

点 $P(x, y)$ が原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとき、 $\sqrt{3}x + y$ の最小値と、 $x^2 + 2xy + 3y^2$ の最大値を求めよ。

(2015 名城大)

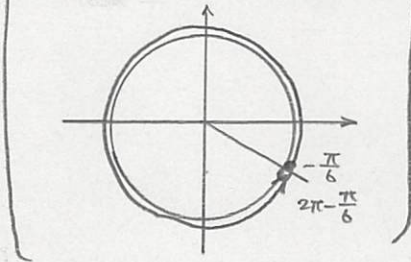
$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

と置く,

$$\sqrt{3}x + y = \underbrace{\sqrt{6} \cos \theta}_{\text{㉑}} + \underbrace{\sqrt{2} \sin \theta}_{\text{㉒}}$$

$$= 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} \text{ ㉓!! } \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta - \frac{\pi}{6} < 2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$



$$-1 \leq \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$$

$$-2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} \leq \sqrt{3}x + y \leq 2\sqrt{2}$$

$$\min(\sqrt{3}x + y) = -2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{㉓ ㉔} \\ \theta - \frac{\pi}{6} = \pi \\ \text{㉕!! } \theta = \frac{7}{6}\pi \end{cases}$$

$$x^2 + 2xy + 3y^2$$

$$= 2\cos^2\theta + 4\cos\theta\sin\theta + 6\sin^2\theta$$

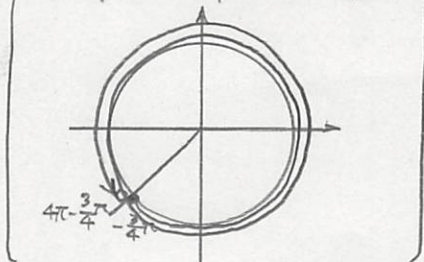
$$= 2 \times \frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4 \times \frac{1}{2} \sin 2\theta + 6 \times \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$= \underbrace{-2\cos 2\theta}_{\text{㉑}} + \underbrace{2\sin 2\theta}_{\text{㉒}} + 4$$

$$= 2\sqrt{2} \cos\left(2\theta - \frac{3}{4}\pi\right) + 4$$

$$2\theta - \frac{3}{4}\pi \text{ ㉓!! }$$

$$\left(-\frac{3}{4}\pi \leq 2\theta - \frac{3}{4}\pi < 4\pi - \frac{3}{4}\pi\right)$$



$$-1 \leq \cos\left(2\theta - \frac{3}{4}\pi\right) \leq 1$$

$$-2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2} \cos\left(2\theta - \frac{3}{4}\pi\right) \leq 2\sqrt{2}$$

$$4 - 2\sqrt{2} \leq 2\sqrt{2} \cos\left(2\theta - \frac{3}{4}\pi\right) + 4 \leq 4 + 2\sqrt{2}$$

$$\min(x^2 + 2xy + 3y^2) = 4 - 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \text{㉓ ㉔} \\ 2\theta - \frac{3}{4}\pi = 0, 2\pi \\ 2\theta = \frac{3}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi \\ \theta = \frac{3}{8}\pi, \frac{11}{8}\pi \end{cases}$$

∴

$$\begin{cases} \min(\sqrt{3}x + y) = -2\sqrt{2} \\ \max(x^2 + 2xy + 3y^2) = 4 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

xy 平面上に、直線 $\ell: x\cos\theta + y\sin\theta = \cos\theta + 1$ がある。

(1) ℓ と点 $(1, 0)$ との距離は θ の値によらず一定であることを示し、その値を求めよ。

(2) θ の値が $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲を変化するとき、 ℓ が通過する領域を図示せよ。

(2013 名城大)

(1) 証明

点 $(1, 0)$ と直線 $\ell: x\cos\theta + y\sin\theta = \cos\theta + 1$

との距離 d は

$$d = \frac{|\cos\theta - (\cos\theta + 1)|}{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}$$

$$= \underline{\underline{1}} \quad (= \text{一定})$$

(2)

$$x\cos\theta + y\sin\theta = \cos\theta + 1 \quad \text{より}$$

$$(x-1)\cos\theta + y\sin\theta = 1 \quad \text{は}$$

$$x\cos\theta + y\sin\theta = 1 \quad \text{①}$$

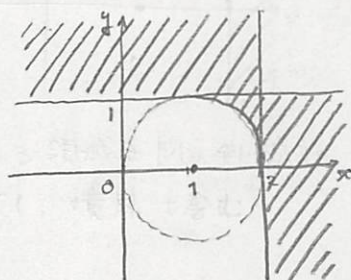
を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

① は

$$\text{円 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 上の点 } (\cos\theta, \sin\theta)$$

における接線である。

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ に注意して}$$



求める領域は図の斜線部

ただし、境界を含む。

$$a \neq 0 \text{ とき } X \neq a \text{ であり}$$

$$AB \perp \ell \text{ より}$$

$$\frac{Y}{X-a} = 2a$$

$$Y = 2aX - 2a^2 \text{ ②}$$

①に②を代入して

$$X + 2a(2aX - 2a^2) = 4a^3 + a$$

$$(4a^2 + 1)X = 8a^3 + a$$

$$X = \frac{8a^3 + a}{4a^2 + 1}$$

②より

$$Y = 2a \times \frac{8a^3 + a}{4a^2 + 1} - 2a^2$$

$$= \frac{16a^4 + 2a^2}{4a^2 + 1} - 2a^2$$

$$= \frac{8a^4}{4a^2 + 1}$$

$$\therefore B\left(\frac{8a^3 + a}{4a^2 + 1}, \frac{8a^4}{4a^2 + 1}\right) \text{ であり.}$$

求める直線は点 $P(a, a^2)$ と

$$B\left(\frac{8a^3 + a}{4a^2 + 1}, \frac{8a^4}{4a^2 + 1}\right) \text{ を通る}$$

$$y - a^2 = \frac{\frac{8a^4}{4a^2 + 1} - a^2}{\frac{8a^3 + a}{4a^2 + 1} - a} (x - a)$$

$$y - a^2 = \frac{4a^4 - a^2}{4a^3} (x - a)$$

$$y - a^2 = \frac{4a^2 - 1}{4a} (x - a)$$

$$y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x - a^2 + \frac{1}{4} + a^2$$

$$\underline{\underline{y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}}}$$

放物線 $C: y=x^2$ に対して、次の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 $P(a, a^2)$ を通り、 P における C の接線に直交する直線 ℓ の方程式を求めよ。
- (2) ℓ を (1) で求めた直線とする。 $a \neq 0$ のとき、直線 $x=a$ を ℓ に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し、 F の座標を求めよ。 (2010 東北大)

(1)

接点 $P(a, a^2)$

$$y' = 2x$$

$$y'(x=a) = 2a$$

 $a \neq 0$ のとき

$$(\ell \text{ の傾き}) = -\frac{1}{2a}$$

$$\ell: y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$$

$$y = -\frac{1}{2a}x + \frac{1}{2} + a^2$$

 $a=0$ のとき $P(0,0)$ 接線 $y=0$ より

$$\ell: x=0$$

よって

$$\ell: \begin{cases} y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} & (a \neq 0) \\ x = 0 & (a = 0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\text{傾き}) &= \frac{1 - \frac{1}{4a^2}}{\frac{1}{a}} \\ &= a - \frac{1}{4a} \end{aligned}$$

よって

$$m: y - a^2 = (a - \frac{1}{4a})(x - a)$$

$$y = (a - \frac{1}{4a})x + \frac{1}{4}$$

(3) 証明

$$m: y = (a - \frac{1}{4a})x + \frac{1}{4}$$

$$4ay = (4a^2 - 1)x + a$$

$$4x a^2 + (1 - 4y)a - x = 0$$

 a についての恒等式 となるには

$$4x = 0 \quad \text{かつ} \quad 1 - 4y = 0 \quad \text{かつ} \quad -x = 0$$

よって

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{4}$$

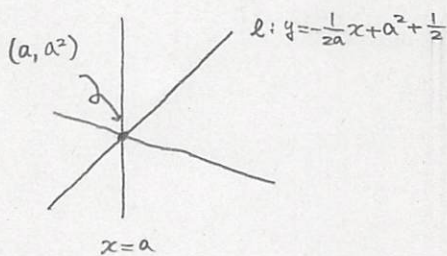
よって

$$F(0, \frac{1}{4})$$

(2) 解法1

 $a \neq 0$ より

$$\ell: y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

 x 軸正の向きと ℓ がなす角 α とする

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2a} \quad \text{より}$$

$$(\text{傾き}) = \tan(\alpha - (\frac{\pi}{2} - \alpha))$$

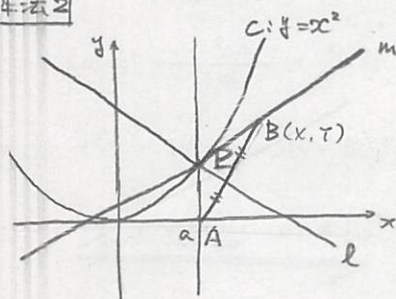
$$= \tan(-\frac{\pi}{2} + 2\alpha)$$

$$= -\frac{1}{\tan 2\alpha}$$

$$= -\frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$$

$$= -\frac{1 - \frac{1}{4a^2}}{2 \times (-\frac{1}{2a})}$$

(2) 解法2

点 $A(a, 0)$ を ℓ に関して対称移動した点 $B(x, y)$ とおくと線分 AB の中点 $(\frac{a+x}{2}, \frac{y}{2})$ は ℓ 上より

$$\frac{y}{2} = -\frac{1}{2a} \times \frac{a+x}{2} + a^2 + \frac{1}{2}$$

$$2ay = -a - x + 4a^2 + 2a$$

$$x + 2ay = 4a^2 + a$$

(裏に続く)

$0 \leq x < 2\pi$ のとき、方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x \cos x = 0$ を満たす x の個数を求めよ。(2008 京大)

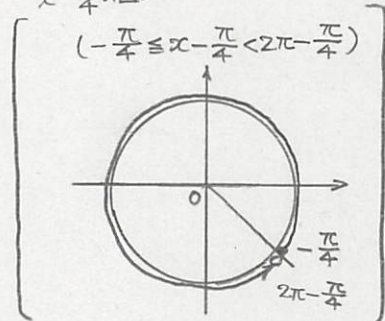
$$2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x \cos x = 0$$

$$t = \sin x + \cos x$$

$$= \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

とおく

$x - \frac{\pi}{4}$ の図!



$$-1 \leq \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$$

ここで

$$t = \sin x + \cos x$$

の両辺を2乗して

$$t^2 = 1 + 2\sin x \cos x$$

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

このとき、与方程式は

$$2\sqrt{2} \left\{ (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x (\sin x + \cos x) \right\} + 3\sin x \cos x = 0$$

$$2\sqrt{2} \left\{ t^3 - 3 \times \frac{t^2 - 1}{2} \times t \right\} + 3 \times \frac{t^2 - 1}{2} = 0$$

$$2\sqrt{2} (2t^3 - 3t^2 + 3t) + 3(t^2 - 1) = 0$$

$$-2\sqrt{2}t^3 + 6\sqrt{2}t + 3t^2 - 3 = 0$$

$$2\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 6\sqrt{2}t + 3 = 0$$

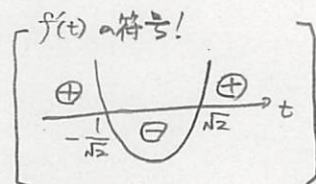
$$f(t) = 2\sqrt{2}t^3 - 3t^2 - 6\sqrt{2}t + 3$$

とおく

$$f(t) = 6\sqrt{2}t^2 - 6t - 6\sqrt{2}$$

$$= 6(\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2})$$

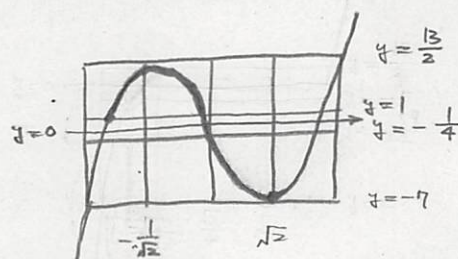
$$= 6(\sqrt{2}t + 1)(t - \sqrt{2})$$



$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} \text{ での}$$

t	$-\sqrt{2}$	...	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	$\sqrt{2}$
$f(t)$		+	0	-	
$f(t)$	1	↗	$\frac{13}{2}$	↘	-7

ここで
 t と x の対応は
 t 1つに対し、
 $-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ のとき x 2つ
 $t = -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ のとき x 1つ
 が対応する。



図より

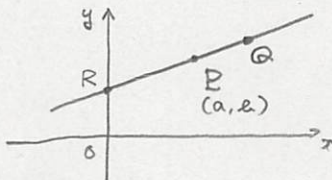
x 2個

$m > 0$ とする。座標平面上の点 P に対して、 P を通る傾き m の直線と y 軸の交点を R とし、点 Q を $\overrightarrow{RQ} = m\overrightarrow{RP}$ となるように定める。

- (1) P の座標を (a, b) とするとき、 Q の座標を m, a, b を用いて表せ。
- (2) 点 P が放物線 $y = x^2 - x$ 上を動くとき、対応する点 Q の軌跡を C とする。 C の方程式を $y = f(x)$ とするとき、 $f(x)$ を求めよ。
- (3) (2) の $f(x)$ に対し、 $I(m) = \int_0^m f(x) dx$ とする。 m を $m > 0$ の範囲で変化させるとき、 $I(m)$ を最小にする m の値を求めよ。

(2015 大阪市立大)

(1)

直線 PR は

$$y - b = m(x - a)$$

$$y = mx - am + b$$

$$\therefore R(0, -am + b)$$

よって

$$\overrightarrow{RQ} = m\overrightarrow{RP}$$

$$-\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ} = m(-\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OP})$$

$$\overrightarrow{OQ} = (1-m)\overrightarrow{OR} + m\overrightarrow{OP}$$

$$= (1-m)(0, -am + b) + m(a, b)$$

$$= (ma, -am + b + m^2a - m^2b + m^2b)$$

$$= (ma, m^2a - am + b)$$

よって

$$\underline{\underline{Q(am, am^2 - am + b)}}$$

(2)

 $Q(x, y)$ とおくと

$$\begin{cases} X = am & \text{--- ①} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = am^2 - am + b & \text{--- ②} \end{cases}$$

よって

$$P(a, b) \text{ は } y = x^2 - x \text{ 上にあるから}$$

$$b = a^2 - a \quad \text{--- ③} \quad \text{よって}$$

② に ③ を代入して

$$Y = am^2 - am + a^2 - a \quad \text{--- ②'}$$

① より

$$a = \frac{x}{m}$$

②' に代入して

$$Y = mx - x + \frac{x^2}{m^2} - \frac{x}{m}$$

$$Y = \frac{1}{m^2}x^2 + (m - \frac{1}{m} - 1)x$$

$$\text{点}(X, Y) \text{ は } y = \frac{1}{m^2}x^2 + (m - \frac{1}{m} - 1)x \text{ を満たす}$$

よって

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{m^2}x^2 + (m - \frac{1}{m} - 1)x}}$$

(3)

$$I(m) = \int_0^m f(x) dx$$

$$= \int_0^m \left\{ \frac{1}{m^2}x^2 + (m - \frac{1}{m} - 1)x \right\} dx$$

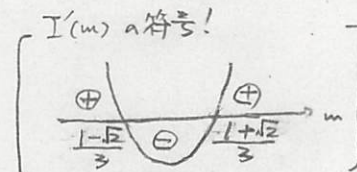
$$= \left[\frac{1}{3m^2}x^3 + \frac{1}{2}(m - \frac{1}{m} - 1)x^2 \right]_0^m$$

$$= \frac{m}{3} + \frac{m^2}{2}(m - \frac{1}{m} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{6}m$$

$$I'(m) = \frac{3}{2}m^2 - m - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(9m^2 - 6m - 1)$$

 $m > 0$ として

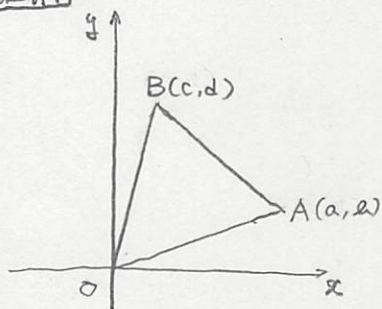
m	(0)	...	$\frac{1+\sqrt{2}}{3}$	...
$I'(m)$		-	0	+
$I(m)$		↘		↗

よって

$$\underline{\underline{m = \frac{1+\sqrt{2}}{3}}}$$

点 (a, b) は、 a と b がともに有理数のときに有理点とよばれる。3つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし、必要ならば $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せずに用いてもよい。 (1999 大阪大)

証明1



正三角形の1つの頂点を原点として考えても一般性を失わない。
残りの2頂点 $A(a, b)$, $B(c, d)$
(a, b, c, d は有理数)

としておく。

$$OA = r,$$

OA と x 軸の正の向きとなす角 θ

とすると、

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

また

$$\begin{aligned} c &= r \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ &= r(\cos \theta \cos \frac{\pi}{3} - \sin \theta \sin \frac{\pi}{3}) \\ &= r \cos \theta \times \frac{1}{2} - r \sin \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$c - \frac{a}{2} = -\frac{b}{2} \sqrt{3}$$

(i) $b \neq 0$ のとき

$$\frac{2c-a}{b} = \sqrt{3}$$

a, b, c は有理数だから

左辺は有理数

これは右辺が無理数であることに不合理

(ii) $b = 0$ のとき

$$c = \frac{a}{2}$$

一方

$$\begin{aligned} d &= r \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \\ &= r(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3}) \\ &= r \sin \theta \times \frac{1}{2} + r \cos \theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} a \end{aligned}$$

$b = 0$ のとき $a \neq 0$ なら

$$\frac{2d}{a} = \sqrt{3}$$

a, d は有理数だから

左辺は有理数

これは右辺が無理数

であることに不合理。

(i), (ii) より、

3頂点がすべて有理点である正三角形は存在しない。

証明2 (x) のあとから

$$S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} |ad - bc|$$

一方

$$\begin{aligned} S(\triangle OAB) &= \frac{1}{2} OA^2 \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{4} (a^2 + b^2) \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{2} |ad - bc| = \frac{1}{4} (a^2 + b^2) \sqrt{3}$$

a と b は同時には0にならないから

$$\frac{2|ad - bc|}{a^2 + b^2} = \sqrt{3}$$

a, b, c, d は有理数だから

左辺は有理数

これは右辺が無理数である

ことに不合理

よって

3頂点がすべて有理点である

正三角形は存在しない。

k を実数とする。 xy 平面の曲線 $C_1: y=x^2$ と $C_2: y=-x^2+2kx+1-k^2$ が異なる共有点 P, Q をもつとする。ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする。また、原点を O とする。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) k が (1) の範囲を動くとき、 $\triangle OPQ$ の重心 G の軌跡を求めよ。

(3) $\triangle OPQ$ の面積を S とするとき、 S^2 を k を用いて表せ。

(2016 筑波大)

(4) k が (1) の範囲を動くとする。 $\triangle OPQ$ の面積が最大となるような k の値と、そのときの重心 G の座標を求めよ。

(1)

C_1 と C_2 を連立して

$$x^2 = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$$

$$2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$$

よって $x > 0$ で異なる2つの

実数解をもつとよい。

$$\left(\begin{array}{l} 2つの解を \alpha, \beta とおくと \\ 解と係数の関係より \\ \alpha + \beta = k, \alpha\beta = \frac{k^2 - 1}{2} \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{判別式 } D > 0 \quad \text{--- ①} \\ \alpha + \beta > 0 \quad \text{--- ②} \\ \alpha\beta > 0 \quad \text{--- ③} \end{array} \right.$$

となるとよい。

① より

$$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2 - 1) \\ = -k^2 + 2 > 0$$

$$k^2 - 2 < 0$$

$$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$$

② より $k > 0$

③ より

$$k^2 - 1 > 0$$

$$k < -1, 1 < k$$

以上より



$$\underline{1 < k < \sqrt{2}}$$

(2)

$P(\alpha, \alpha^2), Q(\beta, \beta^2)$ とできる。

点 G は $\triangle OPQ$ の重心 なのて

$$G\left(\frac{\alpha+\beta}{3}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{3}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ = k^2 - 2 \times \frac{k^2 - 1}{2} \\ = 1 \end{array} \right)$$

$$G\left(\frac{k}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

(1) で $1 < k < \sqrt{2}$ より

$$\frac{1}{3} < \frac{k}{3} < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$G(X, Y)$ とおくと

$$\frac{1}{3} < X < \frac{\sqrt{2}}{3}, Y = \frac{1}{3}$$

点 (X, Y) は

$$\frac{1}{3} < X < \frac{\sqrt{2}}{3}, Y = \frac{1}{3} \text{ を満たす。}$$

よって 点 G の軌跡は

$$\underline{\text{直線 } Y = \frac{1}{3} \text{ の } \frac{1}{3} < X < \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ の部分。}}$$

(3)

$$S = \frac{1}{2} |\alpha\beta^2 - \alpha^2\beta| = \frac{1}{2} |\alpha\beta| |\alpha - \beta|$$

$$S^2 = \frac{1}{4} (\alpha\beta)^2 (\alpha - \beta)^2$$

$$= \frac{1}{4} (\alpha\beta)^2 (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$= \frac{1}{4} \times \left(\frac{k^2-1}{2}\right)^2 \left(1 - 2 \times \frac{k^2-1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{(k^2-1)^2}{4} \times (-k^2+2)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{16} (k^2-1)^2 (2-k^2)}}$$

(4)

S^2 が最大なとき S も最大となる。

$$S^2 = \frac{1}{16} (k^2-1)^2 (2-k^2) \text{ より}$$

$$16S^2 = (k^2-1)^2 (2-k^2)$$

$$= (k^4 - 2k^2 + 1)(2 - k^2)$$

$$\left(\begin{array}{l} k^2 = t \text{ とおくと} \\ 1 < k < \sqrt{2} \text{ より} \\ 1 < k^2 < 2 \\ \text{つまり } 1 < t < 2 \end{array} \right)$$

(裏に続く)

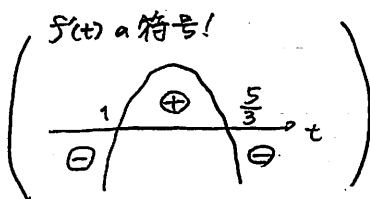
$$16S^2 = (t^2 - 2t + 1)(2 - t)$$

$$= -t^3 + 4t^2 - 5t + 2 = f(t) \text{ とおく}$$

$$f'(t) = -3t^2 + 8t - 5$$

$$= -(3t^2 - 8t + 5)$$

$$= -(3t - 5)(t - 1)$$



t	(1)	...	$\frac{5}{3}$	...	2
$f(t)$	/	+	0	-	
$f(t)$		↗		↘	

よって

$$t = k^2 = \frac{5}{3} \text{ のとき最大であり.}$$

このとき

$$k > 0 \text{ より}$$

$$k = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

よって

$$\underline{k = \frac{\sqrt{15}}{3}, G\left(\frac{\sqrt{15}}{9}, \frac{1}{3}\right)}$$

$f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし, 方程式 $f(x) = 0$ について考える。

- (1) $f(x) = 0$ は絶対値が2より小さい3つの相異なる実数解をもつことを示せ。
- (2) α が $f(x) = 0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となることを示せ。
- (3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とするとき,

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, g(\alpha_2) = \alpha_1, g(\alpha_3) = \alpha_2$$

となることを示せ。

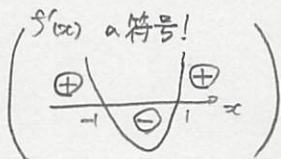
(2009 神戸大)

(1) (証明)

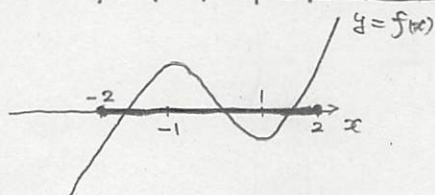
$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$= 3(x+1)(x-1)$$



x	...	-2	...	-1	...	1	...	2	...
f'(x)	+		+	0	-	0	+		+
f(x)	/	-1	/	3	\	-1	/	3	/



よて

$f(x) = 0$ は $|x| < 2$ に3つの相異なる実数解をもつ。

(2) (証明)

α が $f(x) = 0$ の解のとき

$$f(\alpha) = 0$$

$$\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0 \quad \text{を満たす。}$$

このとき

$$f(g(\alpha)) = (\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1$$

$$= \alpha^6 - 6\alpha^4 + 12\alpha^2 - 8 - 3\alpha^2 + 6 + 1$$

$$= \alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 1 & 0 & -6 & 0 & 9 & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 & -3 & 1 & & & \\ & & & & & -3 & -1 & 9 & 0 & & \\ & & & & & -3 & 0 & 9 & -3 & & \\ & & & & & & -1 & 0 & 3 & -1 & \\ & & & & & & -1 & 0 & 3 & -1 & \\ & & & & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

$$f(g(\alpha)) = (\alpha^3 - 3\alpha + 1)(\alpha^3 - 3\alpha - 1) = 0$$

よて

$g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる。

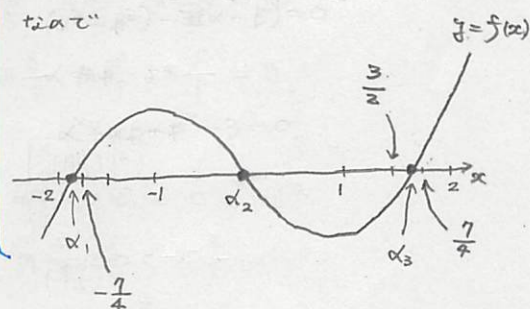
(3) 証明1

$\pm\sqrt{2}$
 $\pm\sqrt{3}$
で評価
すると楽

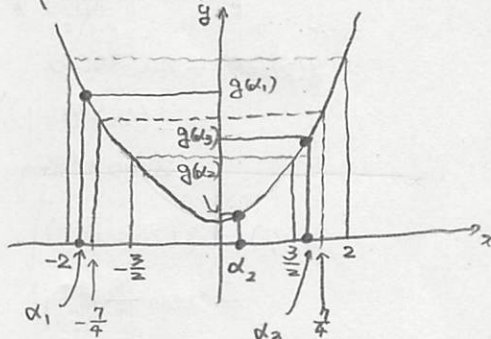
$$f(-\frac{3}{2}) = \frac{17}{8} > 0, f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{8} < 0$$

$$f(-\frac{7}{4}) = \frac{57}{64} > 0, f(\frac{7}{4}) = \frac{21}{64} > 0$$

よて



$$\begin{cases} -2 < \alpha_1 < -\frac{7}{4} \\ -1 < \alpha_2 < 1 \\ \frac{3}{2} < \alpha_3 < \frac{7}{4} \end{cases}$$



よて

$$g(\alpha_2) < g(\alpha_3) < g(\alpha_1) \quad \text{--- ①}$$

(2) で α が $f(x) = 0$ の解のとき

$g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解であり

① で $g(\alpha_2), g(\alpha_3), g(\alpha_1)$ はすべて異なっているため

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, g(\alpha_2) = \alpha_1, g(\alpha_3) = \alpha_2$$

証明

$$f(x) = 0 \text{ の解 } x = 2\cos\theta \quad (0 < \theta < \pi)$$

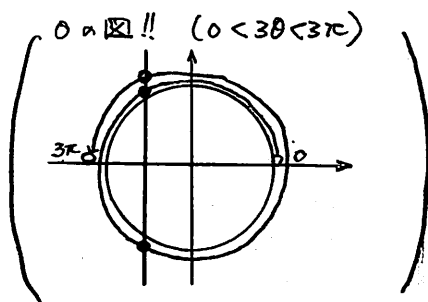
とすると

$$f(2\cos\theta) = 8\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1$$

$$= 2(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + 1$$

$$= 2\cos 3\theta + 1 = 0 \quad \text{よって}$$

$$\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$$



$$3\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi$$

$$\theta = \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{8}{9}\pi$$

よって

$$f(x) = 0 \text{ の } 3 \text{ つの解は}$$

$$\cos \frac{2}{9}\pi > \cos \frac{4}{9}\pi > \cos \frac{8}{9}\pi \quad \text{よって}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2\cos \frac{8}{9}\pi \\ \alpha_2 = 2\cos \frac{4}{9}\pi \\ \alpha_3 = 2\cos \frac{2}{9}\pi \end{cases}$$

∴ τ

$$g(2\cos\theta) = 4\cos^2\theta - 2$$

$$= 2(2\cos^2\theta - 1)$$

$$= 2\cos 2\theta \quad \text{よって } \tau$$

$$g(\alpha_1) = g(2\cos \frac{8}{9}\pi)$$

$$= 2\cos \frac{16}{9}\pi$$

$$= 2\cos \frac{2}{9}\pi$$

$$= \alpha_3$$

$$g(\alpha_2) = g(2\cos \frac{4}{9}\pi)$$

$$= 2\cos \frac{8}{9}\pi$$

$$= \alpha_1$$

$$g(\alpha_3) = g(2\cos \frac{2}{9}\pi)$$

$$= 2\cos \frac{4}{9}\pi$$

$$= \alpha_2$$

よって

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$$

$a > 0$ とする。

- (1) 関数 $f(t) = t^3 - 2at + 1$ の区間 $t \geq 0$ における最小値を、 a を用いて表せ。
- (2) (1) で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。 A^3 の値を求めよ。
- (3) 座標平面上の曲線 $y = x^4$ を C_1 、点 $(0, a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。 C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。
- (4) 座標平面において、点 P が曲線 $y = x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0, a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

(2017 広島大)

(1)

$$f(t) = t^3 - 2at + 1$$

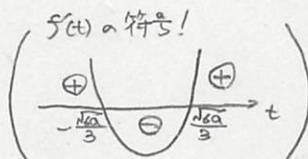
$$f'(t) = 3t^2 - 2a$$

$$f'(t) = 0 \quad \text{とおく}$$

$$3t^2 - 2a = 0$$

$$t^2 = \frac{2}{3}a$$

$$t = \pm \frac{\sqrt{6a}}{3}$$



t	0	...	$\frac{\sqrt{6a}}{3}$	...
$f'(t)$	/	-	0	+
$f(t)$	(1)	↘		↗

$$t = \frac{\sqrt{6a}}{3} \quad \text{で最小値となり}$$

$$\begin{aligned} \min f(t) &= \frac{2\sqrt{6a}\sqrt{a}}{3} - \frac{2\sqrt{6a}\sqrt{a}}{3} + 1 \\ &= \frac{-4a\sqrt{6a} + 9}{9} \end{aligned}$$

(2)

$$\min f(t) = 0 \quad \text{とおく}$$

$$-4a\sqrt{6a} + 9 = 0$$

$$-4a\sqrt{6a} = -9$$

両辺 2乗して

$$96a^3 = 81$$

$$a^3 = \frac{27}{32}$$

$$\therefore A^3 = \frac{27}{32}$$

(3)

$$C_1: y = x^4$$

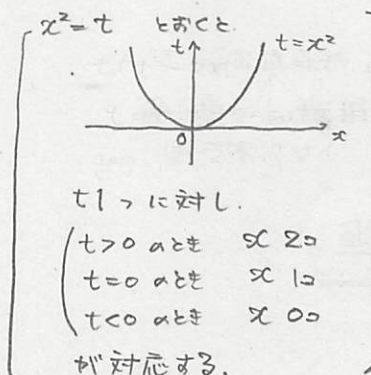
$$C_2: x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

を連立して

$$x^2 + (x^4 - a)^2 = a^2$$

$$x^8 - 2ax^4 + x^2 = 0$$

$$x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) = 0$$



$$t(t^3 - 2at + 1) = 0$$

$$t = 0, \quad t^3 - 2at + 1 = 0$$

$$\min f(t) < 0 \quad \text{のとき}$$

$$\frac{-4a\sqrt{6a} + 9}{9} < 0$$

$$4a\sqrt{6a} > 9$$

両辺ともに正な a で

2乗してよい。

$$96a^3 > 81$$

$$a^3 > \frac{27}{32}$$

$$a > \frac{3}{\sqrt[3]{32}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$$

$$t^3 - 2at + 1 = 0 \quad \text{について}$$

$$a > \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} \quad \text{のとき} \quad t > 0 \quad 2 \text{ 個}$$

$$a = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} \quad \text{のとき} \quad t > 0 \quad 1 \text{ 個}$$

$$a < \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} \quad \text{のとき} \quad t = 0 \quad 1 \text{ 個}$$

(裏に続く)

$t=0$ の解に注意して.
 C_1 と C_2 の共有点の個数は

$$\begin{cases} a > \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} & \text{のとき} & 5 \\ a = \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} & \text{のとき} & 3 \\ 0 < a < \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} & \text{のとき} & 1 \end{cases}$$

(1) より

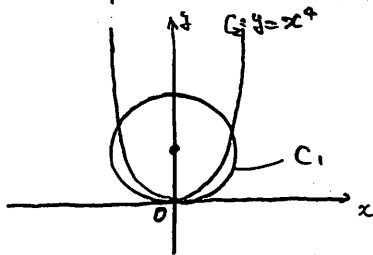
$$\frac{-4a\sqrt[3]{6a}+9}{9} \geq 0$$

よって

$$0 < a \leq \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$$

(4) **解法1**

$$a > \frac{3\sqrt[3]{2}}{4} \text{ のとき}$$



C_1 の内側に C_2 が存在するから
 点 $(0,a)$ から C_1 の距離 d の最小値
 $\min d < a$ となり不合理

よって

$$0 < a \leq \frac{3\sqrt[3]{2}}{4}$$

解法2

$P(x, x^4)$, 点 $B(0, a)$ とすると

$$\begin{aligned} BP^2 &= x^2 + (x^4 - a)^2 \\ &= x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2 \end{aligned}$$

条件より

$$BP \geq a \quad \text{つまり} \quad BP^2 \geq a^2 \quad \text{だから}$$

$$x^8 - 2ax^4 + x^2 + a^2 \geq a^2$$

$$x^2(x^6 - 2ax^2 + 1) \geq 0$$

$x=0$ のとき 等号が成立し

$$BP^2 = a^2 \quad \text{つまり} \quad BP = a$$

ゆえに

$\min BP = a$ となるための条件は

$x \neq 0$ のとき

$$\text{常に } x^6 - 2ax^2 + 1 \geq 0$$

が成り立つことである。

$x^2 = t$ とおくと $t > 0$ であり

$$t^3 - 2at + 1 \geq 0$$

が常に成り立つには