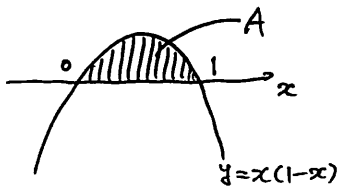
[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題99]

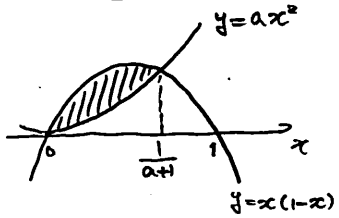
放物線 $y=x(1-x)$ と x 軸とで囲まれる部分 A の面積を求めよ。また，A の面積を放物線 $y=ax^2$ $(a>0)$ が2等分するように a の値を定めよ。



$$S(A)=-\int_0^1 x(1-x)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}\times 1^3$$

$$=\frac{1}{6}$$



$ax^2=x(1-x)$ として

$x\neq 0$ のとき

$ax=1-x$

$(a+1)x=1$

$x=\frac{1}{a+1}$

$y=x(1-x)$ と $y=ax^2$ のグラフで囲まれた部分 B として

$$S(B)=\int_0^{\frac{1}{a+1}}\{x(1-x)-ax^2\}\,dx$$

$$=(-a-1)\int_0^{\frac{1}{a+1}} x\left(x-\frac{1}{a+1}\right)dx$$

$$=\frac{a+1}{6}\left(\frac{1}{a+1}\right)^3$$

$$=\frac{1}{6(a+1)^2}$$

$S(B)=\frac{1}{2}S(A)$ より

$$\frac{1}{6(a+1)^2}=\frac{1}{12}$$

$(a+1)^2=2$

$a+1=\pm\sqrt{2}$

$a=\pm\sqrt{2}-1$

$a>0$ より

$a=\sqrt{2}-1$

放物線 $y=x^2$ と点(2, 6)を通る直線とで囲まれる部分の面積を最小にするような直線の方程式を求めよ。

点 $(2,6)$ を通る直線は

$y=x^2$ と囲まれる部分ができるので

$y-6=m(x-2)$

$y=mx-2m+6$ ——①

とできる.

$y=x^2$ と連立して

$x^2=mx-2m+6$

$x^2-mx+2m-6=0$

判別式 $D=m^2-4(2m-6)$

$=m^2-8m+24$

$=(m-4)^2+8>0$

なので，異なる2点で交わり，

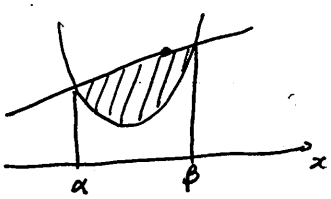
$x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-8m+24}}{2}$ より

2解 α,β $(\alpha<\beta)$ とおくと

$\alpha=\dfrac{m-\sqrt{m^2-8m+24}}{2}$, $\beta=\dfrac{m+\sqrt{m^2-8m+24}}{2}$

となり

$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-8m+24}$



囲まれた部分の面積 S は

$S=\int_\alpha^\beta\{(mx-2m+6)-x^2\}dx$

$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$=\dfrac{1}{6}(\sqrt{m^2-8m+24})^3$

これは

$f(m)=m^2-8m+24$

とおくと

$f(m)$ が最小のとき，S も最小

$f(m)=(m-4)^2+8$ より

$m=4$ のとき最小である.

このとき

求める直線は ① より

$y=4x-2$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A294]

曲線 $C: y=x^2$ 上の点 $P(a,\ a^2)$ における接線を ℓ_1，点 $Q(b,\ b^2)$ における接線を ℓ_2 とする。ただし，$a<b$ とする。ℓ_1 と ℓ_2 の交点を R とし，線分 PR，線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする。

(1) R の座標を a と b を用いて表せ。

(2) S を a と b を用いて表せ。

(3) ℓ_1 と ℓ_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ。

(2014 東北大)

(1)

接点 $P(a,a^2)$

$y=2x$

$y'_{(x=a)}=2a$

$\ell_1: y-a^2=2a(x-a)$

$y=2ax-a^2$

同様に

接点 $Q(b,b^2)$

$\ell_2: y=2bx-b^2$

ℓ_1 と ℓ_2 を連立して

$2ax-a^2=2bx-b^2$

$(2b-2a)x=b^2-a^2$

$2(b-a)x=(b-a)(b+a)$

$b\neq a$ より

$x=\dfrac{a+b}{2}$

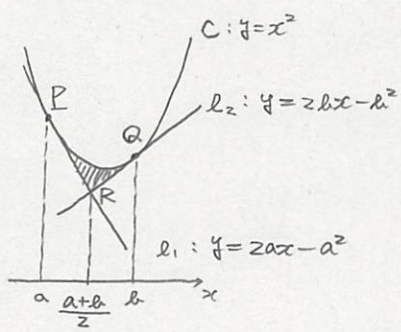
このとき

$y=2a\cdot\dfrac{a+b}{2}-a^2$

$=ab$

よって，$\underline{R\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)}$

(2)



$S=\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2-(2ax-a^2)\}dx$

$+\displaystyle\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2-(2bx-b^2)\}dx$

$=\displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx$

$S=\left[\dfrac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}}+\left[\dfrac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^3-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^3$

$=\dfrac{1}{24}(b-a)^3+\dfrac{1}{24}(b-a)^3$

$=\underline{\dfrac{1}{12}(b-a)^3}$

(3)

$\ell_1\perp\ell_2$ のとき

$2a\times 2b=-1$ ……①

$ab\neq 0$ なので

$a=-\dfrac{1}{4b}$

であり，このとき

$S=\dfrac{1}{12}\left(b+\dfrac{1}{4b}\right)^3$

① で $ab<0$，かつ $a<b$ より

$b>0$ である，

(相加)≧(相乗) より

$b+\dfrac{1}{4b}\geqq 2\sqrt{b\cdot\dfrac{1}{4b}}=1$

（等号成立は

$b=\dfrac{1}{4b}$ のとき

つまり $b=\dfrac{1}{2}$，$a=-\dfrac{1}{2}$ のとき）

$S=\dfrac{1}{12}\left(b+\dfrac{1}{4b}\right)^3\geqq\dfrac{1}{12}$

よって

$\underline{\min S=\dfrac{1}{12}\quad\left(a=-\dfrac{1}{2},\ b=\dfrac{1}{2}\ \text{のとき}\right)}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A295]

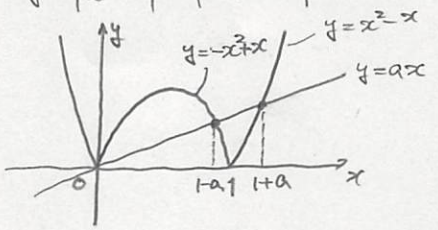
a を正の定数とし，曲線 $C: y=|x^2-x|$ と直線 $\ell: y=ax$ で囲まれた図形の面積を S とする。

(1) S を a を用いて表せ。

(2) a を変化させたとき，S の最小値とそのときの a の値を求めよ。 (2015 滋賀大)

(1)

$y=|x^2-x|=|x(x-1)|$



$0<x<1$ で共有点をもつとき

$-x^2+x=ax$

$x^2+ax-x=0$

$x\neq 0$ より

$x+a-1=0$

$x=1-a$

より

$0<1-a<1$

$-1<-a<0$

つまり $0<a<1$

$x>1$ との交点は

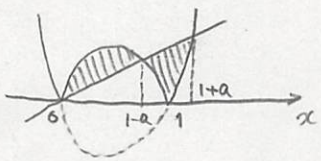
$x^2-x=ax$

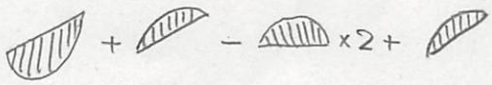
$x\neq 0$ より

$x-1=a$

$x=1+a$

(i) $0<a<1$ のとき



$S=$ 

$=\int_0^{1+a}\{ax-(x^2-x)\}dx$

$+\int_0^{1-a}\{(-x^2+x)-ax\}dx \times 2$

$-\int_0^1\{-x^2+x\}dx\times 2$

$=-\int_0^{1+a}x(x-1-a)dx-2\int_0^{1-a}x(x-1+a)dx$

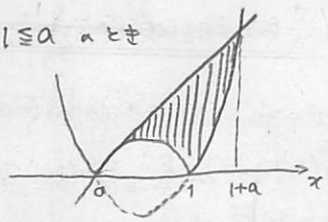
$+2\int_0^1 x(x-1)dx$

$=\frac{1}{6}(1+a)^3+\frac{1}{3}(1-a)^3-\frac{1}{3}\times 1^3$

$=\frac{1}{6}\{(1+3a+3a^2+a^3)+2(1-3a+3a^2-a^3)-2\}$

$=\frac{1}{6}(-a^3+9a^2-3a+1)$

(ii) $1\leqq a$ のとき



$S=$

$=\int_0^{1+a}\{ax-(x^2-x)\}dx-2\int_0^1(-x^2+x)dx$

$=-\int_0^{1+a}x(x-1-a)dx+2\int_0^1 x(x-1)dx$

$=\frac{1}{6}(1+a)^3-\frac{1}{3}\times 1^3$

$=\frac{1}{6}(a^3+3a^2+3a-1)$

(i), (ii) より

$$S=\begin{cases}\frac{1}{6}(-a^3+9a^2-3a+1) & (0<a<1 \text{ のとき})\\ \frac{1}{6}(a^3+3a^2+3a-1) & (1\leqq a \text{ のとき})\end{cases}$$

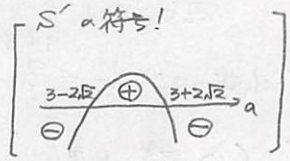
(2)

(i) $0<a<1$ のとき

$S'=\frac{1}{6}(-3a^2+18a-3)$

$=-\frac{1}{2}(a^2-6a+1)$

S' の符号！



(裏に続く)

a	(0)	…	$3-2\sqrt{2}$	…	(1)
S'		−	0	+	
S		↘		↗	

$a=3-2\sqrt{2}$ のとき

$a^2-6a+1=0$ を満たし，

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -1 & 3 & \\ \hline 1 & -6 & 1 & -1 & 9 & -3 & 1 \\ & & & -1 & 6 & -1 & \\ \hline & & & & 3 & -2 & 1 \\ & & & & 3 & -18 & 3 \\ \hline & & & & & 16 & -2 \end{array}$$

$$-a^3+9a^2-3a+1=(a^2-6a+1)(-a+3)+16a-2$$

$$=16(3-2\sqrt{2})-2$$

$$=46-32\sqrt{2}$$

よって

$0<a<1$ のとき

$$\min S=\frac{1}{6}(46-32\sqrt{2})$$

$$=\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$$

(ii) $1\leqq a$ のとき

$$S'=\frac{1}{6}(3a^2+6a+3)>0$$

なので

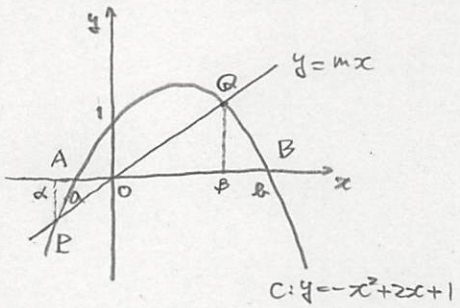
$1\leqq a$ で S は増加関数

(i)，(ii) より

$$\min S=\frac{23-16\sqrt{2}}{3} \quad (a=3-2\sqrt{2})$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A296]

放物線$C: y=-x^2+2x+1$とx軸の共有点を$A(a,\ 0)$, $B(b,\ 0)$とし，Cと直線$y=mx$の共有点を$P(\alpha,\ m\alpha)$, $Q(\beta,\ m\beta)$, 原点をOとする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$とする。線分OP，OAとCで囲まれた図形の面積と線分OQ，OBとCで囲まれた図形の面積が等しいとき，mの値を求めよ。 (2003 大阪大)



$-x^2+2x+1=0$ とおく

$x^2-2x-1=0$

$x=1\pm\sqrt{2}$

よって

$a=1-\sqrt{2}$, $b=1+\sqrt{2}$

より

$b-a=2\sqrt{2}$

$-x^2+2x+1=mx$ とおく

$x^2+(m-2)x-1=0$

$x=\dfrac{-m+2\pm\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$

$=\dfrac{-m+2\pm\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$

よって

$\alpha=\dfrac{-m+2-\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$

$\beta=\dfrac{-m+2+\sqrt{m^2-4m+8}}{2}$

より

$\beta-\alpha=\sqrt{m^2-4m+8}$

線分OP, OAとCで囲まれた図形の面積S_1,

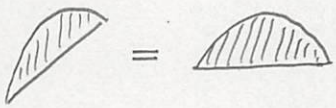
線分OQ, OBとCで囲まれた図形の面積S_2.

線分OA, OQとCで囲まれた図形の面積S_3

とおくと.

$S_1=S_2$ より

$S_1+S_3=S_2+S_3$



$\int_\alpha^\beta\{(-x^2+2x+1)-mx\}dx=\int_a^b(-x^2+2x+1)dx$

$-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)dx$

$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(b-a)^3$

$(\beta-\alpha)^3=(b-a)^3$

$\beta-\alpha=b-a$

$\sqrt{m^2-4m+8}=2\sqrt{2}$.

両辺2乗して

$m^2-4m+8=8$

$m^2-4m=0$

$m(m-4)=0$

$m\neq 0$ より

$\underline{m=4}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A297]

a を実数とする。xy 平面上の曲線 $y=x^3+(a-4)x^2+(-4a+2)x-2$ を C とする。

(1) 曲線 C は，a の値に関係なく 2 定点を通る。その定点を A，B とするとき，点 A と点 B の座標を求めよ。

(2) 曲線 C が点 A，点 B とは異なる点で線分 AB と交わる a の範囲を求めよ。

(3) a が (2) で求めた範囲にあるとき，線分 AB と曲線 C で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(4) (3) の S について，S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(2017 岐阜大)

(1)

$C: y=x^3+(a-4)x^2+(-4a+2)x-2$

$(x^2-4x)a+(x^3-4x^2+2x-2-y)=0$

a についての恒等式 なので

$$\begin{cases} x^2-4x=0 \\ x^3-4x^2+2x-2-y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4)=0 \\ y=x^3-4x^2+2x-2 \end{cases}$$

$(x,y)=(0,-2),(4,6)$

よって 2点 A, B の座標は

$(0,-2)$, $(4,6)$

(2)

直線 AB: $y=\frac{6+2}{4}x-2$

$y=2x-2$.

C と連立して

$x^3+(a-4)x^2+(-4a+2)x-2=2x-2$

$x^3+(a-4)x^2-4ax=0$

$x\{x^2+(a-4)x-4a\}=0$

$x(x-4)(x+a)=0$

$x=0,4,-a$

C が線分 AB と交わるためには

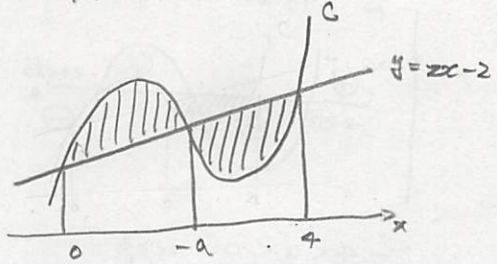
$0<-a<4$

つまり

$-4<a<0$

(3)

$-4<a<0$ のとき



$f(x)=x^3+(a-4)x^2-4ax$

とおき

$\int f(x)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{a-4}{3}x^3-2ax^2+C$

$=F(x)$ とおく.

$F(0)=C$

$F(4)=64+\frac{a-4}{3}\times 64-32a+C$

$=-\frac{32}{3}a-\frac{64}{3}+C$

$F(-a)=\frac{1}{4}a^4-\frac{a-4}{3}\cdot a^3-2a^3+C$

$=-\frac{1}{12}a^4-\frac{2}{3}a^3+C$

$S=\int_0^{-a} f(x)dx-\int_{-a}^{4} f(x)dx$

$=[F(x)]_0^{-a}+[F(x)]_4^{-a}$

$=2F(-a)-F(0)-F(4)$

$=-\frac{1}{6}a^4-\frac{4}{3}a^3+\frac{32}{3}a+\frac{64}{3}$

(4) $S'=-\frac{2}{3}a^3-4a^2+\frac{32}{3}$

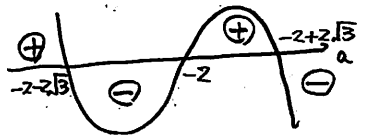
$=-\frac{2}{3}(a^3+6a^2-16)$

(裏に続く)

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 1 & 6 & 0 & -16 \\ & & -2 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & 4 & -8 & 0 \end{array}$$

$S' = -\frac{2}{3}(a+2)(a^2+4a-8)$

S' の符号!



$-4 < a < 0$ のとき

a	(-4)	$\cdots$	-2	$\cdots$	(0)
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	8	↗	

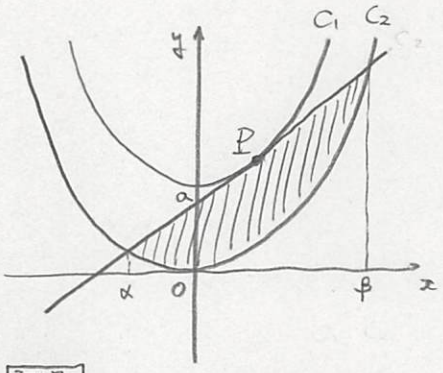
よって

$\min S = 8 \quad (a=-2)$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題39]

放物線C_1：$y=x^2+a$（aは$a>0$を満たす定数）上の点Pにおけるこの放物線の接線と放物線C_2：$y=x^2$とで囲まれる部分の面積Sは，Pが放物線C_1上をどのように動いても常に一定であることを示し，Sの値をaを用いて表せ。

（2013　日本獣医生命科学大）



証明

接点 $P(p, p^2+a)$ とおく

$y'=2x$

$y'(x=p)=2p$

接線　$y-(p^2+a)=2p(x-p)$

$y=2px-p^2+a$

$y=x^2$ と連立して

$x^2=2px-p^2+a$

$x^2-2px+p^2-a=0$

$x=p\pm\sqrt{p^2-(p^2-a)}$

$=p\pm\sqrt{a}$

$\alpha=p-\sqrt{a}$，$\beta=p+\sqrt{a}$　とおくと

$\beta-\alpha=2\sqrt{a}$

$S=\int_\alpha^\beta\{(2px-p^2+a)-x^2\}dx$

$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

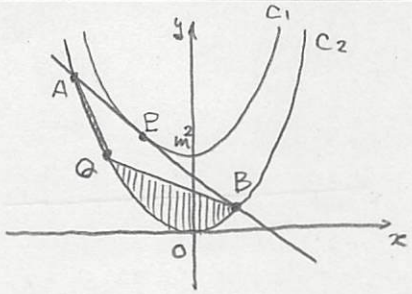
$=\underline{\frac{4}{3}a\sqrt{a}}$　(一定)

■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B298]

m は正の数である。放物線 $C_1 : y=x^2+m^2$ 上の点Pにおける C_1 の接線と放物線 $C_2 : y=x^2$ との交点をA，Bとし，C_2 上のAとBの間の点Qに対して，直線AQと C_2 とで囲まれる領域の面積と，直線QBと C_2 とで囲まれる領域の面積の和を S とする。Qが C_2 上のAとBの間を動くときの S の最小値はPのとり方によらないことを示し，その値を m を用いて表せ。

（2011　学習院大）



接点 $P(p, p^2+m^2)$ とおく

$y'=2x$

$y'_{(x=p)}=2p$

接線　$y-(p^2+m^2)=2p(x-p)$

$y=2px-p^2+m^2$

$C_2 : y=x^2$ と連立して

$x^2=2px-p^2+m^2$

$x^2-2px+p^2-m^2=0$

$(x-p)^2-m^2=0$

$(x-p+m)(x-p-m)=0$

$x=p-m,\ p+m$

2点A，Bの x 座標をそれぞれ $p-m$，$p+m$ とする。

$Q(q, q^2)$ とおき

直線　AQ：$y=ax+b$

直線　QB：$y=cx+d$

とおくと

$$S=\int_{p-m}^{q}\{(ax+b)-x^2\}dx+\int_{q}^{p+m}\{(cx+d)-x^2\}dx$$

$$=-\int_{p-m}^{q}(x-q)(x-p+m)dx-\int_{q}^{p+m}(x-p-m)(x-q)dx$$

$$=\frac{1}{6}(q-p+m)^3+\frac{1}{6}(p+m-q)^3$$

$$=\frac{1}{6}\times 2m\times\{(q-p+m)^2-(q-p+m)(p+m-q)+(p+m-q)^2\}$$

$$S=\frac{1}{3}m\{(q^2+p^2+m^2-2pq-2mp+2mq)-(m^2-p^2+2pq-q^2)+(p^2+m^2+q^2+2mp-2mq-2pq)\}$$

$$=\frac{1}{3}m(3p^2+3q^2+m^2-6pq)$$

$$=m\left(q^2-2pq+p^2+\frac{1}{3}m^2\right)$$

$$=m\left\{(q-p)^2+\frac{1}{3}m^2\right\}$$

$p-m\leqq q\leqq p+m$ なので

$$\min S=\frac{1}{3}m^3 \quad (q=p \text{ のとき})$$

よって，

2点P，Qの x 座標が等しくなるように点Qを定めるとよく，

$$\min S=\frac{1}{3}m^3$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B299]

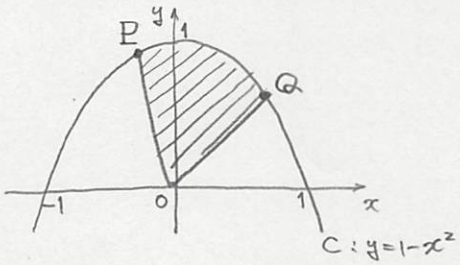
原点をOとする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に2点 $P(p,\ 1-p^2)$，$Q(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2つの線分OP，OQと放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(2013 一橋大)



(i) 3点 O, P, Q が一直線上 のとき

OQ: $y=\frac{1-q^2}{q}x$ なので

点 $P(p, 1-p^2)$ が OQ 上 とて.

$1-p^2=\frac{1-q^2}{q}\times p$

$q-p^2q=p-pq^2$

$(q-p)+pq(q-p)=0$

$(q-p)(pq+1)=0$

$q-p\neq 0$ より $pq=-1$

(i) $0°<\angle POQ\leqq 180°$ のとき

(i.e. $pq\geqq -1$ のとき)

直線 PQ : $y=mx+n$ とおくと

$$S=\int_p^q\left|(1-x^2)-(mx+n)\right|dx+S(\triangle OPQ)$$

$$=-\int_p^q(x-p)(x-q)\,dx+\frac{1}{2}\left|p(1-q^2)-q(1-p^2)\right|$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}\left|(p-q)+pq(p-q)\right|$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}\left|\underbrace{(p-q)}_{\ominus}\underbrace{(1+pq)}_{\oplus}\right|$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)\left\{(q-p)^2+3(1+pq)\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)$$

(ii) $180°<\angle POQ$ のとき

(i.e. $pq<-1$ のとき)

$$S=\int_p^q\left|(1-x^2)-(mx+n)\right|dx-S(\triangle OPQ)$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)^3-\frac{1}{2}\left|\underbrace{(p-q)}_{\ominus}\underbrace{(1+pq)}_{\ominus}\right|$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

$$=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)$$

(i), (ii) より

$$\underline{S=\frac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)}$$

(2) $q=p+1$ のとき $q-p=1$ であり

$$S=\frac{1}{6}(q-p)\left\{(q-p)^2+3pq+3\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\times 1\times\left\{1+3p(p+1)+3\right\}$$

$$=\frac{1}{6}(3p^2+3p+4)$$

$$=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

$$\underline{\min S=\frac{13}{24}\quad\left(p=-\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}\right)}$$

(3) $pq=-1$ のとき $p=-\frac{1}{q}$ であり

$p<q$ より $p<0<q$

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q^2}-1+q^2+3\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)\left(q^2+\frac{1}{q^2}+2\right)$$

$q>0$ より $\frac{1}{q}>0$ なので

(相加) $\geqq$ (相乗)

$$q+\frac{1}{q}\geqq 2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}$$

$$q+\frac{1}{q}\geqq 2$$

(等号成立は $q=1$ のとき)

(裏へ)

$q^2>0$ より $\frac{1}{q^2}>0$ なので

(相加) ≧ (相乗)

$$q^2+\frac{1}{q^2} \geq 2\sqrt{q^2\cdot\frac{1}{q^2}}$$

$$q^2+\frac{1}{q^2} \geq 2$$

(等号成立は $q=1$ のとき)

よって.

$$S \geq \frac{1}{6}\times 2\times(2+2)=\frac{4}{3}$$

(等号成立は $q=1$ のとき)

つまり $\underline{\min S=\frac{4}{3}\quad (p=-\frac{3}{4},\ q=\frac{4}{3})}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B300]

a を実数とする。2つの曲線 $C_1: y=x^3$ と $C_2: y=2x^2-ax$ を考える。

(1) 2曲線 C_1, C_2 が異なる3つの交点をもつための a の条件を求めよ。

(2) 2曲線 C_1, C_2 が異なる3つの交点をもち，C_1 と C_2 で囲まれる2つの部分の面積が等しくなるような a の値を求めよ。

(2014 東北大)

(1) C_1 と C_2 を連立して

$x^3=2x^2-ax$

$x(x^2-2x+a)=0$

$x=0$, $x^2-2x+a=0$

異なる3つの交点をもつためには

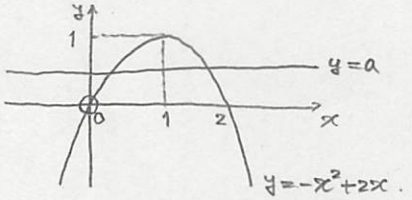
$x^2-2x+a=0$

が $x\neq 0$ なる異なる2つの解をもつとよい.

$a=-x^2+2x$ より

$y=a$ と $y=-x^2+2x$

が $x\neq 0$ で異なる2つの共有点をもつとよい.



よって

$a<0,\ 0<a<1$

(2)

(1)より $a<0,\ 0<a<1$ で考える.

$x^2-2x+a=0$ を解いて

$x=1\pm\sqrt{1-a}$

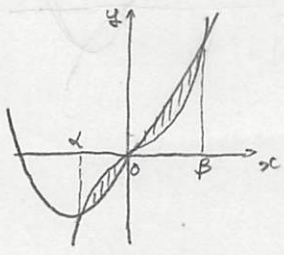
$\alpha=1-\sqrt{1-a}$, $\beta=1+\sqrt{1-a}$ とおくと

$\beta>0$ であり

$\begin{cases} a<0 \text{ のとき} & \alpha<0 \\ 0<a<1 \text{ のとき} & \alpha>0 \end{cases}$

である.

(i) $a<0$ のとき



$\int_{\alpha}^{0}(x^3-2x^2+ax)dx=\int_{0}^{\beta}(2x^2-ax-x^3)dx$

$\int_{\alpha}^{0}(x^3-2x^2+ax)dx+\int_{0}^{\beta}(x^3-2x^2+ax)dx=0$

$\int_{\alpha}^{\beta}(x^3-2x^2+ax)dx=0$

$\int_{\alpha}^{\beta}x(x-\alpha)(x-\beta)dx=0$

$\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)+\alpha\}(x-\alpha)\{(x-\alpha)+(\alpha-\beta)\}dx=0$

$\int_{\alpha}^{\beta}\{(x-\alpha)^3+(2\alpha-\beta)(x-\alpha)^2+\alpha(\alpha-\beta)(x-\alpha)\}dx=0$

$\left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4+\frac{2\alpha-\beta}{3}(x-\alpha)^3+\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{2}(x-\alpha)^2\right]_{\alpha}^{\beta}=0$

$\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^4+\frac{2\alpha-\beta}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{\alpha}{2}(\beta-\alpha)^3=0$

$\alpha\neq\beta$ より

$\frac{1}{4}(\beta-\alpha)+\frac{2\alpha-\beta}{3}-\frac{\alpha}{2}=0$

$-\frac{\alpha+\beta}{12}=0$

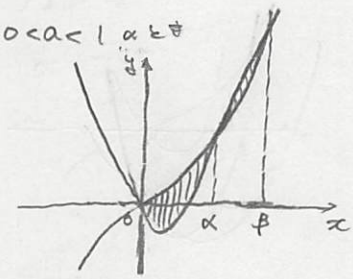
$\alpha+\beta=0$

これは

$\alpha+\beta=2$

であることに不合理.

(ii) $0<a<1$ のとき



$\int_{0}^{\alpha}(x^3-2x^2+ax)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(2x^2-ax-x^3)dx$

$\int_{0}^{\alpha}(x^3-2x^2+ax)dx+\int_{\alpha}^{\beta}(x^3-2x^2+ax)dx=0$

$\int_{0}^{\beta}(x^3-2x^2+ax)dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_{0}^{\beta}$

$\frac{1}{4}\beta^4-\frac{2}{3}\beta^3+\frac{a}{2}\beta^2=0$

$\beta\neq 0$ より

$\frac{1}{4}\beta^2-\frac{2}{3}\beta+\frac{a}{2}=0$

$3\beta^2-8\beta+6a=0$

(裏に続く)

$3(1+\sqrt{1-a})^2-8(1+\sqrt{1-a})+6a=0$

$3+6\sqrt{1-a}+3-3a-8-8\sqrt{1-a}+6a=0$

$-2+3a-2\sqrt{1-a}=0$

$-2+3a=2\sqrt{1-a}$

（これを満たす a が存在するとき
$-2+3a\geqq 0$ かつ $0<a<1$
つまり $\frac{2}{3}\leqq a<1$）

このとき、両辺を2乗して

$4-12a+9a^2=4-4a$

$9a^2-8a=0$

$a(9a-8)=0$

$a=0,\ \frac{8}{9}$

$\frac{2}{3}\leqq a<1$ より

$a=\frac{8}{9}$

(i), (ii) より

$\underline{a=\frac{8}{9}}$