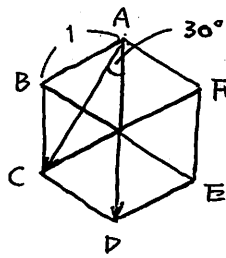


1辺の長さが1の正六角形ABCDEFがある。このとき、内積 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ の値を求めよ。

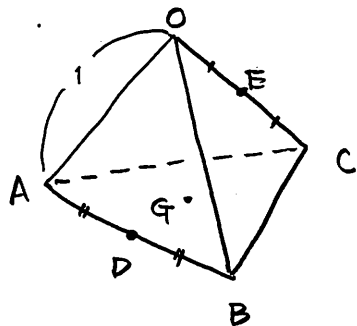


$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}, |\overrightarrow{AD}| = 2 \quad \text{∴}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \sqrt{3} \times 2 \times \cos 30^\circ$$

$$= \underline{\underline{3}}$$

1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて、辺ABの中点をD、辺OCの中点をEとし、 $\triangle ABC$ の重心をGとする。このとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{OG}$ の値を求めよ。



$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\vec{x}| \times \cos 60^\circ = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

同様に

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\begin{aligned} \overrightarrow{DE} &= -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \\ &= -\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OC} \\ \text{点 } G \text{ は } \triangle ABC \text{ の重心 なので} \\ \overrightarrow{OG} &= \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3} \end{aligned} \right)$$

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{-\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}$$

$$= \frac{1}{6} (\overrightarrow{OC} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})) \cdot (\overrightarrow{OC} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}))$$

$$= \frac{1}{6} (|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|^2)$$

$$= \frac{1}{6} (|\overrightarrow{OC}|^2 - (|\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2))$$

$$= \frac{1}{6} (1 - (1 + 1 + 1))$$

$$= \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

2つのベクトル $\vec{a}=(1, -1, -1)$, $\vec{b}=(2, 1, -2)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

解法1

求めるベクトル $\vec{e}=(x, y, z)$ とおくと

$$|\vec{e}|=1 \quad \text{より}$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$$

$$\text{つまり, } x^2+y^2+z^2=1 \quad \text{————— ①}$$

を満足している。

$$\vec{a} \perp \vec{e} \quad \text{かつ} \quad \vec{b} \perp \vec{e} \quad \text{より}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{e} = 0 \quad \text{かつ} \quad \vec{b} \cdot \vec{e} = 0$$

$$x - y - z = 0 \quad \text{かつ} \quad 2x + y - 2z = 0$$

これからより

$$y=0 \quad \text{かつ} \quad z=x$$

①に代入して、

$$x^2+x^2=1$$

$$x^2=\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって

$$\underline{\underline{\vec{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$$

解法2

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ \times & \times & \times & \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 3 & 0 & 3 & \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \perp \vec{c}$ の両方に垂直なベクトル
の1つは $\vec{c}=(3, 0, 3)$ であり、

$$|\vec{c}|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2} \quad \text{なので}$$

求めるベクトル $\vec{e}$ は

$$\vec{e} = \pm \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$$

$$= \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- (1) 2つのベクトル $\vec{a}=(-1, -1, 0)$, $\vec{b}=(1, 2, 2)$ があり, 実数 t に対して $\vec{x}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とする。このとき, $\vec{a}$ と $\vec{x}$ のなす角が 45° となるような t の値を求めよ。
- (2) 各面が合同な三角形からなる四面体 $OABC$ があり, $BC=4$, $CA=5$, $AB=6$ である。 $\vec{OA}$, $\vec{BC}$ のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。

(1) 2013 慶応義塾大 (2) 2017 藤田保健衛生大

(1)

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \\ &= (1-t)(-1, -1, 0) + t(1, 2, 2) \\ &= (-1+t, -1+t, 0) + (t, 2t, 2t) \\ &= (2t-1, 3t-1, 2t)\end{aligned}$$

$$\left(\begin{aligned} |\vec{a}| &= \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2} \\ |\vec{x}| &= \sqrt{(2t-1)^2 + (3t-1)^2 + (2t)^2} \\ &= \sqrt{17t^2 - 10t + 2} \\ \vec{a} \cdot \vec{x} &= -2t + 1 - 3t + 1 \\ &= -5t + 2 \end{aligned} \right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}| |\vec{x}| \cos 45^\circ \quad \text{よ} \cdot$$

$$-5t + 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{17t^2 - 10t + 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$-5t + 2 = \sqrt{17t^2 - 10t + 2}$$

$$\left(\begin{aligned} \because \\ 17t^2 - 10t + 2 &= 0 \quad \text{判別式は} \\ \Delta/4 &= 25 - 34 = -9 < 0 \quad \text{なので} \\ 17t^2 - 10t + 2 &> 0 \quad \text{を満たす} \end{aligned} \right)$$

$$-5t + 2 \geq 0$$

$$(\text{よ} \cdot) \quad t \leq \frac{2}{5} \quad \text{よ} \cdot \text{と} \cdot$$

両辺を2乗して

$$25t^2 - 20t + 4 = 17t^2 - 10t + 2$$

$$8t^2 - 10t + 2 = 0$$

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

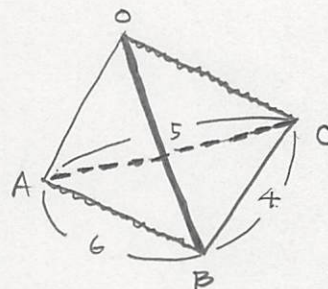
$$(4t-1)(t-1) = 0$$

$$t = \frac{1}{4}, 1$$

$$t \leq \frac{2}{5} \quad \text{よ} \cdot$$

$$\underline{\underline{t = \frac{1}{4}}}$$

(2)



$$|\vec{OA}| = 4, |\vec{OB}| = 5, |\vec{OC}| = 6$$

であり,

$$|\vec{AB}| = 6 \quad \text{よ} \cdot$$

$$|\vec{OA} + \vec{OB}| = 6$$

両辺を2乗して

$$|\vec{OA}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 36$$

$$16 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 25 = 36$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{5}{2}$$

$$|\vec{AC}| = 5 \quad \text{よ} \cdot$$

$$|\vec{OA} + \vec{OC}| = 5$$

両辺を2乗して

$$|\vec{OA}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OC} + |\vec{OC}|^2 = 25$$

$$16 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OC} + 36 = 25$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \frac{27}{2}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{BC} = \vec{OA} \cdot (-\vec{OB} + \vec{OC})$$

$$= -\vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OA} \cdot \vec{OC}$$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= 11$$

このとき

$$\vec{OA} \cdot \vec{BC} = |\vec{OA}| |\vec{BC}| \cos \theta \quad \text{よ} \cdot$$

$$11 = 4 \times 4 \times \cos \theta$$

$$\underline{\underline{\cos \theta = \frac{11}{16}}}$$

2つの単位ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a} + k\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{ka} - \vec{b}|$ ($k > 0$) を満たす。このとき、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を k を用いて表せ。また、 k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2006 福岡大)

$$|\vec{a} + k\vec{b}| = \sqrt{3}|\vec{ka} - \vec{b}|$$

両辺を2乗して

$$|\vec{a}|^2 + 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + k^2|\vec{b}|^2 = 3(k^2|\vec{a}|^2 - 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2)$$

$$1 + 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + k^2 = 3(k^2 - 2k\vec{a} \cdot \vec{b} + 1)$$

$$8k\vec{a} \cdot \vec{b} = 2k^2 + 2$$

 $k \neq 0$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{k^2 + 1}{4k}$$

ここで

 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ として

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta \quad \text{より}$$

$$\frac{k^2 + 1}{4k} = \cos \theta$$

ここで

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{より}$$

$$-1 \leq \frac{k^2 + 1}{4k} \leq 1$$

 $k > 0$ より

$$-4k \leq k^2 + 1 \leq 4k$$

$$\begin{cases} k^2 + 4k + 1 \geq 0 & \text{--- ①} \\ k^2 - 4k + 1 \leq 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

 $k > 0$ として、①は常に成り立つので

②より

$$2 - \sqrt{3} \leq k \leq 2 + \sqrt{3}$$

これは $k > 0$ を満たす。

よって

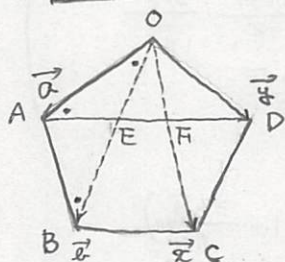
$$\underline{2 - \sqrt{3} \leq k \leq 2 + \sqrt{3}}$$

1 辺の長さが1の正五角形 OABCD について、OB と DC は平行である。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{x}$, $\overrightarrow{OD}=\vec{y}$, $\overrightarrow{DC}=k\vec{b}$ (k は実数) とするとき

- (1) k の値を求め、 $\vec{x}$, $\vec{y}$ を、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いてそれぞれ表せ。
- (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (3) $\vec{a}$ と $\vec{x}$ の内積を求めよ。

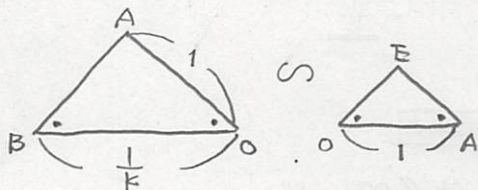
(2016 宮崎大)

(1) 解法1



$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC} &= k\vec{b} \\ k &\neq 0 \text{ より} \\ \vec{b} &= \frac{1}{k} \overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

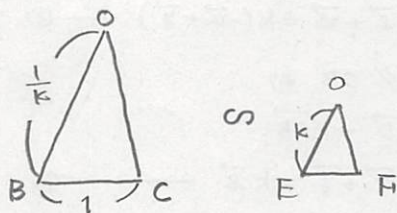
線分 AD と線分 OB, OC の交点をそれぞれ E, F とする。



$$1 : \frac{1}{k} = AE : 1$$

$$\frac{1}{k} AE = 1$$

$$\therefore AE = k$$



$$\frac{1}{k} : 1 = k : EF$$

$$\frac{1}{k} EF = k$$

$$\therefore EF = k^2$$

$\therefore$

$$AE + EF + FD = AD \quad \text{より}$$

$$k + k^2 + k = \frac{1}{k}$$

$$k^3 + 2k^2 - 1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ & & -1 & -1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$(k+1)(k^2+k-1)=0$$

$$k > 0 \text{ より}$$

$$k^2 + k - 1 = 0$$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$k > 0 \text{ より}$$

$$k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$AE : EF : FD = k : k^2 : k$$

$$= 1 : k : 1$$

$$= 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$$

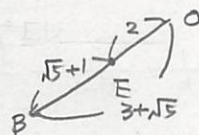
$$= 2 : (\sqrt{5}-1) : 2$$

$$AE : ED = 2 : (\sqrt{5}+1)$$

$$\overrightarrow{OE} = \frac{(\sqrt{5}+1)\vec{a} + 2\vec{y}}{2 + (\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)\vec{a} + 2\vec{y}}{3 + \sqrt{5}}$$

$$OE : EB = 2 : (\sqrt{5}+1) \quad \text{から}$$



$$\overrightarrow{OE} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{b} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \frac{(\sqrt{5}+1)\vec{a} + 2\vec{y}}{3+\sqrt{5}}$$

$$2\vec{b} = (\sqrt{5}+1)\vec{a} + 2\vec{y}$$

$$\underline{\underline{\vec{y} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{a} + \vec{b}}}$$

(裏に続く.)

同様く

$$AF:FD = (\sqrt{5}+1):2$$

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= \frac{2\vec{OA} + (\sqrt{5}+1)\vec{OD}}{(\sqrt{5}+1)+2} \\ &= \frac{2\vec{a} + (\sqrt{5}+1)\vec{d}}{3+\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$OF:FB = 2:(\sqrt{5}+1) \text{ となる}$$

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= \frac{2}{3+\sqrt{5}} \vec{OC} \\ \vec{a} &= \frac{3+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{2\vec{a} + (\sqrt{5}+1)\vec{d}}{3+\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\vec{a} + (\sqrt{5}+1)\vec{d}}{2} \\ &= \vec{a} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{a} + \vec{d}\right) \\ &= \vec{a} - \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \vec{a} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{d} \\ &= -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{a} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{d}\end{aligned}$$

(2)

$$|\vec{AB}| = 1 \quad \text{より}$$

$$|-\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

両辺を2乗して

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ |\vec{a}| = 1 \\ |\vec{b}| = \frac{1}{k} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \text{となる} \end{array} \right)$$

$$1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos \theta + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = 1$$

$$(\sqrt{5}+1) \cos \theta = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(3)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{a} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{b}\right) \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} (-|\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ |\vec{a}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ = \frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ \text{となる} \\ = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \left(-1 + \frac{3+\sqrt{5}}{4}\right) \\ = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \\ = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

(1) 解法2

$$AB \parallel OC \quad \text{より}$$

$$\vec{AB} = k\vec{OC}$$

$$-\vec{a} + \vec{b} = k\vec{c} \quad \text{--- ①}$$

$$BC \parallel AD \quad \text{より}$$

$$\vec{BC} = k\vec{AD}$$

$$-\vec{b} + \vec{c} = k(-\vec{a} + \vec{b}) \quad \text{--- ②}$$

$$CD \parallel OB \quad \text{より}$$

$$\vec{CD} = k\vec{OB}$$

$$-\vec{c} + \vec{d} = k\vec{b} \quad \text{--- ③}$$

$$\text{①, ② より}$$

$$\vec{d} = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \vec{a} + \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k}\right) \vec{b} \quad \text{--- ④}$$

$$\text{①, ③ より}$$

$$\vec{d} = -\frac{1}{k} \vec{a} + \left(k + \frac{1}{k}\right) \vec{b} \quad \text{--- ⑤}$$

$$\text{④} = \text{⑤} \text{ より } \vec{a}, \vec{b} \text{ は 1次独立 となる}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{k} \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k} = -k + \frac{1}{k}$$

両辺に k^2 をかけて整理すると

$$k^2 + k - 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad k^3 - 2k + 1 = 0$$

(あとは省略)

空間のベクトル $\vec{a}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$ を

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \vec{p} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right), \vec{q} = (-1, \sqrt{3}, 2)$$

で定め、 $\alpha = \vec{p} \cdot \vec{a}$, $\beta = \vec{q} \cdot \vec{a}$ とおく。 $\vec{b} = \vec{p} - \alpha \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{q} - \beta \vec{a} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ とする。

(1) $\vec{b}$, $\vec{c}$ を成分で表せ。

(2) 座標空間の原点を O とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ となる 3 点 A , B , C に対して、四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ。

(2012 東京農工大)

$$(1) \quad \left(\begin{array}{ll} \alpha = \vec{p} \cdot \vec{a} & \beta = \vec{q} \cdot \vec{a} \\ = \frac{1}{2} + \frac{3}{6} & = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ = 1 & = 1 \end{array} \right)$$

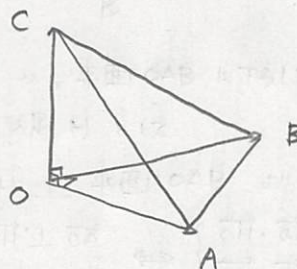
$$\begin{aligned} \vec{b} &= \vec{p} - \alpha \vec{a} \\ &= \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right) - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) \\ &= \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1 \right)}} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} |\vec{b}|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{36} + 1 \\ = \frac{3+1+12}{12} \\ = \frac{16}{12} \\ = \frac{4}{3} \\ \vec{q} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{6} + 2 \\ = 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{q} - \beta \vec{a} - \frac{\vec{q} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \\ &= (-1, \sqrt{3}, 2) - \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \right) - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, 1 \right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \right) + \left(-\frac{3}{8}, \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{3}{4} \right) \\ &= \underline{\underline{\left(-\frac{15}{8}, \frac{5\sqrt{3}}{8}, \frac{5}{4} \right)}} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \left(\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = -\frac{15}{16} + \frac{15}{16} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = -\frac{15}{16} - \frac{5}{16} + \frac{5}{4} = 0 \end{array} \right)$$

よって

 $\vec{a} \perp \vec{b}$ かつ $\vec{a} \perp \vec{c}$ かつ $\vec{b} \perp \vec{c}$ 

よって

平面 $OAB \perp OC$ である。

よって

$$\left(\begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ |\vec{b}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + 1} = \sqrt{\frac{3+1+12}{12}} \\ = \sqrt{\frac{16}{12}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \\ |\vec{c}| = \left| \frac{5}{8} (-3, \sqrt{3}, 2) \right| \\ = \frac{5}{8} \sqrt{9+3+4} \\ = \frac{5}{2} \end{array} \right)$$

$$S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} |\vec{a}| |\vec{b}| = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって

$$\begin{aligned} V(OABC) &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{5}{2} \\ &= \underline{\underline{\frac{5\sqrt{3}}{18}}} \end{aligned}$$

平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が, $|2\vec{a} + \vec{b}| = 2$, $|3\vec{a} - 5\vec{b}| = 1$ を満たしている。 $|\vec{a} + \vec{b}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2009 名城大)

$$2\vec{a} + \vec{b} = \vec{p}, \quad 3\vec{a} - 5\vec{b} = \vec{q}$$

とおく

$$5\vec{p} = 10\vec{a} + 5\vec{b}$$

$$+ \vec{q} = 3\vec{a} - 5\vec{b}$$

$$5\vec{p} + \vec{q} = 13\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{5}{13}\vec{p} + \frac{1}{13}\vec{q}$$

$$3\vec{p} = 6\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$- 2\vec{q} = 6\vec{a} - 10\vec{b}$$

$$3\vec{p} - 2\vec{q} = 13\vec{b}$$

$$\vec{b} = \frac{3}{13}\vec{p} - \frac{2}{13}\vec{q}$$

また,

$$|\vec{p}| = 2, \quad |\vec{q}| = 1 \quad \text{であり,}$$

 $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角 θ として,

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$-|\vec{p}||\vec{q}| \leq |\vec{p}||\vec{q}| \cos \theta \leq |\vec{p}||\vec{q}|$$

$$-2 \leq \vec{p} \cdot \vec{q} \leq 2$$

よって

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \left| \left(\frac{5}{13}\vec{p} + \frac{1}{13}\vec{q} \right) + \left(\frac{3}{13}\vec{p} - \frac{2}{13}\vec{q} \right) \right|$$

$$= \left| \frac{8}{13}\vec{p} - \frac{1}{13}\vec{q} \right|$$

であり,

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = \frac{1}{169} (64|\vec{p}|^2 - 16\vec{p} \cdot \vec{q} + |\vec{q}|^2)$$

$$= \frac{1}{169} (256 - 16\vec{p} \cdot \vec{q} + 1)$$

$$= \frac{1}{169} (-16\vec{p} \cdot \vec{q} + 257)$$

よって

$$-2 \leq \vec{p} \cdot \vec{q} \leq 2 \quad \text{より}$$

$$-32 \leq -16\vec{p} \cdot \vec{q} \leq 32$$

$$225 \leq -16\vec{p} \cdot \vec{q} + 257 \leq 289$$

$$\frac{225}{169} \leq \frac{1}{169} (-16\vec{p} \cdot \vec{q} + 257) \leq \frac{289}{169}$$

$$\frac{225}{169} \leq |\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq \frac{289}{169}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq 0 \quad \text{より}$$

$$\frac{15}{13} \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq \frac{17}{13}$$

よって

$$\begin{cases} \text{Max } |\vec{a} + \vec{b}| = \frac{17}{13} \\ \text{min } |\vec{a} + \vec{b}| = \frac{15}{13} \end{cases}$$

平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が $|\vec{a}+2\vec{b}|=2$, $|2\vec{a}-\vec{b}|=2$ を満たすように動く。ベクトル $\vec{a}+2\vec{b}$ と $2\vec{a}-\vec{b}$ がなす角を θ とする。このとき、 $|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの θ を、それぞれ求めよ。(2013 ≡ 重大)

解法1

$$|\vec{a}+2\vec{b}|=2$$

〆両辺を2乗して

$$|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 4 \quad \text{①}$$

$$|2\vec{a}-\vec{b}|=2$$

〆両辺を2乗して

$$4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4 \quad \text{②}$$

$$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}+2\vec{b}||2\vec{a}-\vec{b}|\cos\theta$$

$$2|\vec{a}|^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 2 \times 2 \times \cos\theta$$

$$2(|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2) + 3\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cos\theta \quad \text{③}$$

① + ② より

$$5(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 8$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = \frac{8}{5} \quad \text{④}$$

① - ② より

$$-3|\vec{a}|^2 + 8\vec{a}\cdot\vec{b} + 3|\vec{b}|^2 = 0$$

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = \frac{8}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} \quad \text{⑤}$$

③, ⑤ より

$$\frac{16}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cos\theta$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{12}{25}\cos\theta \quad \text{⑥}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= \frac{8}{5} + \frac{24}{25}\cos\theta \quad (\text{④, ⑥ より})$$

∴ $\cos\theta$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad \text{より}$$

$$\frac{16}{25} \leq \frac{8}{5} + \frac{24}{25}\cos\theta \leq \frac{64}{25}$$

$$\frac{16}{25} \leq |\vec{a}+\vec{b}|^2 \leq \frac{64}{25}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}| \geq 0 \quad \text{より}$$

$$\frac{4}{5} \leq |\vec{a}+\vec{b}| \leq \frac{8}{5}$$

$$\begin{cases} \text{Max } |\vec{a}+\vec{b}| = \frac{8}{5} & (\theta=0) \\ \text{min } |\vec{a}+\vec{b}| = \frac{4}{5} & (\theta=\pi) \end{cases}$$

解法2

$$\vec{x} = \vec{a}+2\vec{b}, \quad \vec{y} = 2\vec{a}-\vec{b} \quad \text{とおく}$$

$$|\vec{x}|=2, \quad |\vec{y}|=2 \quad \vec{x}\cdot\vec{y} = 4\cos\theta \quad \text{とわかる}$$

$$\vec{a} = \frac{\vec{x}+2\vec{y}}{5}, \quad \vec{b} = \frac{2\vec{x}-\vec{y}}{5}$$

$$\vec{a}+\vec{b} = \frac{3\vec{x}+\vec{y}}{5}$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = \left| \frac{3\vec{x}+\vec{y}}{5} \right|^2$$

$$= \frac{1}{25} (9|\vec{x}|^2 + 6\vec{x}\cdot\vec{y} + |\vec{y}|^2)$$

$$= \frac{1}{25} (40 + 24\cos\theta)$$

$$= \frac{8}{25} (3\cos\theta + 5)$$

∴ $\cos\theta$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1 \quad \text{より}$$

$$2 \leq 3\cos\theta + 5 \leq 8$$

$$\frac{16}{25} \leq \frac{8}{25} (3\cos\theta + 5) \leq \frac{64}{25}$$

$$\frac{16}{25} \leq |\vec{a}+\vec{b}|^2 \leq \frac{64}{25}$$

(あとは同じ)

平面上のベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が, $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1, \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{2}$ を満たすとする。

(2012 東北大)

- (1) 実数 p, q に対して, $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ とおく。このとき, $|\vec{c}|=1, \vec{a} \cdot \vec{c}=0, p>0$ を満たす実数 p, q を求めよ。
 (2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が $-1 \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq 1, 1 \leq \vec{b} \cdot \vec{x} \leq 2$ を満たすとき, $|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)

$$|\vec{c}|=1 \quad \text{より} \quad |\vec{c}|^2=1$$

$$|p\vec{a} + q\vec{b}|^2 = 1$$

$$p^2|\vec{a}|^2 + 2pq\vec{a} \cdot \vec{b} + q^2|\vec{b}|^2 = 1$$

$$p^2 - pq + q^2 = 1 \quad \text{--- ①}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \quad \text{より}$$

$$\vec{a} \cdot (p\vec{a} + q\vec{b}) = 0$$

$$p|\vec{a}|^2 + q\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$p - \frac{1}{2}q = 0$$

$$q = 2p \quad \text{--- ②}$$

② を ① に代入して

$$p^2 - 2p^2 + 4p^2 = 1$$

$$3p^2 = 1$$

$$p^2 = \frac{1}{3}$$

$$p = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

 $p > 0$ より

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}}, q = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2)

(1) の $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b}$ は $|\vec{c}|=1, \vec{a} \cdot \vec{c}=0$ を満たすから $\vec{a}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立である。

よって

$$\vec{x} = s\vec{a} + t\vec{c} \quad \text{と表す}$$

$$-1 \leq \vec{a} \cdot \vec{x} \leq 1 \quad \text{より}$$

$$-1 \leq \vec{a} \cdot (s\vec{a} + t\vec{c}) \leq 1$$

$$-1 \leq s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{c} \leq 1$$

$$\text{よって} \quad -1 \leq s \leq 1$$

$$-1 \leq \vec{b} \cdot \vec{x} \leq 2 \quad \text{より}$$

$$-1 \leq \vec{b} \cdot (s\vec{a} + t\vec{c}) \leq 2$$

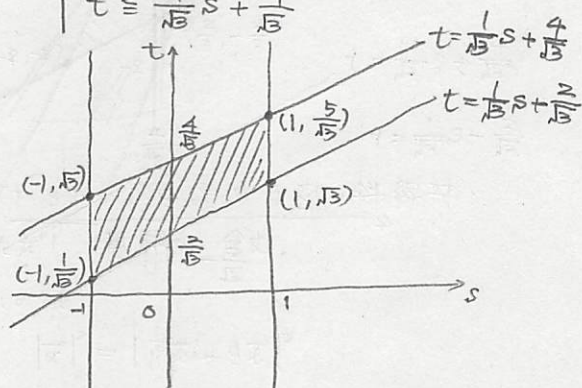
$$-1 \leq s\vec{b} \cdot \vec{a} + t\vec{b} \cdot \vec{c} \leq 2$$

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{b} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\vec{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{b} \cdot \vec{a} + \frac{2}{\sqrt{3}}|\vec{b}|^2 \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$-1 \leq -\frac{1}{2}s + \frac{\sqrt{3}}{2}t \leq 2$$

よって

$$\begin{cases} t \geq \frac{1}{\sqrt{3}}s + \frac{2}{\sqrt{3}} \\ t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}s + \frac{4}{\sqrt{3}} \end{cases}$$



(s, t) の存在範囲は図の斜線部
 であり、境界を含む。

よって

$$|\vec{x}|^2 = s^2 + t^2 = k^2 \quad (k \geq 0) \quad \text{と表す}$$

中心 $(0, 0)$, 半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。最大となる k は円が点 $(1, \frac{5}{\sqrt{3}})$ を通るとき

$$k^2 = 1 + \frac{25}{3} = \frac{28}{3}$$

$$k > 0 \quad \text{より} \quad \max k = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

最小となる k は

$$\text{円と直線 } t = \frac{1}{\sqrt{3}}s + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (\Leftrightarrow s - \sqrt{3}t + 2 = 0)$$

が接するときであり

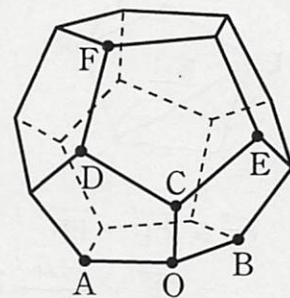
$$\frac{|2|}{\sqrt{1+3}} = 1 = \sqrt{k} \quad \text{①} \quad \max k = 1$$

よって

$$1 \leq |\vec{x}| \leq \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

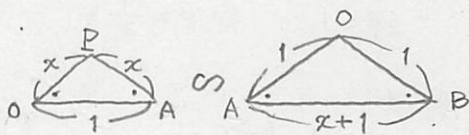
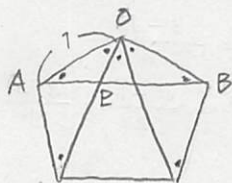
1辺の長さが1の正十二面体を考える。点O, A, B, C, D, E, Fを右の図に示す正十二面体の頂点とし、 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

- (1) 1辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求めて、内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。
- (3) Oから平面ABDに垂線OHを下ろす。 $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。さらに、その大きさを求めよ。



(2011 福井大)

(1) 解法1



$$x:1 = 1:(x+1)$$

$$x^2 + x = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x > 0 \text{ より } x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

よって

対角線の長さ = AB

$$= x + 1$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$|\vec{AB}| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

両辺 2乗して

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$$

$$2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

解法2

左図で $\theta = 36^\circ = \theta$ とおく。

$$5\theta = 180^\circ \text{ であり}$$

$$3\theta + 2\theta = 180^\circ$$

$$3\theta = 180^\circ - 2\theta$$

$$\cos 3\theta = \cos (180^\circ - 2\theta)$$

$$\cos 3\theta = -\cos 2\theta$$

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = -2\cos^2\theta + 1$$

$$4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1 = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 4 & 2 & -3 & -1 \\ & & -4 & 2 & 1 \\ \hline & 4 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

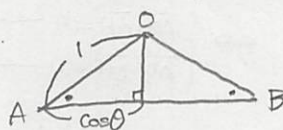
$$(\cos\theta + 1)(4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\cos\theta \neq -1 \text{ より}$$

$$4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$$

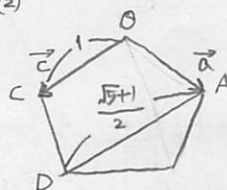
$$\cos\theta = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\cos\theta > 0 \text{ より } \cos\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$



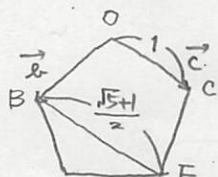
$$\text{よって } AB = 2\cos\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

(2)



$$\vec{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{c} \text{ となる}$$

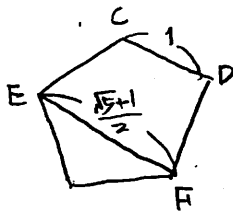
$$\begin{aligned} \vec{CD} &= \vec{CO} + \vec{OA} + \vec{AD} \\ &= -\vec{c} + \vec{a} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{c} \\ &= \vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c} \end{aligned}$$



(裏に続く)

同様に

$$\begin{aligned} \vec{CE} &= \vec{CO} + \vec{OB} + \vec{BE} \\ &= -\vec{c} + \vec{b} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{c} \\ &= \vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \vec{CF} &= \vec{CE} + \vec{EF} \\
 &= \vec{CE} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{CB} \\
 &= \left(\vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c} \right) + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \left(\vec{a} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c} \right) \\
 &= \vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vec{c} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{a} + \vec{c} \\
 &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{OH} &= \vec{OC} + \vec{CH} \\
 &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{a} + \vec{b} + \frac{\sqrt{5}+3}{2} \vec{c}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \vec{OD} &= \vec{OC} + \vec{CD} \\
 &= \vec{a} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{c}
 \end{aligned}$$

点Hは平面ABD上にある

$$\vec{OH} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OD} \quad (\alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ --- ①})$$

$$\begin{aligned}
 &= \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \left(\vec{a} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{c} \right) \\
 &= (\alpha + \gamma) \vec{a} + \beta \vec{b} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \gamma \vec{c}
 \end{aligned}$$

(平面ABD) ⊥ $\vec{OH}$ ②

$$\begin{cases} \vec{AB} \perp \vec{OH} \\ \vec{AD} \perp \vec{OH} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{OH} = 0 \text{ --- ②} \\ \vec{AD} \cdot \vec{OH} = 0 \text{ --- ③} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \\ \text{図形} \vec{a} \text{ と } \vec{b} \text{ の性質より} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{1-\sqrt{5}}{4} = k \\ \text{とおく} \end{array} \right)$$

② ③

$$(-\vec{a} + \vec{b}) \cdot \left((\alpha + \gamma) \vec{a} + \beta \vec{b} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \gamma \vec{c} \right) = 0$$

$$(-\alpha - \gamma + \beta) + \left(-\beta - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \gamma + \alpha + \gamma + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \gamma \right) k = 0$$

$$-\alpha + \beta - \gamma + (\alpha - \beta + \gamma) k = 0$$

$$(\alpha - \beta + \gamma)(k - 1) = 0$$

$k \neq 1$ ③

$$\alpha - \beta + \gamma = 0 \text{ --- ②'}$$

③ ④

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \vec{c} \right) \cdot \left((\alpha + \gamma) \vec{a} + \beta \vec{b} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \gamma \vec{c} \right) = 0$$

$$(\alpha + \gamma + \beta) k + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \gamma = 0$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \times \frac{1-\sqrt{5}}{4} + \frac{2\sqrt{5}+2}{4} \gamma = 0$$

④ ⑤

$$2(\sqrt{5}+1)\gamma = \sqrt{5}-1$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{また} \quad \frac{\sqrt{5}+1}{2} \gamma = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \times \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

①-②' ⑥

$$2\beta = 1 \quad \text{⑥} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

① ⑦

$$\alpha = 1 - \beta - \gamma$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

⑦

$$\vec{OH} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \vec{c}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OH} = |\vec{OA}| |\vec{OH}| \cos \angle AOH \quad \text{⑧}$$

$$|\vec{OH}|^2 = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$|\vec{OH}| > 0 \quad \text{⑨}$$

$$\underline{|\vec{OH}| = \frac{1}{2}}$$