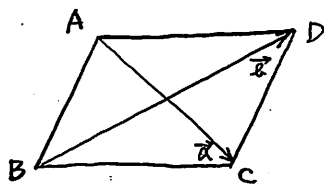


平行四辺形 ABCD で、 $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ とするとき、 $\overrightarrow{AB}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。



$$\overrightarrow{AB} = \vec{x}, \overrightarrow{AD} = \vec{y} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \vec{a} \\ \overrightarrow{BD} = \vec{b} \end{cases} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{a} \\ \vec{y} - \vec{x} = \vec{b} \end{cases}$$

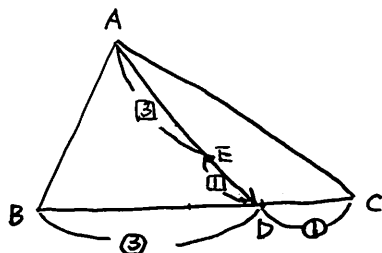
これより、

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}$$

つまり

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}}}$$

△ABCにおいて、辺BCを3:1に内分する点をD、線分ADを3:1に内分する点をEとして、 $\overrightarrow{AE}$ 、 $\overrightarrow{BE}$ を $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ で表せ。



$$\overrightarrow{AD} = \frac{1\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{3+1}$$

$$= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{16}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AC}}}$$

$$\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \left(\frac{3}{16}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \underline{\underline{-\frac{13}{16}\overrightarrow{AB} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AC}}}$$

$\vec{a}=(3, 1)$, $\vec{b}=(1, 2)$ と $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$ (t は実数) について, 次のものを求めよ。

(1) $|\vec{c}|=\sqrt{15}$ となる t の値

(2) $|\vec{c}|$ の最小値とそのときの t の値

(1)

$$\vec{c} = \vec{a} + t\vec{b}$$

$$= (3, 1) + t(1, 2)$$

$$= (3+t, 1+2t)$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(3+t)^2 + (1+2t)^2}$$

$$= \sqrt{5t^2 + 10t + 10}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{15} \quad \text{より}$$

$$\sqrt{5t^2 + 10t + 10} = \sqrt{15}$$

$$5t^2 + 10t + 10 = 15$$

$$5t^2 + 10t - 5 = 0$$

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$t = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$5t = -5$$

$$t = -1$$

∴ n と k

$$\min |\vec{c}| = \sqrt{5 - 10 + 10}$$

$$= \sqrt{5}$$

∴ t

$$\min |\vec{c}| = \sqrt{5} \quad (t = -1)$$

(2) **解法1**

$$5t^2 + 10t + 10 = 5(t+1)^2 + 5$$

頂点 $(-1, 5)$

軸: $t = -1$, 下に凸

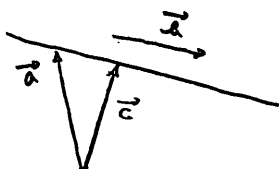


$$\min = 5 \quad (t = -1)$$

∴ t

$$\min |\vec{c}| = \sqrt{5} \quad (t = -1)$$

解法2



$|\vec{c}|$ が $\min$ となるのは

$\vec{c} \perp \vec{b}$ となるときであり.

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(3+t, 1+2t) \cdot (1, 2) = 0$$

$$3+t+2+4t=0$$

$$5t+5=0$$

3点A(1, 2), B(-2, 4), C(-4, x)が、同一直線上にあるときのxの値を求めよ。
--

3点A, B, C が 同一直線上 のとき

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

$$-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = k(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\overrightarrow{OC} = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}$$

$$(-4, x) = (1-k)(1, 2) + k(-2, 4)$$

$$(-4, x) = (1-k, 2-2k) + (-2k, 4k)$$

$$(-4, x) = (1-3k, 2+2k)$$

よ'

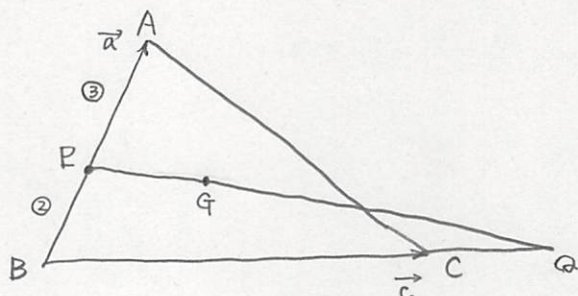
$$\begin{cases} -4 = 1-3k \\ x = 2+2k \end{cases}$$

よ.て

$$k = \frac{5}{3}, \quad \underline{\underline{x = \frac{16}{3}}}$$

$\triangle ABC$ の重心を G とし、 $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$ とする。 $BP : PA = 2 : 3$ となる点 P を辺 AB 上にとり、直線 PG と直線 BC が交わる点を Q とするとき、 $\overrightarrow{BQ}$ を $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2003 佐賀大)



点 G は $\triangle ABC$ の重心 より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}}{3} \\ &= \frac{\vec{a} + \vec{c}}{3}\end{aligned}$$



$$\overrightarrow{BQ} = k \overrightarrow{PG} \quad \text{より}$$

$$-\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ} = k(-\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BG})$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ} &= (1-k)\overrightarrow{BP} + k\overrightarrow{BG} \\ &= (1-k) \cdot \frac{2}{5} \vec{a} + k \cdot \frac{\vec{a} + \vec{c}}{3} \\ &= \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{15}k\right) \vec{a} + \frac{1}{3}k \vec{c}\end{aligned}$$

点 Q は 直線 BC 上 であるから

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{15}k = 0$$

$$-\frac{1}{15}k = -\frac{2}{5}$$

$$k = 6$$

よって

$$\underline{\underline{\overrightarrow{BQ} = 2\vec{c}}}$$

平面上に平行四辺形 ABCD および $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = r\overrightarrow{PA}$, $-1 \leq r \leq 1$ を満たす点 P がある。

- (1) $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}$ を $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。ただし, r を用いてはならない。
 (2) 対角線 AC の中点を Q とする。点 P は線分 QC 上の点であることを示せ。
 (3) 辺 BC を 2:1 に内分する点を R とする。D, P, R が一直線上にあるときの r の値を求めよ。 (20/5 鳥取環境大)

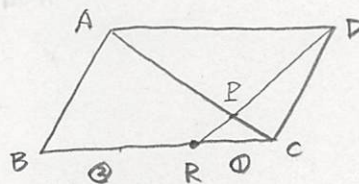
(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} &= (-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB}) + (-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}) + (-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD}) \\ &= -3\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

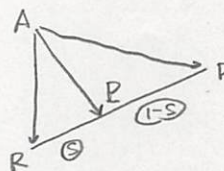
$$\left(\begin{array}{c} \text{ここで} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \text{ より} \end{array} \right)$$

$$= -3\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AC}$$

(3)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{2}{3-r} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{2}{3-r} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{2}{3-r} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3-r} \overrightarrow{AD} \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{(1-s)\overrightarrow{AR} + s\overrightarrow{AD}}{s + (1-s)} \\ &= (1-s) \left(\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \right) + s \overrightarrow{AD} \\ &= (1-s) \overrightarrow{AB} + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}s \right) \overrightarrow{AD} \quad \text{--- ②}\end{aligned}$$

① = ② から $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ は 1 次独立 なので

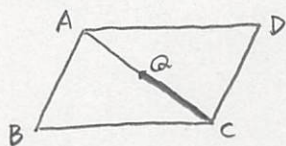
$$\begin{cases} \frac{2}{3-r} = 1-s \\ \frac{2}{3-r} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s \end{cases}$$

$$\begin{aligned}1-s &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s \\ -\frac{4}{3}s &= -\frac{1}{3} \\ s &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned}\frac{2}{3-r} &= \frac{3}{4} \\ 9-3r &= 8 \\ -3r &= -1 \\ r &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(2) 証明



$$\overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AC} \quad \left(\frac{1}{2} \leq k \leq 1 \right)$$

となることを示すといふ。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} &= r\overrightarrow{PA} \text{ より} \\ -3\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AC} &= -r\overrightarrow{AP}\end{aligned}$$

$$(3-r)\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$$

$$-1 \leq r \leq 1 \text{ より } 2 \leq 3-r \leq 4$$

なので

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3-r} \overrightarrow{AC}$$

ここで

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{3-r} \leq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2}{3-r} \leq 1 \quad \text{なので}$$

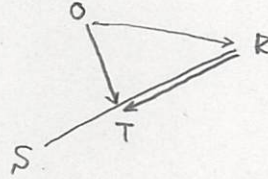
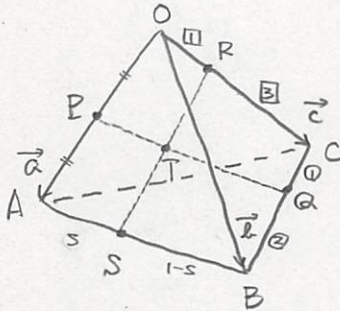
$$k = \frac{2}{3-r} \quad \text{とすると}$$

題意を示せた。 ■

四面体OABCにおいて、辺OAの中点をP、辺BCを2:1に内分する点をQ、辺OCを1:3に内分する点をR、辺ABをs:(1-s)に内分する点をSとする。ただし、 $0 < s < 1$ とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

- (1) $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。
- (2) $\overrightarrow{RS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および s で表せ。
- (3) 線分PQと線分RSが交わるときの s の値を求めよ。

(20/5 岩千大)



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RT} \\
 &= \overrightarrow{OR} + l \overrightarrow{RS} \\
 &= \frac{1}{4} \vec{c} + l \left((1-s) \vec{a} + s \vec{b} - \frac{1}{4} \vec{c} \right) \\
 &= l(1-s) \vec{a} + ls \vec{b} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} l \right) \vec{c} \quad \text{--- ②}
 \end{aligned}$$

①=② $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立なので

$$\begin{cases}
 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} k = l(1-s) & \text{--- ③} \\
 \frac{1}{3} k = ls & \text{--- ④} \\
 \frac{2}{3} k = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} l & \text{--- ⑤}
 \end{cases}$$

③+④

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} k = l \quad \text{--- ⑥}$$

⑤に代入して

$$\frac{2}{3} k = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} k \right)$$

$$-\frac{2}{3} k = \frac{1}{8} + \frac{1}{24} k$$

$$\frac{15}{24} k = -\frac{1}{8}$$

$$k = -\frac{1}{5}$$

⑥に代入して

$$l = \frac{1}{2} - \frac{1}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$$

④に代入して

$$\frac{7}{15} s = \frac{1}{15}$$

$$\underline{s = \frac{1}{7}}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \overrightarrow{OP} &= \frac{1}{2} \vec{a} \\
 \overrightarrow{OQ} &= \frac{1\vec{b} + 2\vec{c}}{2+1} = \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}
 \end{aligned}$$

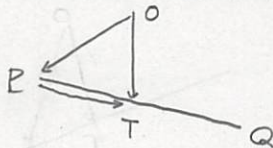
$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{PQ} &= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \\
 &= -\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \overrightarrow{OR} &= \frac{1}{4} \vec{c} \\
 \overrightarrow{OS} &= \frac{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}}{s + (1-s)} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{RS} &= -\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} \\
 &= (1-s)\vec{a} + s\vec{b} - \frac{1}{4} \vec{c}
 \end{aligned}$$

(3)

線分PQと線分RSの交点Tとて



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PT} \\
 &= \overrightarrow{OP} + k \overrightarrow{PQ} \\
 &= \frac{1}{2} \vec{a} + k \left(-\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} k \right) \vec{a} + \frac{1}{3} k \vec{b} + \frac{2}{3} k \vec{c} \quad \text{--- ①}
 \end{aligned}$$

空間に四面体 ABCD と点 P, Q があり, $4\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 6\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, $4\overrightarrow{QA} + 5\overrightarrow{QB} + 6\overrightarrow{QC} + 7\overrightarrow{QD} = \vec{0}$ を満たす。

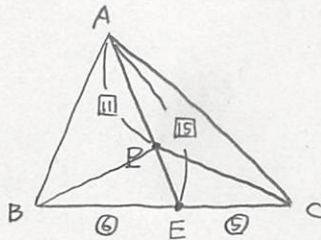
- (1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。
 (2) $\triangle PAB$ と $\triangle PBC$ の面積比を求めよ。
 (3) 四面体 QABC と四面体 QBCD の体積比を求めよ。

(2014 名古屋市立大)

(1)

$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 6\overrightarrow{PC} &= \vec{0} \quad \text{より} \\ 4(-\overrightarrow{AP}) + 5(-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB}) + 6(-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC}) &= \vec{0} \\ 15\overrightarrow{AP} &= 5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} \\ \underline{\underline{\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}} \end{aligned}$$

(2)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}}{15} \\ &= \frac{11}{15} \times \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}}{6+5} \end{aligned}$$

よえに、

線分 BC を 6:5 に内分する点を E

とすると、

点 P は 線分 AE を 11:4 に内分する点

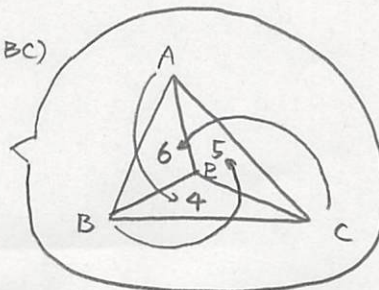
を表す。

$$\begin{aligned} S(\triangle PAB) &= \frac{6}{11} \times \frac{11}{15} S(\triangle ABC) \\ &= \frac{2}{5} S(\triangle ABC) \end{aligned}$$

$$S(\triangle PBC) = \frac{4}{15} S(\triangle ABC)$$

より

$$\begin{aligned} S(\triangle PAB) : S(\triangle PBC) &= \frac{2}{5} S(\triangle ABC) : \frac{4}{15} S(\triangle ABC) \\ &= 6 : 4 \\ &= \underline{\underline{3 : 2}} \end{aligned}$$



(2)

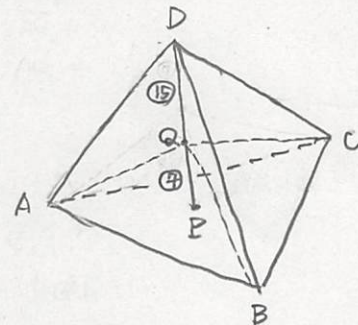
$$\begin{aligned} 4\overrightarrow{QA} + 5\overrightarrow{QB} + 6\overrightarrow{QC} + 7\overrightarrow{QD} &= \vec{0} \\ 4(-\overrightarrow{AQ}) + 5(-\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB}) + 6(-\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AC}) \\ &\quad + 7(-\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0} \\ 22\overrightarrow{AQ} &= 5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AQ} &= \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{AD}}{22} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} \text{ここで} \\ \overrightarrow{AP} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad \text{より} \\ 5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} &= 15\overrightarrow{AP} \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \frac{15\overrightarrow{AP} + 7\overrightarrow{AD}}{22} \\ &= \frac{15\overrightarrow{AP} + 7\overrightarrow{AD}}{7+15} \end{aligned}$$

よえに、

点 Q は 線分 PD を 7:15 に内分する点。



$$\therefore V(QABC) = \frac{7}{22} V(ABCD) \quad \text{--- ①}$$

$$\begin{aligned} \text{また、} \overrightarrow{AQ} &= \frac{18}{22} \times \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{AD}}{5+6+7} \\ &= \frac{9}{11} \times \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{AD}}{5+6+7} \end{aligned}$$

より

$$\overrightarrow{AR} = \frac{5\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC} + 7\overrightarrow{AD}}{18}$$

なる点 R をとると、

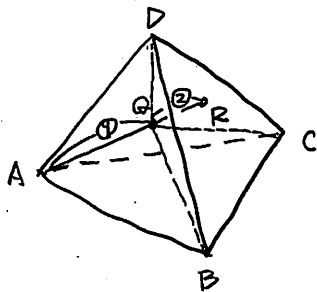
点 R は 平面 BCD 上の点であり、

(裏に続く)

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{9}{11} \overrightarrow{AR} \quad \text{なので}$$

点Qは線分AR上

9:2に内分する点である。



よって

$$V(QBCD) = \frac{2}{11} V(ABCD) \quad \text{--- ②}$$

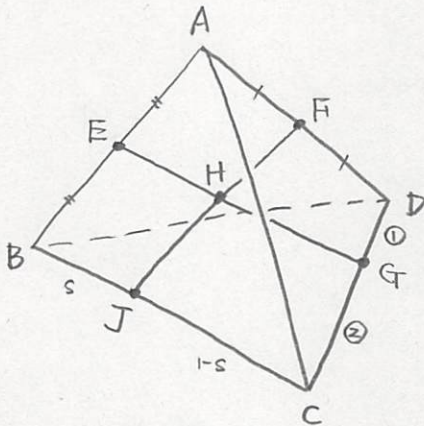
①, ② より

$$V(QABC) : V(QBCD)$$

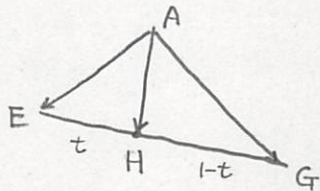
$$= \frac{7}{22} V(ABCD) : \frac{2}{11} V(ABCD)$$

$$= \underline{\underline{7:4}}$$

四面体ABCDにおいて、辺AB, ADの中点を、それぞれE, F, 辺CDを2:1に内分する点をG, 辺BC上の点をJとすると、EGとFJは点Hで交わるという。 $\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ で表せ。 (京理科大)

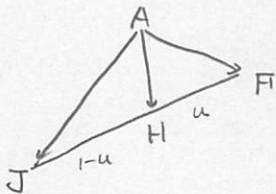


$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AG} = \frac{1\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}}{2+1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AJ} = \frac{(1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}}{s + (1-s)} = (1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} \end{cases}$$



$$\overrightarrow{AH} = \frac{(1-t)\overrightarrow{AE} + t\overrightarrow{AG}}{t + (1-t)}$$

$$\begin{aligned} &= (1-t)\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + t\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}t\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}t\overrightarrow{AD} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$



$$\overrightarrow{AH} = \frac{u\overrightarrow{AJ} + (1-u)\overrightarrow{AF}}{(1-u) + u}$$

$$\begin{aligned} &= u\left((1-s)\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}\right) + (1-u)\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\ &= (1-s)u\overrightarrow{AB} + su\overrightarrow{AC} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u\right)\overrightarrow{AD} \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

①=② から $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ は 1次独立なので

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t = (1-s)u & \text{--- ③} \\ \frac{1}{3}t = su & \text{--- ④} \\ \frac{2}{3}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}u & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

③+④

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}t = u \quad \text{--- ⑥}$$

⑤に代入して

$$\frac{2}{3}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}t\right)$$

$$\frac{2}{3}t = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}t$$

$$\frac{7}{12}t = \frac{1}{4}$$

$$t = \frac{3}{7}$$

⑥に代入して

$$u = \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

④に代入して

$$\frac{3}{7}s = \frac{1}{7}$$

$$s = \frac{1}{3}$$

①より

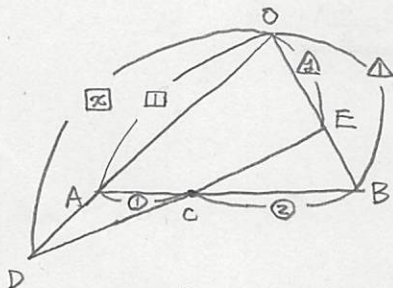
$$\underline{\underline{\overrightarrow{AH} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AD}}}}$$

$\triangle OAB$ の辺 AB を $1:2$ に内分する点を C とする。動点 D は $\overrightarrow{OD} = x\overrightarrow{OA}$ ($x \geq 1$) を満たすとし、直線 CD と直線 OB の交点を E とする。

(1) 実数 y を $\overrightarrow{OE} = y\overrightarrow{OB}$ で定めるとき、等式 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$ が成り立つことを示せ。

(2) $\triangle OAB$ の面積を S , $\triangle ODE$ の面積を T とするとき、 $\frac{S}{T}$ の最大値と、そのときの x を求めよ。

(2011 東北大)



(1) (証明)

 $x \neq 1$ のとき

メネラウス aTh より

$$\frac{OD}{DA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BE}{EO} = 1$$

$$\frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-y}{y} = 1$$

$$x(1-y) = 2(x-1)y$$

$$x - xy = 2xy - 2y$$

$$x + 2y = 3xy$$

両辺を xy ($\neq 0$) で割ると

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{x} = 3$$

つまり

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3 \quad \text{--- ①}$$

 $x = 1$ のとき A と D は一致し、 E と B も一致する。このとき $y = 1$ となり。

これは ① を満たす。

よって

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 3$$

(2) 解法1

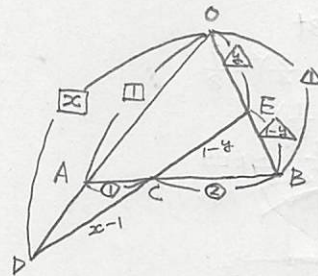
 $x \neq 1$ のとき $y \neq 1$ であり。

メネラウス aTh より

$$\frac{DC}{CE} \cdot \frac{EB}{BO} \cdot \frac{OA}{AD} = 1$$

$$\frac{DC}{CE} \cdot \frac{1-y}{1} \cdot \frac{1}{x-1} = 1$$

$$\frac{DC}{CE} = \frac{x-1}{1-y}$$



$$S(\triangle OAB) : S(\triangle ECB) = 1 \times 3 : (1-y) \times 2$$

$$S : S(\triangle ECB) = 3 : 2(1-y)$$

$$3S(\triangle ECB) = 2(1-y)S$$

$$S(\triangle ECB) = \frac{2}{3}(1-y)S$$

$$S(\triangle ACD) : S(\triangle BCE) = 1 \times (x-1) : 2 \times (1-y)$$

$$S(\triangle ACD) : S(\triangle BCE) = (x-1) : 2(1-y)$$

$$2(1-y)S(\triangle ACD) = (x-1)S(\triangle BCE)$$

$$S(\triangle ACD) = \frac{x-1}{2(1-y)}S(\triangle BCE)$$

$$= \frac{x-1}{2(1-y)} \times \frac{2}{3}(1-y)S$$

$$= \frac{1}{3}(x-1)S$$

$$S(\triangle OAE) = S(\triangle OAB) - S(\triangle ECB)$$

$$= S - \frac{2}{3}(1-y)S$$

$$= \frac{1}{3}(1+2y)S$$

$$S(\triangle ODE) = S(\triangle ACD) + S(\triangle OAE)$$

$$T = \frac{1}{3}(x-1)S + \frac{1}{3}(1+2y)S$$

$$= \frac{1}{3}(x+2y)S$$

よって

$$\frac{S}{T} = \frac{3}{x+2y} = \frac{1}{xy}$$

ここで

$$x+2y = 3xy \quad (*)$$

$$(3x-2)y = x$$

$$x \geq 1 \text{ より } 3x-2 \neq 0$$

$$y = \frac{x}{3x-2}$$

$$xy = \frac{x^2}{3x-2}$$

(裏に続く)

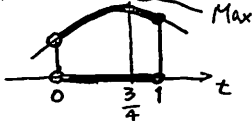
$$\frac{1}{xy} = \frac{3x-2}{x^2}$$

$$\frac{S}{T} = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ t = \frac{1}{x} \text{ とおく} \\ x \geq 1 \text{ より } 0 < t \leq 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{S}{T} &= -2t^2 + 3t \\ &= -2\left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{頂点} \left(\frac{3}{4}, \frac{9}{8} \right) \\ \text{軸: } t = \frac{3}{4}, \text{ 上に凸} \end{array} \right)$$



$$\text{Max } \frac{S}{T} = \frac{9}{8} \quad (t = \frac{3}{4})$$

$$\text{よって } \underline{\underline{\text{Max } \frac{S}{T} = \frac{9}{8} \quad (x = \frac{4}{3})}}$$

等号成立は

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$$

$$\text{つまり } x = \frac{4}{3}, y = \frac{2}{3} \text{ のとき}$$

であり $x \geq 1$ を満たしている。

よって

$$\underline{\underline{\text{Max } \frac{S}{T} = \frac{9}{8} \quad (x = \frac{4}{3})}}$$

解法2

$\angle AOB = \theta$ とおくと

$$\left(\begin{array}{l} S = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \theta \\ T = \frac{1}{2} OD \cdot OE \cdot \sin \theta \end{array} \right)$$

となる

$$\begin{aligned} \frac{S}{T} &= \frac{OA \cdot OB}{OD \cdot OE} \\ &= \frac{OA \cdot OB}{x OA \cdot y OB} \\ &= \frac{1}{xy} \end{aligned}$$

よって

$$\frac{2}{x} > 0, \frac{1}{y} > 0 \text{ となる}$$

(相加) $\geq$ (相乗)

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \geq 2 \sqrt{\frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y}}$$

$$3 \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

両辺ともに正なので

2乗してもよく

$$\frac{1}{xy} \leq \frac{9}{8}$$

つまり

$$\frac{S}{T} \leq \frac{9}{8}$$

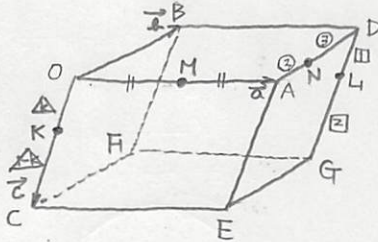
平行六面体 OADB-CEGF において、辺 OA の中点を M、辺 AD を 2:3 に内分する点を N、辺 DG を 1:2 に内分する点を L とする。また、辺 OC を $k:(1-k)$ ($0 < k < 1$) に内分する点を K とする。

(1) $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき、 $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{ML}$, $\overrightarrow{MK}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 3点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき、 k の値を求めよ。

(3) 3点 M, N, K の定める平面が辺 GF と交点をもつような k の値の範囲を求めよ。

(2011 熊本大)



$$(1) \begin{pmatrix} \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{ON} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \\ \overrightarrow{OL} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ \overrightarrow{OK} = k\vec{c} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ML} &= -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OL} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MK} &= -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OK} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c} \end{aligned}$$

(2)

3点 M, N, K の定める平面上に点 L があるとき。

$$\overrightarrow{ML} = s\overrightarrow{MN} + t\overrightarrow{MK}$$

を満たす $s, t \in \mathbb{R}$ が存在する。

$$\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = s\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + k\vec{c}\right)$$

$$\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \left(\frac{s}{2} - \frac{t}{2}\right)\vec{a} + \frac{2s}{5}\vec{b} + kt\vec{c}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立なから

$$\begin{cases} \frac{1}{2} = \frac{s}{2} - \frac{t}{2} \\ 1 = \frac{2s}{5} \\ \frac{1}{3} = kt \end{cases} \iff \begin{cases} s - t = 1 \\ s = \frac{5}{2} \\ kt = \frac{1}{3} \end{cases}$$

これを解いて

$$s = \frac{5}{2}, \quad t = \frac{3}{2}, \quad k = \frac{2}{9}$$

(3)

3点 M, N, K の定める平面と辺 GF の交点を P とすると。

点 P は辺 GF 上より

$$F \xrightarrow{P} G$$

$$\overrightarrow{OP} = p\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad (0 \leq p \leq 1)$$

とでき。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= -\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + p\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + p\right)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

3点 M, N, K の定める平面上に点 P は存在するから

$$\overrightarrow{MP} = \alpha\overrightarrow{MN} + \beta\overrightarrow{MK}$$

を満たす $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在する。

$$\left(-\frac{1}{2} + p\right)\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\vec{a} + \frac{2\alpha}{5}\vec{b} + k\beta\vec{c}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立なから

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} + p = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \\ 1 = \frac{2\alpha}{5} \\ 1 = k\beta \end{cases} \iff \begin{cases} p = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{5}{2} \\ \beta = \frac{1}{k} \end{cases}$$

α, β を消去して

$$p = \frac{5}{4} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2} = \frac{7k-2}{4k}$$

$$0 \leq p \leq 1 \quad \text{より}$$

$$0 \leq \frac{7k-2}{4k} \leq 1$$

$$0 < k < 1 \quad \text{より}$$

$$0 \leq 7k-2 \leq 4k$$

$$\frac{2}{7} \leq k \leq \frac{2}{3}$$