

(1) 曲線 $y=x^3-4x$ と曲線 $y=3x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。(2) $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とし、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(1, f(1))$ における接線を ℓ とするとき、曲線 $y=f(x)$ と接線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1)

$$\begin{cases} y=x^3-4x \\ y=3x^2 \end{cases}$$

を連立して

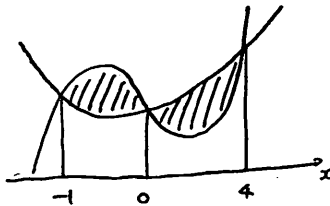
$$x^3-4x=3x^2$$

$$x^3-3x^2-4x=0$$

$$x(x^2-3x-4)=0$$

$$x(x+1)(x-4)=0$$

$$x=0, -1, 4$$

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{ (x^3-4x) - 3x^2 \} dx \\ &\quad + \int_0^4 \{ 3x^2 - (x^3-4x) \} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 2x^2 \right]_{-1}^4 \\ &= -\left(\frac{1}{4} + 1 - 2 \right) + (-64 + 64 + 32) \\ &= 33 - \frac{1}{4} \\ &= \underline{\underline{\frac{131}{4}}} \end{aligned}$$

(2)

接点 $(1, -8)$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 5$$

$$f'(1) = 3 + 4 - 5 = 2$$

$$\ell: y+8 = 2(x-1)$$

$$y = 2x - 10$$

 $y=f(x)$ と ℓ を連立して

$$x^3+2x^2-5x-6 = 2x-10$$

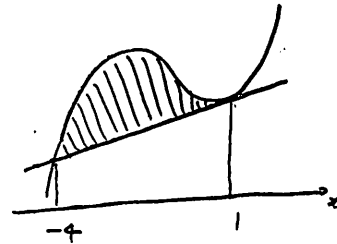
$$x^3+2x^2-7x+4=0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -7 & 4 \\ & & 1 & 3 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right)$$

$$(x-1)(x^2+3x-4)=0$$

$$(x-1)^2(x+4)=0$$

$$x=1, -4$$

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 \{ f(x) - (2x-10) \} dx \\ &= \int_{-4}^1 (x-1)^2(x+4) dx \\ &= \int_{-4}^1 (x-1)^2 \{ (x-1) + 5 \} dx \\ &= \int_{-4}^1 \{ (x-1)^3 + 5(x-1)^2 \} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{5}{3}(x-1)^3 \right]_{-4}^1 \\ &= - \left\{ \frac{1}{4}(-5)^4 + \frac{5}{3}(-5)^3 \right\} \\ &= - \frac{625}{4} + \frac{625}{3} \\ &= \underline{\underline{\frac{625}{12}}} \end{aligned}$$

連立不等式 $y \geq x^2 - 1$, $y \leq x + 5$, $y \leq -3x + 9$ の表す領域の面積を求めよ。

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 & \text{--- ①} \\ y = x + 5 & \text{--- ②} \\ y = -3x + 9 & \text{--- ③} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= -\frac{16}{3} + 2 + 20 \\ &= \underline{\underline{\frac{50}{3}}} \end{aligned}$$

① と ② の交点

$$x^2 - 1 = x + 5$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$x = 3, -2$$

② と ③ の交点

$$x + 5 = -3x + 9$$

$$4x = 4$$

$$x = 1$$

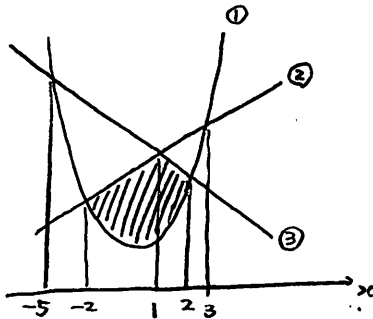
③ と ① の交点

$$-3x + 9 = x^2 - 1$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$(x+5)(x-2) = 0$$

$$x = -5, 2$$

求める領域の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{ (x+5) - (x^2-1) \} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{ (-3x+9) - (x^2-1) \} dx \\ &= \int_{-2}^1 (-x^2 + x + 6) dx + \int_1^2 (-x^2 - 3x + 10) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^1 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 10x \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 6 \right) - \left(\frac{8}{3} + 2 - 12 \right) \\ &\quad + \left(-\frac{8}{3} - 6 + 20 \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 10 \right) \end{aligned}$$

2つの放物線 $C_1: y=x^2$ と $C_2: y=x^2-6x+15$ の共通接線を ℓ とする。

(1) ℓ の方程式を求め、 C_1 、 C_2 および ℓ を図示せよ。

(2) C_1 、 C_2 および ℓ によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(2014 名城大)

(1)

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x^2 - 6x + 15$$

と仮定

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 2x - 6$$

ℓ と $y=f(x)$, $y=g(x)$ との接点をそれぞれ (s, s^2) , $(t, t^2-6t+15)$

と仮定

$$f'(s) = 2s \quad \text{より}$$

$$\ell: y - s^2 = 2s(x - s)$$

$$y - s^2 = 2sx - 2s^2$$

$$y = 2sx - s^2 \quad \text{--- ①}$$

$$g'(t) = 2t - 6 \quad \text{より}$$

$$\ell: y - (t^2 - 6t + 15) = (2t - 6)(x - t)$$

$$y = (2t - 6)x - t^2 + 15 \quad \text{--- ②}$$

①, ② は一致するから

$$\begin{cases} 2s = 2t - 6 \\ -s^2 = -t^2 + 15 \end{cases} \iff \begin{cases} s = t - 3 \\ s^2 = t^2 - 15 \end{cases}$$

$$(t - 3)^2 = t^2 - 15$$

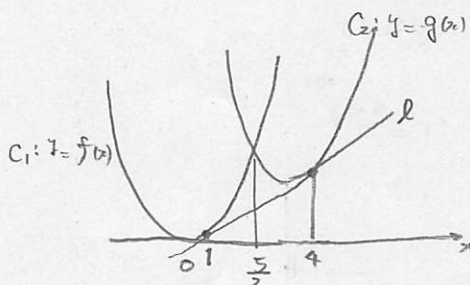
$$t^2 - 6t + 9 = t^2 - 15$$

$$-6t = -24$$

$$t = 4, \quad s = 1$$

① に代入して

$$\ell: y = 2x - 1$$



(2)

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{\frac{5}{2}} \{x^2 - (2x - 1)\} dx \\ &\quad + \int_{\frac{5}{2}}^4 \{(x^2 - 6x + 15) - (2x - 1)\} dx \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} (x^2 - 2x + 1) dx \\ &\quad + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x^2 - 8x + 16) dx \\ &= \int_1^{\frac{5}{2}} (x-1)^2 dx + \int_{\frac{5}{2}}^4 (x-4)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} (x-1)^3 \right]_1^{\frac{5}{2}} + \left[\frac{1}{3} (x-4)^3 \right]_{\frac{5}{2}}^4 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{27}{8} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{27}{8}\right) \\ &= \frac{9}{8} + \frac{9}{8} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

p を正の実数とする。放物線 $y=3x^2-px+1$ と x 軸で囲まれた図形の面積が $\frac{4}{27}$ であるとき、 p の値を求めよ。

(2014 群馬大)

面積が存在するためには

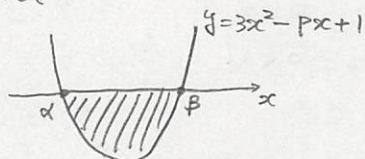
$$y=0 \text{ の判別式 } D > 0 \text{ より}$$

$$D = p^2 - 12 > 0$$

$$p > 0 \text{ とあわせて}$$

$$p > 2\sqrt{3}$$

このとき



$$y=0 \text{ とした 2 解を } \alpha, \beta$$

と仮定し、

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 12}}{6} \text{ より}$$

$$\alpha = \frac{p - \sqrt{p^2 - 12}}{6}, \beta = \frac{p + \sqrt{p^2 - 12}}{6}$$

よって、

$$\beta - \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{p^2 - 12}$$

面積は

$$\int_{\alpha}^{\beta} \{-(3x^2 - px + 1)\} dx = \frac{4}{27}$$

$$-\int_{\alpha}^{\beta} 3(x-\alpha)(x-\beta) dx = \frac{4}{27}$$

$$\frac{1}{2} (\beta - \alpha)^3 = \frac{4}{27}$$

$$\left(\frac{1}{3} \sqrt{p^2 - 12}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\frac{1}{3} \sqrt{p^2 - 12} = \frac{2}{3}$$

$$p^2 - 12 = 4$$

$$p^2 = 16$$

$$p = \pm 4$$

$$p > 2\sqrt{3} \text{ より}$$

$$\underline{\underline{p = 4}}$$

関数 $f(x) = |x^2 - 3x| - x$ について、次の問いに答えよ。(1) 直線 $l: y = -x + k$ と $y = f(x)$ のグラフがちょうど3点を共有するとき、定数 k の値を求めよ。(2) (1) で求めた k の値に対する直線 l と $y = f(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めよ。 (2013 首都大学 東京)

(1)

2式を連立して

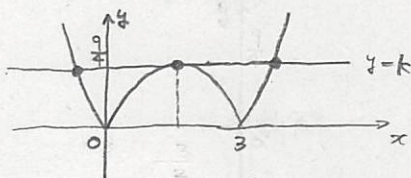
$$|x^2 - 3x| - x = -x + k$$

$$|x^2 - 3x| = k$$

これが異なる3つの実数解をもつとよく、

$$y = |x^2 - 3x| \quad \text{と} \quad y = k$$

のグラフが異なる3つの共有点をもつとよい。



グラフより

$$k = \frac{9}{4}$$

よって、

求める面積 S は

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{9}{4} - (|x^2 - 3x|) \right\} dx$$

$$= 2 \int_0^3 |x^2 - 3x| dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx + 2 \int_0^3 x(x - 3) dx$$

$$= \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 - \frac{1}{3} \times 3^3$$

$$= \frac{1}{6} \times (3\sqrt{2})^3 - 9$$

$$= \underline{\underline{9\sqrt{2} - 9}}$$

(2)

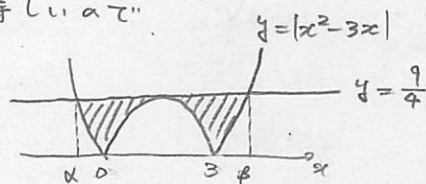
$$y = |x^2 - 3x| - x \quad \text{と} \quad y = -x + \frac{9}{4}$$

のグラフで囲まれた図形の面積を

$$y = |x^2 - 3x| \quad \text{と} \quad y = \frac{9}{4}$$

のグラフで囲まれた図形の面積は

等しいので

 $x \leq 0, 3 \leq x$ のとき

$$y = |x^2 - 3x| = x^2 - 3x \quad \text{であり}$$

$$x^2 - 3x = \frac{9}{4}$$

$$4x^2 - 12x - 9 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{72}}{4}$$

$$= \frac{6 \pm 6\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$$

不等式 $|x^2-1|+|y+2|\leq 1$ で表される領域を D とする。領域 D を図示し、その面積を求めよ。 (2005 埼玉大)

(i) $x^2-1\geq 0$ かつ $y+2\geq 0$ のとき

(つまり) $x\leq -1, 1\leq x$ かつ $y\geq -2$ のとき)

$$(x^2-1)+(y+2)\leq 1$$

$$y\leq -x^2$$

(ii) $x^2-1\geq 0$ かつ $y+2\leq 0$ のとき

(つまり) $x\leq -1, 1\leq x$ かつ $y\leq -2$ のとき)

$$(x^2-1)-(y+2)\leq 1$$

$$y\geq x^2-4$$

(iii) $x^2-1\leq 0$ かつ $y+2\geq 0$ のとき

(つまり) $-1\leq x\leq 1$ かつ $y\geq -2$ のとき)

$$-(x^2-1)+(y+2)\leq 1$$

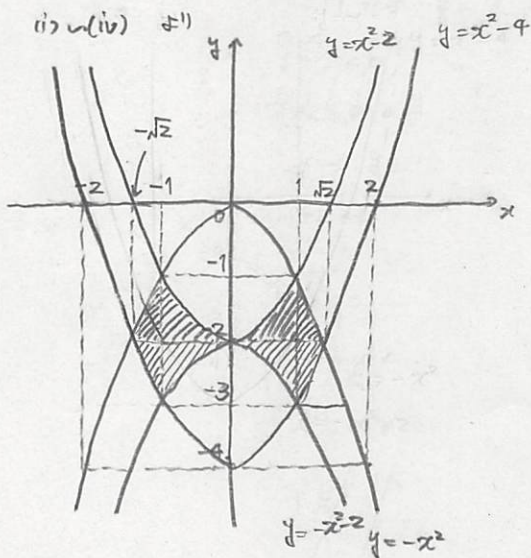
$$y\leq x^2-2$$

(iv) $x^2-1\leq 0$ かつ $y+2\leq 0$ のとき

(つまり) $-1\leq x\leq 1$ かつ $y\leq -2$ のとき)

$$-(x^2-1)-(y+2)\leq 1$$

$$y\geq -x^2-2$$



求める領域は図の斜線部
ただし、境界を含む

求める面積 S は

$$\frac{1}{2}S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \{-x^2 - (-2)\} dx - 2 \int_{-1}^1 \{-x^2 - (-1)\} dx$$

$$\frac{1}{2}S = - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) dx$$

$$+ 2 \int_{-1}^1 (x-1)(x+1) dx$$

$$S = \frac{1}{3} \times (2\sqrt{2})^3 - \frac{2}{3} \times 2^3$$

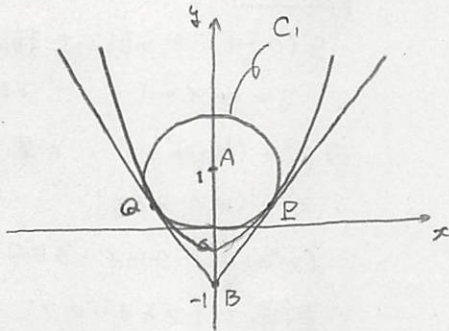
$$= \frac{16\sqrt{2}}{3} - \frac{16}{3}$$

$$= \frac{16(\sqrt{2}-1)}{3}$$

座標平面上において、点 $A(0, 1)$ を中心とし原点 O を通る円 C_1 について、点 $B(0, -1)$ から引いた2本の接線の接点を P, Q とする。ただし、点 P の x 座標は正とする。さらに、 y 軸に関して対称な放物線 C_2 が直線 BP と直線 BQ にそれぞれ点 P と点 Q で接するものとする。

- (1) 2点 P, Q の座標を求めよ。
- (2) 放物線 C_2 を表す方程式を求めよ。
- (3) 点 A から放物線 C_2 上の各点までの距離は1以上であることを示せ。
- (4) 円 C_1 の原点 O を含む弧 PQ と放物線 C_2 で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

(2011 宮崎大)



(1) 解法1

接点 (x, y) とおく。 C_1 上の点なので

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \quad \text{--- ① を満たす}$$

$$\text{接線 } x^2 + (y-1)(y+1) = 1$$

また $B(0, -1)$ を通るので

$$-2(y-1) = 1$$

$$-2y + 2 = 1$$

$$y = \frac{1}{2}$$

①に代入して

$$x^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$x^2 = \frac{3}{4} \quad \text{--- ② } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって } P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), Q\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(2)

$$\text{直線 } BP: y+1 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$$

$$y = \sqrt{3}x - 1$$

$$C_2: y = ax^2 + b \quad \text{とてき}$$

$$C_2 \geq BP \text{ は } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ で接するので}$$

$$(ax^2 + b) - (\sqrt{3}x - 1) = a\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$ax^2 - \sqrt{3}x + b + 1 = ax^2 - \sqrt{3}ax + \frac{3}{4}a$$

 x について恒等式なので

$$\begin{cases} -\sqrt{3} = -\sqrt{3}a \\ b + 1 = \frac{3}{4}a \end{cases}$$

より

$$a = 1, b = -\frac{1}{4}$$

$$\text{よって } C_2: y = x^2 - \frac{1}{4}$$

(3) 証明

$$C_2 \text{ 上の点 } (t, t^2 - \frac{1}{4}) \text{ とおく}$$

点 $A(0, 1)$ から距離 d は

$$d = \sqrt{t^2 + (t^2 - \frac{1}{4} - 1)^2}$$

$$= \sqrt{t^2 + (t^2 - \frac{5}{4})^2}$$

$$= \sqrt{t^4 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{25}{16}}$$

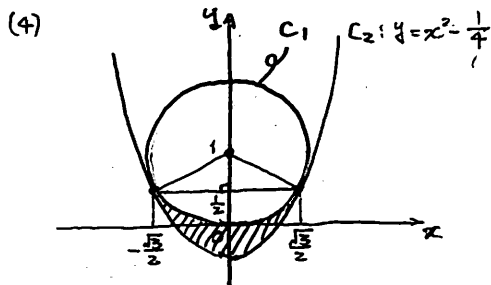
$$= \sqrt{(t^2 - \frac{3}{4})^2 + 1} \geq 1$$

よって

$$d \geq 1 \quad \text{が成り立つ。}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{等号成立は} \\ t^2 = \frac{3}{4} \quad a \text{ と } \\ \text{つまり } t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a \text{ と } \end{array} \right)$$

(裏に続く)



$$= \text{shaded area} - \text{shaded area}$$

$$= \text{shaded area} - \left(\text{shaded area} - \text{triangle} \right)$$

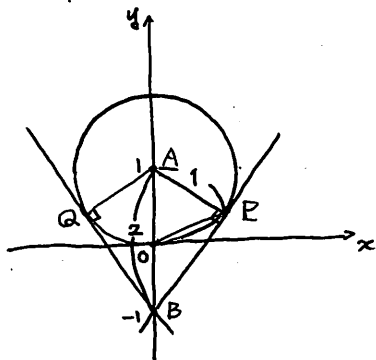
$$= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) \right\} dx - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \pi + \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= - \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) dx - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{6} (\sqrt{3})^3 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}}}$$

(1) **解法2**



直角三角形 PAB で $AB:AP = 2:1$

より, $\angle PAB = \frac{\pi}{3}$

また, $AO = AP = 1$ となる

$\triangle OPA$ は正三角形 となり $OP = 1$

このとき

OP と x 軸 正の向きとのなす角

は $\frac{\pi}{6}$ となる

$$P \left(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\text{より, } \underline{\underline{P \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)}}$$

図形の対称性から

$$\underline{\underline{Q \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)}}$$

解法3

$B(0, -1)$ から引いた接線を

$$y = mx - 1 \quad \text{と仮定}$$

円 $x^2 + (y-1)^2 = 1$ と連立して

$$x^2 + (mx-2)^2 = 1$$

$$(m^2+1)x^2 - 4mx + 3 = 0 \quad \text{--- ③}$$

重解をもつとよいから, 判別式 $D=0$

$$\frac{D}{4} = 4m^2 - 3(m^2+1)$$

$$= m^2 - 3 = 0$$

$$m = \pm \sqrt{3}$$

(i) $m = \sqrt{3}$ のとき ③ は

$$4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$(2x - \sqrt{3})^2 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

このとき

$$y = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

よって

$$\underline{\underline{P \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)}}$$

(ii) $m = -\sqrt{3}$ のとき

同様に

$$\underline{\underline{Q \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)}}$$

連立不等式 $|x| + |y| - 2 \leq 0$, $x^2 + 2x - 2y - 1 \geq 0$ の表す領域を D とする。領域 D を座標平面上に図示して、その面積を求めよ。

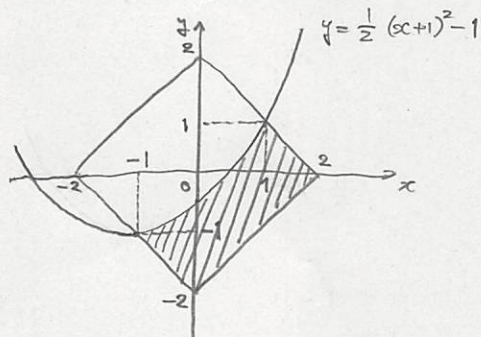
(2011 東京女子大)

解法1

$$\begin{cases} |x| + |y| - 2 \leq 0 \\ x^2 + 2x - 2y - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y| \leq 2 \\ y \leq \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| + |y| \leq 2 \\ y \leq \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1 \end{cases}$$

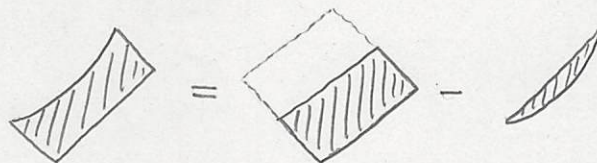


領域 D は図の斜線部
ただし、境界を含む。

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \right) - (-x - 2) \right\} dx \\ &\quad + \int_0^1 \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \right) - (x - 2) \right\} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \\ &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \right) dx + 1 \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3 + x^2 + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x \right]_0^1 + 1 \\ &= -\left(-\frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{2} \right) + 1 \\ &= \frac{1}{3} + 3 \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

解法2 (求積部分)



$$\begin{aligned} &= (2\sqrt{2})^2 \times \frac{1}{2} - \int_{-1}^1 \left\{ x - \left(\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1 \right) \right\} dx \\ &= 4 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x-1)(x+1) dx \\ &= 4 - \frac{1}{12} \times 2^3 \\ &= 4 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

曲線 $C: y = x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12$ が、1本の直線と異なる2点 P, Q で接する。

- (1) x 軸, y 軸との共有点をすべて求め、それらの座標を使って曲線 C のグラフの概形をかけ。
- (2) 直線 PQ の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 PQ で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2016 兵庫医科大学)

(1)

$$y=0 \text{ とし}$$

$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -9 & 27 & -31 & 12 & & \\ & & 1 & -8 & 19 & -12 & & \\ 1 & 1 & -8 & 19 & -12 & 0 & & \\ & & 1 & -7 & 12 & & & \\ 1 & 1 & -7 & 12 & 0 & & & \end{array} \right)$$

$$(x-1)^2(x^2-7x+12)=0$$

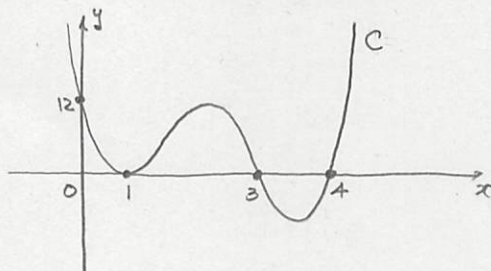
$$(x-1)^2(x-3)(x-4)=0$$

$$x=1, 3, 4$$

$$x=0 \text{ とし } y=12$$

以上により

$$\left\{ \begin{array}{l} x \text{ 軸との共有点 } (1,0), (3,0), (4,0) \\ y \text{ 軸との共有点 } (0,12) \end{array} \right.$$



(2)

2点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q .接線 $PQ: y = mx + n$ とおくと

$$(x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 31x + 12) - (mx + n) = (x-p)^2(x-q)^2$$

$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 + (-m-31)x + (-n+12) = (x^2 - 2px + p^2)(x^2 - 2qx + q^2)$$

両辺の係数を比較して

$$\begin{cases} -9 = -2p - 2q & \text{--- ①} \\ 27 = p^2 + 4pq + q^2 & \text{--- ②} \\ -m-31 = -2pq - 2p^2q & \text{--- ③} \\ -n+12 = p^2q^2 & \text{--- ④} \end{cases}$$

①より $p+q = \frac{9}{2}$ --- ①'

②より $(p+q)^2 + 2pq = 27$

$$\frac{81}{4} + 2pq = 27$$

$$pq = \frac{27}{8} \text{ --- ②'}$$

①', ②' より

 p, q を解にもつ2次方程式は

$$t^2 - \frac{9}{2}t + \frac{27}{8} = 0$$

$$8t^2 - 36t + 27 = 0$$

$$t = \frac{18 \pm 6\sqrt{3}}{8} = \frac{9 \pm 3\sqrt{3}}{4}$$

 $p < q$ とすると

$$p = \frac{9-3\sqrt{3}}{4}, \quad q = \frac{9+3\sqrt{3}}{4}$$

③より

$$m+31 = 2pq(p+q)$$

$$m+31 = 2 \times \frac{27}{8} \times \frac{9}{2}$$

$$m = \frac{243}{8} - 31 = -\frac{5}{8}$$

④より

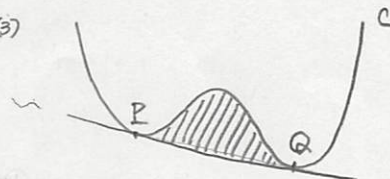
$$n-12 = -(pq)^2$$

$$n = -\frac{729}{64} + 12 = \frac{39}{64}$$

よって

$$PQ: y = -\frac{5}{8}x + \frac{39}{64}$$

(3)

求める面積 S は

$$S = \int_p^q (x-p)^2(x-q)^2 dx$$

(裏へ続く)

$$S = \int_p^q (x-p)^2 (x-q)^2 dx$$

$$\left(\begin{array}{l} x-p=h \quad \text{if } a < b \\ x=h+p \\ \begin{array}{|c|c|c|} \hline x & p & \rightarrow q \\ \hline h & 0 & \rightarrow q-p \\ \hline \end{array} \\ dx=dh \end{array} \right)$$

$$= \int_0^{q-p} h^2 (h+p-q)^2 dh$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{"c"} \\ q-p = \frac{9+3\sqrt{3}}{4} - \frac{9-3\sqrt{3}}{4} \\ = \frac{6\sqrt{3}}{4} \\ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{array} \right)$$

$$= \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} h^2 \left(h - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right)^2 dh$$

$$= \int_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}} \left(h^4 - 3\sqrt{3}h^3 + \frac{27}{4}h^2 \right) dh$$

$$= \left[\frac{1}{5}h^5 - \frac{3\sqrt{3}}{4}h^4 + \frac{9}{4}h^3 \right]_0^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{81\sqrt{3}}{8} \left(\frac{1}{5} \times \frac{27}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{4} \right)$$

$$= \frac{81\sqrt{3}}{8} \left(\frac{72}{20} - \frac{27}{8} \right)$$

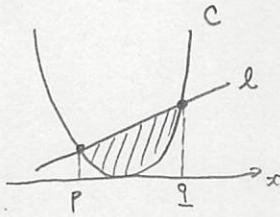
$$= \frac{81\sqrt{3}}{8} \times \frac{144-135}{40}$$

$$= \underline{\underline{\frac{729\sqrt{3}}{320}}}$$

放物線 $C: y = x^2$ に対して、次の2つの条件を満たす直線 l が通る点の存在範囲を求めよ。

- (A) C と l は異なる2点で交わる。
 (B) C と l で囲まれた領域の面積は36である。

(2014 東北大)



$$l: y = mx + n$$

C と l の交点の x 座標 P, Q

とおく。

P, Q は

$$x^2 = mx + n.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx - n = 0$$

の2解であり、 $P+Q = m, PQ = -n$.

(A) より

判別式 $D_1 > 0$ となる

$$m^2 + 4n > 0$$

$$n > -\frac{1}{4}m^2$$

(B) より

$$\int_P^Q \{(mx + n) - x^2\} dx = 36$$

$$= \int_P^Q (x - P)(x - Q) dx = 36$$

$$= \frac{1}{6} (Q - P)^3 = 36$$

$$(Q - P)^3 = -216$$

$$Q - P = -6$$

$$(Q - P)^2 = 36$$

$$P^2 - 2PQ + Q^2 = 36$$

$$(P + Q)^2 - 4PQ = 36$$

$$m^2 + 4n = 36$$

$$n = -\frac{1}{4}m^2 + 9$$

$$\therefore \text{aとb} \quad l: y = mx - \frac{1}{4}m^2 + 9 \quad \text{であり}$$

$$m^2 - 4xm + 4y - 36 = 0.$$

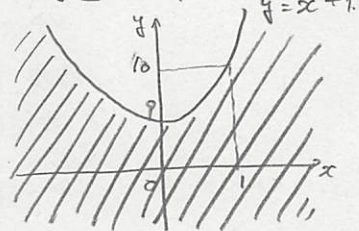
これより実数解をもつとよいので

$$\text{判別式 } D_2 \geq 0$$

$$\frac{D_2}{4} = 4x^2 - (4y - 36) \geq 0.$$

$$x^2 - y + 9 \geq 0$$

$$y \leq x^2 + 9.$$

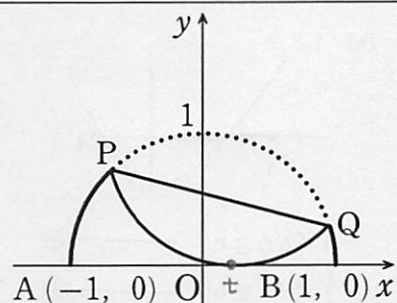


直線 l の存在範囲は図の斜線部
ただし、境界を含む。

A(-1, 0), B(1, 0)を直径とする右の図のような半円がある。弧AB上に2点P, Qをとり、弦PQを折り目として弧PQがx軸に接するように折り返す。接点のx座標を t ($-1 \leq t \leq 1$)とする。

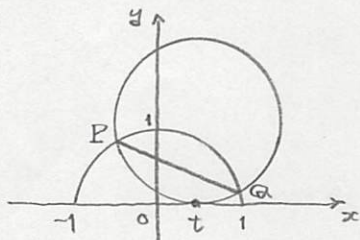
(1) 2点P, Qを通る直線の方程式を求めよ。

(2) t が-1から1まで動くとき、弦PQが通過する範囲を図示し、その面積を求めよ。



(2012 広島大)

(1)



ABを直径とする円: $x^2 + y^2 = 1$
と直線PQに関して対称な円は
x軸と点 $(t, 0)$ で接するから

$$(x-t)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2tx - 2y + t^2 = 0$$

とでき

2式を連立して

$$1 - 2tx - 2y + t^2 = 0$$

よって

$$\underline{PQ: 2tx + 2y - t^2 - 1 = 0}$$

(2)

$$PQ: 2tx + 2y - t^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

$$t^2 - 2xt - 2y + 1 = 0$$

かつ $-1 \leq t \leq 1$ で実数解をもつとよい。

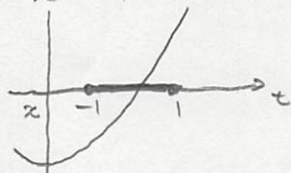
$$f(t) = t^2 - 2xt - 2y + 1$$

$$= (t-x)^2 - x^2 - 2y + 1$$

とおく



(i) $x < -1$ のとき



$$\begin{cases} f(-1) \leq 0 & \text{--- ①} \\ f(1) \geq 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

となるよ。

①より

$$1 + 2x - 2y + 1 \leq 0$$

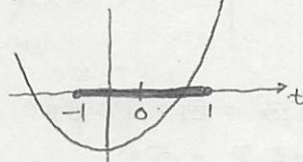
$$y \geq x + 1$$

②より

$$1 - 2x - 2y + 1 \geq 0$$

$$y \leq -x + 1$$

(ii) $-1 \leq x \leq 0$ のとき



$$\begin{cases} \text{判別式 } D \geq 0 & \text{--- ③} \\ f(1) \geq 0 & \text{--- ④} \end{cases}$$

となるよ。

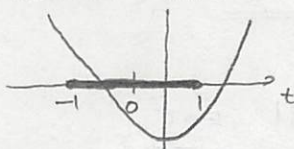
③より

$$D_4 = x^2 + 2y - 1 \geq 0$$

$$y \geq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{④より } y \leq -x + 1$$

(iii) $0 \leq x \leq 1$ のとき



$$\begin{cases} \text{判別式 } D \geq 0 & \text{--- ⑤} \\ f(-1) \geq 0 & \text{--- ⑥} \end{cases}$$

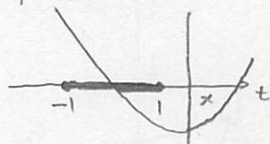
となるよ。

$$\text{⑤より } y \geq -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{⑥より } y \leq x + 1$$

(裏に続く)

(iv) $1 < x$ $a \neq 0$



$$\begin{cases} f(-1) \geq 0 & \text{--- ④} \\ f(1) \leq 0 & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

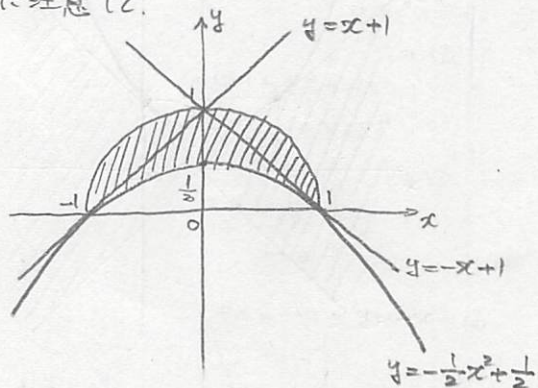
と仮定して、

④ より $y \leq x+1$

⑤ より $y \geq -x+1$

(i) ~ (iv) と $x^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$

に注意して、



求める領域は図の斜線部

ただし境界を含む。

面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 - \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x-1)(x+1) dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{12} \times 2^3 \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

※ $x^2 + y^2 \leq 1$ において

(i) と (iv) は 不要