

すべての実数 x について $f(x) = x + 2 \int_0^1 f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$k = \int_0^1 f(t) dt \quad \text{--- } \textcircled{1}$$

とかくと

$$f(x) = x + 2k$$

$\textcircled{1}$ に代入して

$$k = \int_0^1 (t + 2k) dt$$

$$k = \left[\frac{1}{2} t^2 + 2k t \right]_0^1$$

$$k = \frac{1}{2} + 2k$$

$$k = -\frac{1}{2}$$

よって

$$\underline{\underline{f(x) = x - 1}}$$

- (1) 関数 $f(x) = \int_a^x (t^2 + 2t - 3) dt$ の極値と、それを与える x の値を求めよ。
- (2) $\int_a^x f(t) dt = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ のとき、関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

(1)

$$f(x) = \int_a^x (t^2 + 2t - 3) dt$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x+3)(x-1) \end{aligned}$$

$f'(x)$ の符号!

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗		↘	

∴

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_a^x (t^2 + 2t - 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 + t^2 - 3t \right]_a^x \\ &= \left(\frac{1}{3} x^3 + x^2 - 3x \right) - \left(\frac{1}{3} a^3 + a^2 - 3a \right) \\ f(-3) &= -9 + 9 + 9 - \left(\frac{1}{3} a^3 + a^2 - 3a \right) \\ &= -\frac{1}{3} a^3 - a^2 + 3a + 9 \\ f(1) &= \frac{1}{3} + 1 - 3 - \left(\frac{1}{3} a^3 + a^2 - 3a \right) \\ &= -\frac{1}{3} a^3 - a^2 + 3a - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

∴

$$\begin{cases} \text{極大値} & -\frac{1}{3} a^3 - a^2 + 3a + 9 \quad (x = -3) \\ \text{極小値} & -\frac{1}{3} a^3 - a^2 + 3a - \frac{5}{3} \quad (x = 1) \end{cases}$$

(2)

$$x=a \text{ において}$$

$$\int_a^a f(t) dt = a^3 - 6a^2 + 12a - 8$$

$$a^3 - 6a^2 + 12a - 8 = 0$$

$$(a-2)^3 = 0$$

$$\underline{a=2}$$

また、

与式の両辺を x で微分して

$$\underline{f(x) = 3x^2 - 12x + 12}$$

(1) 等式 $f(x) = 1 + x \int_0^1 t f(t-1) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 等式 $f(x) = 3 \left(\int_0^1 t f(t) dt \right)^2 x + a$ を満たす1次式 $f(x)$ がただ1つに定まるような定数 a の値を求めよ。

(1) 2011 全教養科大

(2) 2016 東京電機大

(1)

判別式 $D=0$ より.

$$k = \int_0^1 t f(t-1) dt \quad \text{--- ①}$$

と仮定.

$$f(x) = 1 + kx$$

① に代入して.

$$k = \int_0^1 t \{1 + k(t-1)\} dt.$$

$$k = \int_0^1 (kt^2 + (-k+1)t) dt$$

$$k = \left[\frac{k}{3} t^3 + \frac{-k+1}{2} t^2 \right]_0^1.$$

$$k = \frac{k}{3} + \frac{-k+1}{2}$$

$$6k = 2k - 3k + 3$$

$$7k = 3$$

$$k = \frac{3}{7}$$

よって

$$\underline{\underline{f(x) = 1 + \frac{3}{7}x}}$$

$$1 - 4 \times \frac{a}{2} = 0$$

$$1 - 2a = 0$$

$$\underline{\underline{a = \frac{1}{2}}}$$

(2)

$$k = \int_0^1 t f(t) dt \quad \text{--- ①}$$

と仮定.

$$f(x) = 3k^2x + a.$$

① に代入して

$$k = \int_0^1 t (3k^2t + a) dt$$

$$k = \int_0^1 (3k^2t^2 + at) dt$$

$$k = \left[k^2t^3 + \frac{a}{2}t^2 \right]_0^1.$$

$$k = k^2 + \frac{a}{2}$$

$$k^2 - k + \frac{a}{2} = 0 \quad \text{--- ②}$$

$f(x)$ が "ただ" 1つに定まるためには.

② が重解をもつとよい.

関数 $F(x) = \int_0^x (at^2 + bt + c)dt + d$ が $x = -1$ で極大値 $\frac{17}{3}$ をとり、 $x = 3$ で極小値 -5 をとるとき、定数 a, b, c, d の値を求めよ。

(2006 筑前大)

$x = -1$ で極大値 $\frac{17}{3}$ である

$$F(-1) = \frac{17}{3} \quad \text{かつ} \quad F'(-1) = 0$$

$x = 3$ で極小値 -5 である

$$F(3) = -5 \quad \text{かつ} \quad F'(3) = 0$$

$$F'(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{である}$$

$$F'(-1) = 0 \quad \text{かつ} \quad F'(3) = 0 \quad \text{と}$$

解と係数の関係より

$$\begin{cases} -1 + 3 = -\frac{b}{a} \\ -1 \times 3 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -3a \end{cases}$$

このとき

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (at^2 - 2at - 3a)dt + d \\ &= \left[\frac{1}{3}at^3 - at^2 - 3at \right]_0^x + d \\ &= \frac{1}{3}ax^3 - ax^2 - 3ax + d \end{aligned}$$

$$F(-1) = \frac{17}{3} \quad \text{より}$$

$$-\frac{a}{3} - a + 3a + d = \frac{17}{3}$$

$$\frac{5}{3}a + d = \frac{17}{3}$$

$$5a + 3d = 17 \quad \text{————— ①}$$

$$F(3) = -5 \quad \text{より}$$

$$9a - 9a - 9a + d = -5$$

$$-9a + d = -5$$

$$d = 9a - 5 \quad \text{————— ②}$$

①, ② より

$$5a + 3(9a - 5) = 17$$

$$32a = 32$$

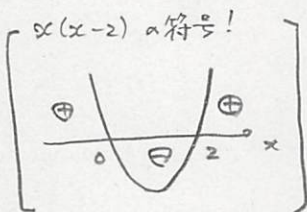
$$\text{よって} \quad \underline{\underline{a = 1, b = -2, c = -3, d = 4}}$$

関数 $f(t) = \int_t^{t+1} |x(x-2)| dx$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq t \leq 1$ のとき $f(t)$ を求めよ。
 (2) $1 < t \leq 2$ のとき $f(t)$ を求めよ。
 (3) $0 \leq t \leq 2$ のとき $f(t)$ の最大値、最小値を求めよ。

(2013 東北学院大)

(1)

 $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_t^{t+1} |x(x-2)| dx \\
 &= \int_t^{t+1} (-x^2 + 2x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_t^{t+1} \\
 &= -\frac{1}{3}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) + (t^2 + 2t + 1) \\
 &\quad - \left(-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right) \\
 &= \underline{\underline{-t^2 + t + \frac{2}{3}}}
 \end{aligned}$$

(2)

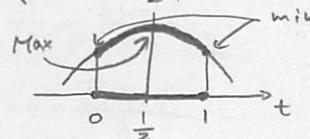
 $1 < t \leq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \int_t^{t+1} |x(x-2)| dx \\
 &= \int_t^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^{t+1} (x^2 - 2x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_t^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^{t+1} \\
 &= \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{3}(t^3 + 3t^2 + 3t + 1) - (t^2 + 2t + 1) \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \\
 &= \underline{\underline{\frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 2}}
 \end{aligned}$$

(3)

(i) $0 \leq t \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(t) &= -t^2 + t + \frac{2}{3} \\
 &= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

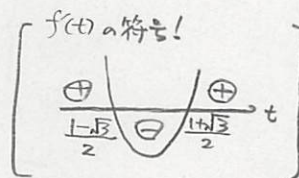
頂点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{12}\right)$ 軸: $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ に注意

$$\begin{cases} \text{Max} = \frac{11}{12} & (t = \frac{1}{2}) \\ \text{min} = \frac{2}{3} & (t = 0, 1) \end{cases}$$

(ii) $1 < t \leq 2$ のとき

$$f(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 2$$

$$f'(t) = 2t^2 - 2t - 1$$



t	(1)	...	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	...	2
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$(\frac{2}{3})$	↘		↗	$\frac{4}{3}$

$$t = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ のとき } 2t^2 - 2t - 1 = 0$$

(裏に続く)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \\ 2 & -2 & -1 & \frac{2}{3} & -1 & -1 & 2 \\ & & & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \\ & & & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 & \\ & & & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \\ & & & & & - & \frac{11}{6} \end{array} \right)$$

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}t^3 - t^2 - t + 2$$

$$= (2t^2 - 2t - 1)\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{6}\right) - t + \frac{11}{6}$$

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{11}{6}$$

$$= \frac{8-3\sqrt{3}}{6}$$

(i), (ii) 4)

$$\begin{cases} \text{Max } f(t) = \frac{4}{3} & (t=2) \\ \text{min } f(t) = \frac{8-3\sqrt{3}}{6} & (t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}) \end{cases}$$

整式 $f(x)$ と実数 C が $\int_0^x f(y)dy + \int_0^1 (x+y)^2 f(y)dy = x^2 + C$ を満たすとき、この $f(x)$ と C を求めよ。

(2009 京都大)

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (x+y)^2 f(y) dy \\ &= \int_0^1 (x^2 + 2xy + y^2) f(y) dy \\ &= x^2 \int_0^1 f(y) dy + 2x \int_0^1 y f(y) dy + \int_0^1 y^2 f(y) dy \end{aligned}$$

よ) 与等式は

$$\begin{aligned} & \int_0^x f(y) dy + x^2 \int_0^1 f(y) dy + 2x \int_0^1 y f(y) dy + \int_0^1 y^2 f(y) dy \\ &= x^2 + C \quad \text{--- (8)} \end{aligned}$$

両辺を x で微分して

$$f(x) + 2x \int_0^1 f(y) dy + 2 \int_0^1 y f(y) dy = 2x$$

$$a = \int_0^1 f(y) dy \quad \text{--- (1)}, \quad b = \int_0^1 y f(y) dy$$

とおく

$$f(x) + 2ax + 2b = 2x$$

$$f(x) = (2-2a)x - 2b$$

① よ)

$$a = \int_0^1 \{(2-2a)y - 2b\} dy$$

$$a = \left[(1-a)y^2 - 2by \right]_0^1$$

$$a = 1-a-2b$$

$$2a + 2b = 1 \quad \text{--- (1)'} \quad \text{--- (1)'} \quad \text{--- (1)'}$$

② よ)

$$b = \int_0^1 \{(2-2a)y^2 - 2by\} dy$$

$$b = \left[\frac{2-2a}{3} y^3 - by^2 \right]_0^1$$

$$b = \frac{2-2a}{3} - b$$

$$6b = 2-2a$$

$$a + 3b = 1 \quad \text{--- (2)'}$$

①', ②' よ)

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{4}$$

よ) 7

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}}$$

* $x=0$ とし

$$\int_0^1 y^2 f(y) dy = C$$

$$\int_0^1 y^2 \left(\frac{3}{2}y - \frac{1}{2} \right) dy = C$$

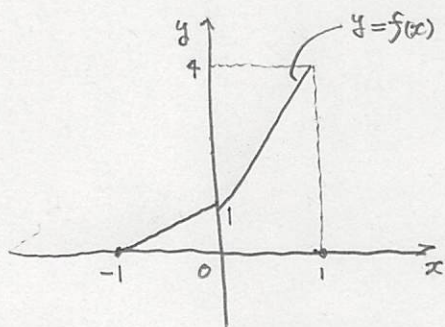
$$C = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}y^3 - \frac{1}{2}y^2 \right) dy$$

$$= \left[\frac{3}{8}y^4 - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{6}$$

$$= \underline{\underline{\frac{5}{24}}}$$

xy 平面の点 $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 4)$ を結んでできる折れ線をグラフとする関数を $y=f(x)$ とおく。このとき、積分 $\int_{-1}^1 \{f(x) - (a|x|+b)\}^2 dx$ を最小にする a, b を求めよ。また、そのときの積分の値を求めよ。(2010 東北大)



$-1 \leq x \leq 0$ のとき

$$f(x) = x+1, \quad |x| = -x$$

$0 \leq x \leq 1$ のとき

$$f(x) = 3x+1, \quad |x| = x$$

$$\int_{-1}^1 \{f(x) - (a|x|+b)\}^2 dx$$

$$= \int_{-1}^0 \{x+1 - (-ax+b)\}^2 dx$$

$$+ \int_0^1 \{3x+1 - (ax+b)\}^2 dx \quad \text{--- ①}$$

$$= \int_{-1}^0 \{(a+1)x - b+1\}^2 dx$$

$$+ \int_0^1 \{(-a+3)x - b+1\}^2 dx$$

$$= \int_{-1}^0 \{(a+1)^2 x^2 - 2(a+1)(b-1)x + (b-1)^2\} dx$$

$$+ \int_0^1 \{(a-3)^2 x^2 + 2(a-3)(b-1)x + (b-1)^2\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} (a+1)^2 x^3 - (a+1)(b-1)x^2 + (b-1)^2 x \right]_{-1}^0$$

$$+ \left[\frac{1}{3} (a-3)^2 x^3 + (a-3)(b-1)x^2 + (b-1)^2 x \right]_0^1$$

$$= - \left\{ -\frac{1}{3} (a+1)^2 - (a+1)(b-1) - (b-1)^2 \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{3} (a-3)^2 + (a-3)(b-1) + (b-1)^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \{(a+1)^2 + (a-3)^2\} + (2a-2)(b-1) + 2(b-1)^2$$

$$= \frac{1}{3} (2a^2 - 4a + 10) + (2ab - 2a - 2b + 2) + 2(b^2 - 2b + 1)$$

$$= \frac{2}{3} a^2 + \left(2b - \frac{10}{3}\right) a + 2b^2 - 6b + \frac{22}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ a^2 + (3b-5)a \right\} + 2b^2 - 6b + \frac{22}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ \left(a + \frac{3b-5}{2}\right)^2 - \frac{9b^2 - 30b + 25}{4} \right\} + 2b^2 - 6b + \frac{22}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \left(a + \frac{3b-5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} b^2 - b + \frac{19}{6}$$

$$= \frac{2}{3} \left(a + \frac{3b-5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} (b-1)^2 + \frac{8}{3}$$

よって

$$a = -\frac{3b-5}{2} \quad \text{かつ} \quad b=1$$

つまり

$$a=1, b=1 \quad \text{となり、}$$

このとき

$$\underline{\underline{\text{最小値 } \frac{8}{3} \quad (a=1, b=1)}}$$

a を正の定数とする。 $f(x) = ax + \int_0^1 \{f(t)\}^2 dt$ を満たす関数 $f(x)$ がただ1つしか存在しないように定数 a の値を定めよ。また、そのときの $f(x)$ を求めよ。

(1999 東北大)

$$k = \int_0^1 \{f(t)\}^2 dt \quad \text{--- ①}$$

とおくと

$$f(x) = ax + k$$

① に代入して、

$$k = \int_0^1 (at + k)^2 dt$$

$$k = \left[\frac{1}{3a} (at + k)^3 \right]_0^1$$

$$k = \frac{1}{3a} (a + k)^3 - \frac{1}{3a} k^3$$

$$3ak = a^3 + 3a^2k + 3ak^2$$

$$3ak^2 + (3a^2 - 3a)k + a^3 = 0 \quad \text{--- ②}$$

 k について a 2次方程式

たが"1"の実数解をもつとよい。

 k は任意な a で判別式 $D = 0$ とするとよく、

$$D = (3a^2 - 3a)^2 - 4 \times 3a \times a^3$$

$$= 9a^4 - 18a^3 + 9a^2 - 12a^4$$

$$= -3a^4 - 18a^3 + 9a^2 = 0$$

$$a^2 \neq 0 \text{ より}$$

$$a^2 + 6a - 3 = 0 \quad (a^2 = -6a + 3)$$

$$a = -3 \pm 2\sqrt{3}$$

$$a > 0 \text{ より}$$

$$a = 2\sqrt{3} - 3$$

このとき ② は

$$(\sqrt{3a}k - a\sqrt{a})^2 = 0$$

$$k = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

よって

$$\underline{a = 2\sqrt{3} - 3, f(x) = (2\sqrt{3} - 3)x + 2 - \sqrt{3}}$$

整式 $f(x)$ は、等式 $3 \int_0^x t f'(t) dt = 2(x+1)f(x) - 1$ を満たすものとする。

- (1) $f(0)$ を求めよ。
 (2) $f(x)$ の次数を求めよ。
 (3) $f(x)$ を求めよ。

(2016 東邦大)

(1)

与等式で $x=0$ とし。

$$3 \int_0^0 t f'(t) dt = 2f(0) - 1$$

$$0 = 2f(0) - 1$$

$$\therefore \underline{f(0) = \frac{1}{2}}$$

(2) **解法1**与等式の両辺を x で微分して。

$$3x f'(x) = 2f(x) + 2(x+1)f'(x)$$

$$3x f'(x) = 2f(x) + 2x f'(x) + 2f'(x)$$

$$2f(x) - x f'(x) + 2f'(x) = 0$$

$$2f(x) = (x-2)f'(x) \quad \text{————— ①}$$

よって $f(x)$ は n 次式とす。

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots \quad (a \neq 0) \text{ とす。}$$

$$f'(x) = anx^{n-1} + b(n-1)x^{n-2} + \dots$$

① a 最高次の係数に着目すると。

$$2a = an$$

$$a \neq 0 \text{ より}$$

$$n = 2$$

$$\therefore \underline{f(x) \text{ の次数は } 2}$$

解法2 $f(x)$ は n 次式とす。

$$f(x) = ax^n + \dots \quad (a \neq 0) \text{ とす。}$$

$$f'(x) = anx^{n-1} + \dots$$

$$3 \int_0^x t f'(t) dt = 3 \int_0^x t (ant^{n-1} + \dots) dt$$

$$= 3 \int_0^x (ant^n + \dots) dt$$

$$= 3 \left[\frac{an}{n+1} t^{n+1} + \dots \right]_0^x$$

$$= \frac{3an}{n+1} x^{n+1} + \dots$$

$$2(x+1)f(x) - 1 = 2(x+1)(ax^n + \dots) - 1$$

$$= 2ax^{n+1} + \dots$$

最高次の係数に着目して。

$$\frac{3an}{n+1} = 2a$$

$$3an = 2an + 2a$$

$$an = 2a$$

$$a \neq 0 \text{ より } n = 2$$

$$\therefore \underline{f(x) \text{ の次数は } 2}$$

(3) **解法1**

(1), (2) より

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{1}{2} \quad \text{とす。}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

① より。

$$2(ax^2 + bx + \frac{1}{2}) = (x-2)(2ax + b)$$

$$2ax^2 + 2bx + 1 = 2ax^2 + (-4a + b)x - 2b$$

 x について a 恒等式を a として

$$\begin{cases} 2b = -4a + b \\ 1 = -2b \end{cases}$$

これを解いて。

$$a = \frac{1}{8}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \underline{f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

解法2

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{1}{2} \quad \text{とす。}$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$2(x+1)f(x) - 1 = 2(x+1)(ax^2 + bx + \frac{1}{2}) - 1$$

$$= 2ax^3 + (2a + 2b)x^2 + (2b + 1)x$$

 x について a 恒等式を a として x で微分して。

$$3x f'(x) = 6ax^2 + (4a + 4b)x + (2b + 1)$$

$$6ax^2 + 3bx = 6ax^2 + (4a + 4b)x + (2b + 1)$$

 x について a 恒等式を a として

$$\begin{cases} 3b = 4a + 4b \\ 0 = 2b + 1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{これを解いて。 } a = \frac{1}{8}, \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \underline{f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

関数 $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ は, $n=0, 1, 2, 3$ に対して, 関係式

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} f_n(x) & (f_n(0) \neq 0) \\ \int_0^x f_n(t) dt + 1 & (f_n(0) = 0) \end{cases} \quad \text{を満たしているとする。}$$

- (1) $f_0(x) = x$ のとき, $f_4(x)$ を求めよ。
 (2) $f_1(x) = 0$ ならば, $f_0(x)$ は定数であることを証明せよ。
 (3) $f_2(x) = 0$ ならば, $f_0(x) = ax + b$ (a, b は定数) と表されることを証明せよ。

(2014 埼玉大)

(1)

$$f_0(0) = 0 \quad \text{よって}$$

$$f_1(x) = \int_0^x f_0(t) dt + 1$$

$$= \int_0^x t dt + 1$$

$$= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^x + 1$$

$$= \frac{1}{2} x^2 + 1$$

$$f_1(0) = 1 \neq 0 \quad \text{よって}$$

$$f_2(x) = \frac{d}{dx} f_1(x)$$

$$= x$$

$$\text{同様に } f_3(x) = \frac{1}{2} x^2 + 1$$

$$\underline{f_4(x) = x}$$

(2) (証明)

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} f_0(x) & (f_0(0) \neq 0) \\ \int_0^x f_0(t) dt + 1 & (f_0(0) = 0) \end{cases}$$

(i) $f_0(0) \neq 0$ のとき

$$f_1(x) = 0 \quad \text{より}$$

$$\frac{d}{dx} f_0(x) = 0$$

$$\int \frac{d}{dx} f_0(x) dx = 0$$

$$f_0(x) = C_1 \quad (C_1 \neq 0 \text{ 以外の定数})$$

(ii) $f_0(0) = 0$ のとき

$$f_1(x) = 0 \quad \text{より}$$

$$\int_0^x f_0(t) dt + 1 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{と}$$

$$0 + 1 = 0 \quad \text{となり不合理。}$$

(i), (ii) より

$$f_1(x) = 0 \quad \text{ならば}$$

$$f_0(x) \text{ は定数である。}$$

(3) (証明)

$$f_2(x) = 0 \quad \text{のとき} \quad (2) \text{ と同様に}$$

$$f_1(x) = C_2 \quad (C_2 \text{ は } 0 \text{ でない定数})$$

とおける。

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} f_0(x) & (f_0(0) \neq 0) \\ \int_0^x f_0(t) dt + 1 & (f_0(0) = 0) \end{cases}$$

(i) $f_0(0) \neq 0$ のとき

$$\frac{d}{dx} f_0(x) = C_2 \quad \text{より}$$

$$\int \frac{d}{dx} f_0(x) dx = \int C_2 dx$$

$$f_0(x) = C_2 x + C_3 \quad (C_3 \text{ は定数})$$

$$\text{つまり, } C_2 = a, \quad C_3 = b \quad \text{とおくと}$$

$$f_0(x) = ax + b \quad \text{と表される。}$$

(ii) $f_0(0) = 0$ のとき

$$\int_0^x f_0(t) dt + 1 = C_2$$

両辺を x で微分して

$$f_0(x) = 0$$

$$\text{つまり } a = 0, \quad b = 0 \quad \text{と表される。}$$

$$f_0(x) = ax + b \quad \text{と表される。}$$

(i), (ii) より

$$f_2(x) = 0 \quad \text{ならば}$$

$$f_0(x) = ax + b \quad (a, b \text{ は定数})$$

と表される。