ 2次方程式 は

$$t^2-3t+2=0$$

$$(t-1)(t-2)=0$$

$$t=1, 2$$

つまり

$$\{a, b\} = \{1, 2\}$$

③ より

$$(a, b) = (1, 2) \quad \text{a と b}$$

$$k=2+2=4$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad \text{a と b}$$

$$k=4+1=5$$

以上 により

$$\underline{\underline{k=4, 5}}$$

$a > 0$ とする。 x の2次方程式 $x^2 - ax = 2 \int_0^1 |t^2 - at| dt$ は $0 \leq x \leq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。

(2000 京都大)

$$\left[\begin{array}{c} t^2 - at \text{ の符号!} \\ \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ 0 \quad a \end{array} \right]$$

(i) $0 < a \leq 1$ のとき

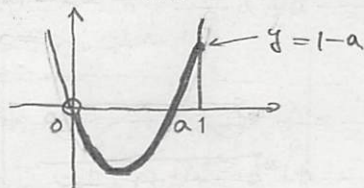
$$\begin{aligned} \int_0^1 |t^2 - at| dt &= -\int_0^a (t^2 - at) dt + \int_a^1 (t^2 - at) dt \\ &= -\int_0^a t(t-a) dt + \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{a}{2} t^2 \right]_a^1 \\ &= \frac{1}{6} a^3 + \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a^3 \right) \\ &= \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

このとき

$$x^2 - ax = 2 \left(\frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} \right)$$

$$y = x^2 - ax \quad \text{と} \quad y = \frac{2}{3} a^3 - a + \frac{2}{3}$$

のグラフの共有点を調べる。



$$1 - a < \frac{2}{3} a^3 - a + \frac{2}{3} \quad \text{のとき}$$

$$\frac{2}{3} a^3 > \frac{1}{3}$$

$$a^3 > \frac{1}{2}$$

$$a > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$0 < a \leq 1$ より

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a \leq 1 \quad \text{のとき} \quad 0 \text{ 個}$$

また

$$f(a) = \frac{2}{3} a^3 - a + \frac{2}{3} \quad \text{とおく}$$

$$f'(a) = 2a^2 - 1$$

$$\left[\begin{array}{c} f'(a) \text{ の符号!} \\ \oplus \quad \ominus \quad \oplus \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right]$$

a	(0)	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\dots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f(a)$		$-$	0	$+$	
$f'(a)$	$(\frac{2}{3})$	$\searrow$	$\frac{2-\sqrt{2}}{3}$	$\nearrow$	$1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

よって $0 < a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき $f(a) > 0$

となり 共有点 1 個

(ii) $1 < a$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^1 |t^2 - at| dt &= \int_0^1 (-t^2 + at) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3} t^3 + \frac{a}{2} t^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

このとき

$$x^2 - ax = 2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{a}{2} \right)$$

$$y = x^2 - ax \quad \text{と} \quad y = -\frac{2}{3} + a$$

のグラフの共有点を調べる。

$$(i) \quad 1 - a < -\frac{2}{3} + a \quad \text{のとき}$$

$$-2a < -\frac{5}{3}$$

$$a > \frac{5}{6}$$

$$1 < a \text{ より } 1 < a$$

このとき 0 個

$$(ii) \quad 1 - a \geq -\frac{2}{3} + a \quad \text{のとき}$$

$$a \leq \frac{5}{6}$$

$1 < a$ を満たす a は存在しない。

(i), (ii) より

$$\begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} & \text{のとき} \quad 1 \text{ 個} \\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a & \text{のとき} \quad 0 \text{ 個} \end{cases}$$

関数 $f(x)$ を $f(x) = [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2$ と定める。ここで、 $[x]$ は $n \leq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

- (1) $f(x) \geq x$ であることを示せ。
 (2) $f(x+1) = f(x) + 1$ であることを示せ。
 (3) $0 \leq x \leq 2$ において $y = f(x)$ のグラフをかけ。
 (4) $0 \leq a < 1$ とするとき、 $\int_a^{a+1} f(x) dx$ を求めよ。

(2014 岡山大)

(1) (証明)

$$\begin{aligned} f(x) - x &= [x] + 2(x - [x]) - (x - [x])^2 - x \\ &= -(x - [x])^2 + (x - [x]) \\ &= (x - [x]) \left\{ 1 - (x - [x]) \right\} \geq 0 \end{aligned}$$

$$(\because 0 \leq x - [x] < 1 \text{ より})$$

$$\therefore f(x) \geq x$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ x - [x] = 0 \quad a \geq 1 \\ x = [x] \text{ より} \\ x \in \mathbb{Z} \quad a \geq 1 \end{array} \right)$$

(2) (証明)

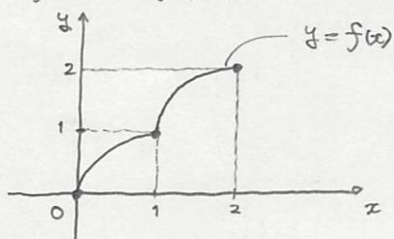
$$[x+1] = [x] + 1 \quad \text{に注意して}$$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= [x+1] + 2\{(x+1) - [x+1]\} - \{(x+1) - [x+1]\}^2 \\ &= [x] + 1 + 2(x+1 - [x] - 1) - (x+1 - [x] - 1)^2 \\ &= [x] + 1 + 2(x - [x]) - (x - [x])^2 \\ &= f(x) + 1 \end{aligned}$$

(3)

$$\left(\begin{array}{l} 0 \leq x < 1 \quad a \geq 1 \\ [x] = 0 \quad \text{より} \\ f(x) = 2x - x^2 \\ = -(x-1)^2 + 1 \end{array} \right)$$

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad \text{よって}$$



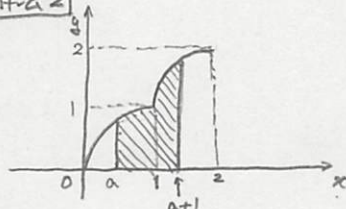
$$1 \leq x < 2 \quad a \geq 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x-2)^2 + 2 \\ &= -x^2 + 4x - 2 \end{aligned}$$

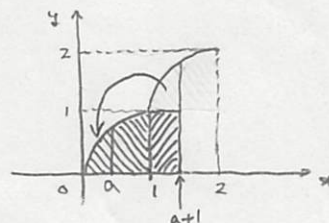
(4) 解法1

$$\begin{aligned} \int_a^{a+1} f(x) dx &= \int_a^1 f(x) dx + \int_1^{a+1} f(x) dx \\ &= \int_a^1 (-x^2 + 2x) dx + \int_1^{a+1} (-x^2 + 4x - 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_a^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x \right]_1^{a+1} \\ &= \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{3}a^3 + a^2 \right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3}(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) + 2(a^2 + 2a + 1) - 2(a + 1) \right) \\ &\quad - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 2 \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}a^3 - a^2 - \frac{1}{3}a^3 - a^2 - a - \frac{1}{3} \\ &\quad + 2a^2 + 4a + 2 - 2a - 2 + \frac{1}{3} \\ &= a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

解法2



II



II

$$\begin{aligned} \int_0^1 (-x^2 + 2x) dx + a \cdot 1 \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 + a \\ &= a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

a, b, c を実数とし, $a \neq 0$ とする。2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B)を満たすものとする。

(A) $f(-1) = -1, f(1) = 1$

(B) $-1 \leq x \leq 1$ を満たすすべての x に対し, $f(x) \leq 3x^2 - 1$

このとき, 積分 $I = \int_{-1}^1 \{f'(x)\}^2 dx$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2003 東京大)

解法1

(A) $f(-1) = -1, f(1) = 1$ より

$$\begin{cases} a - b + c = -1 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} c = -a \\ b = 1 \end{cases}$$

よって

$$f(x) = ax^2 + x - a$$

(B) $g(x) = (3x^2 - 1) - f(x)$

$$= (3-a)x^2 - x + (a-1)$$

とおく。

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ で}$$

$$\min g(x) \geq 0 \text{ となるように。}$$

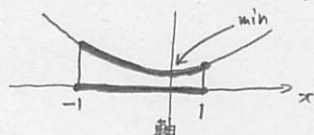
[I] 下に凸 a のとき

$$\begin{cases} \text{i.e. } 3-a > 0 \text{ かつ } a \neq 0 \text{ より} \\ a < 0, 0 < a < 3 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\text{軸: } x = \frac{1}{2(3-a)} (> 0) \text{ であり。}$$

$$\text{ii) } 0 < \frac{1}{2(3-a)} \leq 1 \text{ のとき}$$

$$\text{(i.e. } a < 0, 0 < a \leq \frac{5}{2} \text{ のとき)}$$



$$\min = g\left(\frac{1}{2(3-a)}\right)$$

$$= \frac{1}{4(3-a)} - \frac{1}{2(3-a)} + a - 1 \geq 0$$

$$1 - 2 + 4(3-a)(a-1) \geq 0$$

$$-1 + 4(-a^2 + 4a - 3) \geq 0$$

$$4a^2 - 16a + 13 \leq 0$$

$$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{4+\sqrt{3}}{2}$$

$$a < 0, 0 < a \leq \frac{5}{2} \text{ より}$$

$$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leq a \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{iii) } 1 \leq \frac{1}{2(3-a)} \text{ のとき}$$

$$\text{(i.e. } \frac{5}{2} \leq a < 3 \text{ のとき)}$$



$$\min = g(1) = 1 \geq 0$$

となり, 満たす。

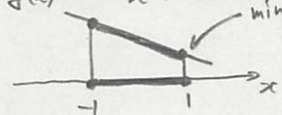
$$\text{よって } \frac{5}{2} \leq a < 3$$

ii), iii) より

$$\frac{4-\sqrt{3}}{2} \leq a < 3$$

[II] $a = 3$ のとき

$$g(x) = -x + 2$$



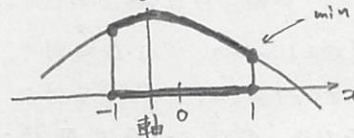
$$\min = g(1) = 1 \geq 0$$

となり, 満たす。

$$\text{よって } a = 3$$

[III] 上に凸 a のとき

$$\begin{cases} \text{i.e. } 3-a < 0 \text{ より} \\ a > 3 \text{ のとき} \end{cases}$$



$$\min = g(-1) = 1 \geq 0$$

となり, 満たす。

$$\text{よって } a > 3$$

[I] ~ [III] より

$$a \geq \frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

(裏へ)

$$f(x) = 2ax + 1 \quad (a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \{f(x)\}^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 (4a^2x^2 + 4ax + 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (4a^2x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{4}{3}a^2x^3 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{3}a^2 + 2 \\ &\geq \frac{8}{3} \times \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2} \right)^2 + 2 \\ &= \frac{8}{3} \times \frac{19-8\sqrt{3}}{4} + 2 \\ &= \frac{38-16\sqrt{3}}{3} + 2 \\ &= \frac{44-16\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore I \geq \frac{44-16\sqrt{3}}{3}$$

解法2

(A) ① $a=1, C=-a$ とする

$$f(x) = ax^2 + x - a$$

(B) ②

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$f(x) \leq 3x^2 - 1$$

$$ax^2 + x - a \leq 3x^2 - 1$$

$$a(x^2 - 1) \leq 3x^2 - x - 1$$

$$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } a \cdot 0 \leq 1 \\ x=-1 \text{ のとき } a \cdot 0 \leq 3 \end{cases}$$

となり 任意の a で成り立つ。

以下 $-1 < x < 1$ のとき

$$a(1-x^2) \geq -3x^2 + x + 1$$

$$a \geq \frac{-3x^2 + x + 1}{1-x^2}$$

$$a \geq 3 + \frac{x-2}{1-x^2}$$

$$h(x) = 3 + \frac{x-2}{1-x^2} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1(1-x^2) - (x-2)(-2x)}{(1-x^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 1}{(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

$h'(x)$ の符号!

x	-1	...	$2-\sqrt{3}$	...	1
$h'(x)$	/	+	0	-	/
$h(x)$		↗	$\frac{4-\sqrt{3}}{2}$	↘	

$$\therefore a \geq \frac{4-\sqrt{3}}{2}$$

(以下同様)