

$\triangle ABC$ の辺上に、 $4\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC}$, $4\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA}$ となるように、3点 P, Q, R をとるとき、 $\triangle ABC$ の重心と $\triangle PQR$ の重心は一致することを示せ。

証明

点 G を $\triangle ABC$ の重心 とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \quad \text{————— ①}\end{aligned}$$

$$4\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$4\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BC} \quad \text{より}$$

$$4(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AQ}) = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$4\overrightarrow{AQ} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$4\overrightarrow{CR} = \overrightarrow{CA} \quad \text{より}$$

$$4(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AR}) = -\overrightarrow{AC}$$

$$4\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

点 G' を $\triangle PQR$ の重心 とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG'} &= \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \right) \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \quad \text{————— ②}\end{aligned}$$

$$\text{①} = \text{②} \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG'}$$

つまり

2点 G, G' は一致する。

すなわち

$\triangle ABC$ の重心 と $\triangle PQR$ の重心 は一致する。

平面上に4点O, A, B, Cがある。 $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, $OA=2$, $OB=1$, $OC=\sqrt{2}$ のとき, $\triangle OAB$ の面積を求めよ。

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0} \quad \text{より}$$

$$\vec{OC} = -\vec{OA} - \vec{OB}$$

$$|\vec{OC}| = |-\vec{OA} - \vec{OB}|$$

両辺に2乗して

$$|\vec{OC}|^2 = |\vec{OA}|^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2$$

$$2 = 4 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 1$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -\frac{3}{2}$$

よって

$$S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4 \times 1 - \frac{9}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{7}}{4}}}$$

平面上の点Oを中心とする半径2の円周上に3点A, B, Cがあり, $2\vec{OA} + 3\vec{OB} - 4\vec{OC} = \vec{0}$ を満たす。

- (1) 内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ を求めよ。
- (2) 線分 AB の長さを求めよ。
- (3) 線分 AB と線分 OC の交点を D とするとき, $\vec{OD}$ を $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ で表せ。
- (4) 四角形 OBCA の面積を求めよ。

(2017 鳥取大)

(1)

$$2\vec{OA} + 3\vec{OB} - 4\vec{OC} = \vec{0}$$

$$4\vec{OC} = 2\vec{OA} + 3\vec{OB}$$

$$|4\vec{OC}| = |2\vec{OA} + 3\vec{OB}|$$

両辺に2乗して

$$16|\vec{OC}|^2 = 4|\vec{OA}|^2 + 12\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 9|\vec{OB}|^2$$

$$64 = 16 + 12\vec{OA} \cdot \vec{OB} + 36$$

$$12\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 12$$

$$\underline{\underline{\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1}}$$

(2)

$$|\vec{AB}|^2 = |-\vec{OA} + \vec{OB}|^2$$

$$= |\vec{OA}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2$$

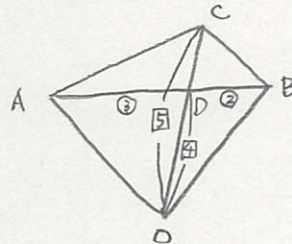
$$= 4 - 2 + 4$$

$$= 6$$

$$|\vec{AB}| \geq 0 \quad \therefore$$

$$\underline{\underline{|\vec{AB}| = \sqrt{6}}}$$

(4)



$$S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OB}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OB})^2}$$

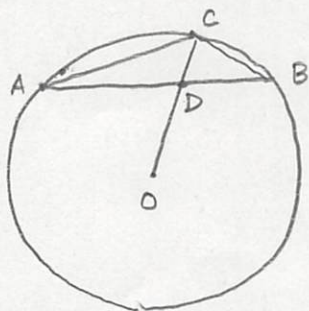
$$= \frac{1}{2} \sqrt{4 \times 4 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$S(\square OBCA) = \frac{5}{4} S(\triangle OAB)$$

$$= \underline{\underline{\frac{5\sqrt{15}}{8}}}$$

(3)



$$\vec{OC} = \frac{2\vec{OA} + 3\vec{OB}}{4}$$

$$= \frac{5}{4} \times \frac{2\vec{OA} + 3\vec{OB}}{3+2}$$

∴

$$\underline{\underline{\vec{OD} = \frac{2}{5}\vec{OA} + \frac{3}{5}\vec{OB}}}$$

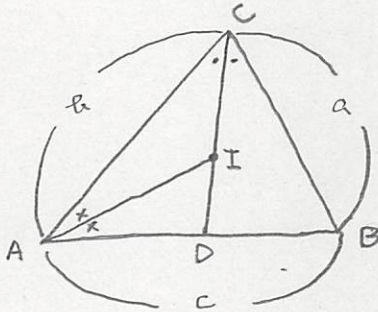
$\triangle ABC$ の内心を I , 外心を O とし, 辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c とする。

(1) $\overrightarrow{AI} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ となる実数 r , s を, a , b , c を用いて表せ。

(2) 頂点 A に対応する内角の大きさが $\frac{\pi}{3}$ であるとき, $\overrightarrow{AO} = t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}$ となる実数 t , u を, b , c を用いて表せ。

(2017 埼玉大)

(1)



直線 CI と辺 AB の交点 D により

$$\begin{aligned} AD : DB &= CA : CB \\ &= b : a \end{aligned}$$

より

$$AD = \frac{bc}{a+b}$$

$$CI : ID = AC : AD$$

$$= b : \frac{bc}{a+b}$$

$$= (a+b) : c$$

よって

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$$

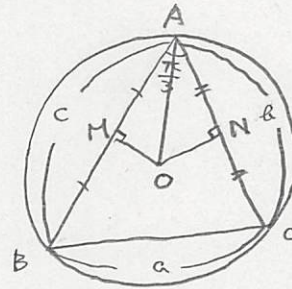
$$\overrightarrow{AI} = \frac{c\overrightarrow{AC} + (a+b)\overrightarrow{AD}}{(a+b) + c}$$

$$= \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$$

よって

$$\underline{\underline{r = \frac{b}{a+b+c}, s = \frac{c}{a+b+c}}}$$

(2)



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = c \cdot b \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} bc$$

辺 AB , AC の中点をそれぞれ M , N とおくと

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

よって

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AM}|^2 & \text{--- ①} \\ \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AN}|^2 & \text{--- ②} \end{cases}$$

である。

$$\text{①より } \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot (t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4} c^2$$

$$\frac{1}{2} c^2 t + \frac{1}{4} bc u = \frac{1}{4} c^2$$

$$c \neq 0 \text{ より } 2ct + bu = c \quad \text{--- ①'}$$

$$\text{②より } \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \cdot (t\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4} b^2$$

$$\frac{1}{4} bct + \frac{1}{2} b^2 u = \frac{1}{4} b^2$$

$$b \neq 0 \text{ より } ct + 2bu = b \quad \text{--- ②'}$$

$$\text{①' } 2ct + bu = c$$

$$\text{②' } \times 2 \quad \underline{2ct + 4bu = 2b} \quad (-)$$

$$-3bu = c - 2b$$

$$u = \frac{2b - c}{3b}$$

$$\text{①' } \times 2 \quad 4ct + 2bu = 2c$$

$$\text{②' } \quad \underline{ct + 2bu = b} \quad (-)$$

$$3ct = 2c - b$$

$$t = \frac{2c - b}{3c}$$

よって

$$\underline{\underline{t = \frac{2c - b}{3c}, u = \frac{2b - c}{3b}}}$$

$\triangle OAB$ について, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{2a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ が成り立つ。

- (1) $|\overrightarrow{AB}|$ を求めよ。
 (2) 点 P が $\triangle OAB$ の外接円上を動くとき, $\triangle PAB$ の面積の最大値を求めよ。
 (3) 点 Q が O を中心とし半径 $|\overrightarrow{OA}|$ の円上を動くとき, $\triangle QAB$ の面積の最大値を求めよ。 (2009 名古屋市立大)

(1)

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$$

両辺を2乗して

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 6 \quad \text{--- ①}$$

$$|\vec{2a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$$

両辺を2乗して

$$4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3 \quad \text{--- ②}$$

①, ②より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{2}, \quad |\vec{b}| = 3$$

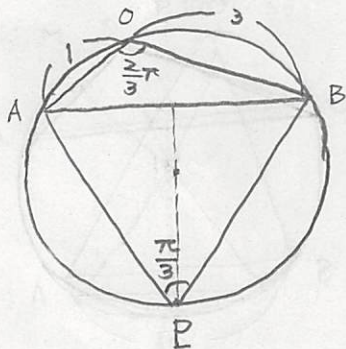
このとき

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |-\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 1 + 3 + 9 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{AB}| \geq 0$ より

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13}$$

(2)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \quad \text{より}$$

$$-\frac{3}{2} = 1 \times 3 \times \cos \angle AOB$$

$$\cos \angle AOB = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{2}{3}\pi$$

このとき

$\triangle OAB$ は円に内接するので

$$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$$

$\triangle PAB$ の面積が最大となるのは

$$PA = PB \quad \text{のとき}$$

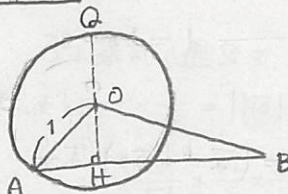
つまり

$\triangle PAB$ が正三角形 となるときである。

このとき

$$\begin{aligned} \text{Max } S(\triangle PAB) &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{13\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

(3) 解法1



点 Q から直線 AB に下ろした垂線の足 H とすると, 点 O が線分 QH 上にあるとき

$S(\triangle QAB)$ は最大となる。

点 H は直線 AB 上より

$$\overrightarrow{OH} = \frac{(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}}{s + (1-s)} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$$

と表すと

$$\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$((1-s)\vec{a} + s\vec{b}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = 0$$

$$(-1+s)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a} \cdot \vec{b} + s|\vec{b}|^2 = 0$$

$$-1+s - \frac{3}{2} + 3s + 9s = 0$$

$$13s = \frac{5}{2}$$

$$s = \frac{5}{26}$$

このとき

$$\overrightarrow{OH} = \frac{21}{26}\vec{a} + \frac{5}{26}\vec{b}$$

(裏に続く)

$$|\vec{OH}|^2 = \vec{OH} \cdot \vec{OA}$$

$$= \left(\frac{21}{26} \vec{a} + \frac{5}{26} \vec{b} \right) \cdot \vec{a}$$

$$= \frac{21}{26} |\vec{a}|^2 + \frac{5}{26} \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= \frac{21}{26} - \frac{15}{52}$$

$$= \frac{27}{52}$$

$$|\vec{OH}| \geq 0 \text{ より } |\vec{OH}| = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

5.2

$$\text{Max } S(\triangle QAB) = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}} + 1 \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{13}}{2}}}$$

(3) 解法2

$S(\triangle OAB)$ を2通りに表して

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times |\vec{OH}| = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \times \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$|\vec{OH}| = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{13}}$$

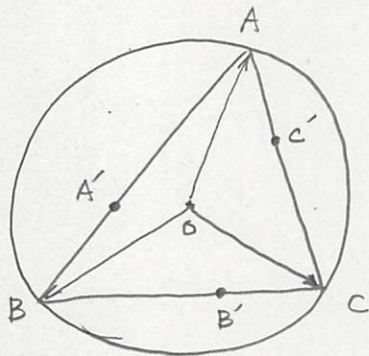
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

(後は同じ)

点Oを中心とし、半径が r である円に内接する $\triangle ABC$ について、3辺AB, BC, CAをそれぞれ2:1に内分する点を A' , B' , C' とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

(1) r と内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を用いて $|\overrightarrow{OA'}|^2$ を表せ。

(2) 3点 A' , B' , C' を通る円の中心が点Oと一致するとき、 $\triangle ABC$ は正三角形であることを示せ。(2011 秋田大)



$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{OA'} &= \frac{1\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{2+1} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA'}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 \\ &= \underline{\underline{\frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b}}} \end{aligned}$$

(2) 証明

$$\left\{ \begin{aligned} \overrightarrow{OA'} &= \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \\ \overrightarrow{OB'} &= \frac{\vec{b} + 2\vec{c}}{3} \\ \overrightarrow{OC'} &= \frac{\vec{c} + 2\vec{a}}{3} \end{aligned} \right.$$

(1) と同様に

$$\left\{ \begin{aligned} |\overrightarrow{OA'}|^2 &= \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ |\overrightarrow{OB'}|^2 &= \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ |\overrightarrow{OC'}|^2 &= \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{c} \cdot \vec{a} \end{aligned} \right.$$

$$|\overrightarrow{OA'}| = |\overrightarrow{OB'}| = |\overrightarrow{OC'}| \quad r \neq 0 \text{ とき}$$

$$\frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{5}{9}r^2 + \frac{4}{9}\vec{c} \cdot \vec{a}$$

つまり

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = k \quad \text{とできる}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB'}|^2 &= |-\vec{a} + \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= r^2 - 2k + r^2 \\ &= 2r^2 - 2k \end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{BC'}|^2 = |-\vec{b} + \vec{c}|^2 = 2r^2 - 2k$$

$$|\overrightarrow{CA'}|^2 = |-\vec{c} + \vec{a}|^2 = 2r^2 - 2k$$

より

$$|\overrightarrow{AB'}|^2 = |\overrightarrow{BC'}|^2 = |\overrightarrow{CA'}|^2$$

$$|\overrightarrow{AB'}| > 0, |\overrightarrow{BC'}| > 0, |\overrightarrow{CA'}| > 0$$

とあわせて

$$|\overrightarrow{AB'}| = |\overrightarrow{BC'}| = |\overrightarrow{CA'}|$$

つまり

$\triangle ABC$ は正三角形である。■

正三角形でない $\triangle ABC$ の重心を G , 外心を E とする。

$\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} = \vec{EH}$ となる点 H は $\triangle ABC$ の垂心であることを示せ。また、 E, G, H は一直線上にあり、かつ $EG:GH=1:2$ であることを示せ。

(1999 山梨大)

前半の証明1

$$\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} = \vec{EH} \quad \text{--- ① より}$$

$$-\vec{AE} + (-\vec{AE} + \vec{AB}) + (-\vec{AE} + \vec{AC}) = -\vec{AE} + \vec{AH}$$

$$\vec{AH} = \vec{AB} + \vec{AC} - 2\vec{AE}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ \text{辺 } BC \text{ の中点を } M \text{ とおくと} \\ \vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \quad \text{より} \\ \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM} \end{array} \right)$$

$$\vec{AH} = 2\vec{AM} - 2\vec{AE}$$

$$\vec{AH} = 2(-\vec{AE} + \vec{AM})$$

$$\vec{AH} = 2\vec{EM}$$

よって

$$\vec{AH} \parallel \vec{EM} \quad \text{--- ②}$$

また、

点 E は $\triangle ABC$ の外心なので

$$\vec{EM} \perp \vec{BC} \quad \text{--- ③}$$

②, ③ より

$$\vec{AH} \perp \vec{BC} \quad \text{--- ④}$$

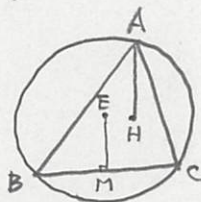
線分 AC の中点を N とおくと

同様に

$$\vec{BH} \perp \vec{CA} \quad \text{--- ⑤}$$

が成り立つ。

④, ⑤ より

点 H は $\triangle ABC$ の垂心である。

後半の証明

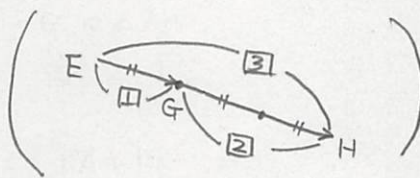
点 G は $\triangle ABC$ の重心なので

$$\vec{EG} = \frac{\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC}}{3} \quad \text{より}$$

$$\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} = 3\vec{EG}$$

このとき ① より

$$\vec{EH} = 3\vec{EG}$$



よって

 E, G, H は一直線上にあり

$$EG:GH = 1:2 \quad \text{である。}$$

前半の証明2

外心 E について

$$|\vec{EA}| = |\vec{EB}| = |\vec{EC}| \quad \text{であり}$$

$$\vec{EA} + \vec{EB} + \vec{EC} = \vec{EH} \quad \text{より}$$

$$\vec{EH} - \vec{EA} = \vec{EB} + \vec{EC}$$

$$\vec{AH} = \vec{EB} + \vec{EC}$$

よって

$$\vec{AH} \cdot \vec{BC} = (\vec{EB} + \vec{EC}) \cdot (-\vec{EB} + \vec{EC})$$

$$= |\vec{EC}|^2 - |\vec{EB}|^2$$

$$= 0$$

同様に

$$\vec{BH} \cdot \vec{CA} = 0$$

となり、 $\vec{AH} \perp \vec{BC}$ かつ $\vec{BH} \perp \vec{CA}$ より点 H は $\triangle ABC$ の垂心に一致する。

△ABCにおいて $\angle BAC = 90^\circ$, $|\overrightarrow{AB}| = 1$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$ とする。△ABCの内部の点Pが

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = \vec{0} \text{ を満たすとする。}$$

(1) $\angle APB$, $\angle APC$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$, $|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ。

(2013 東京大)

(1)

与式を変形して

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} = -\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} \right|$$

両辺を2乗して

$$1 + 2 \cdot \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} + 1 = 1$$

$$\frac{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| \cos \angle APB}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}|} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \angle APB = -\frac{1}{2}$$

$$0^\circ < \angle APB < 180^\circ \text{ より}$$

$$\angle APB = 120^\circ$$

また、与式を変形して

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|} + \frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|} = -\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}$$

同様に

$$\angle APC = 120^\circ$$

(2) 解決1

$$\angle BAC = 90^\circ \text{ より}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$(-\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (-\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}) = 0$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2 - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PC} = 0$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + \frac{1}{2} |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PC}| + \frac{1}{2} |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| - \frac{1}{2} |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| = 0$$

$$2|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PC}| + |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| - |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| = 0 \quad \text{--- ①}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = 1 \text{ より}$$

$$|-\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = 1$$

両辺を2乗して

$$|\overrightarrow{PA}|^2 - 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} + |\overrightarrow{PB}|^2 = 1$$

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| + |\overrightarrow{PB}|^2 = 1 \quad \text{--- ②}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$|-\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}| = \sqrt{3}$$

同様に

$$|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PC}| + |\overrightarrow{PC}|^2 = 3 \quad \text{--- ③}$$

$$\text{②} + \text{③} - \text{①} \text{ より}$$

$$|\overrightarrow{PB}|^2 + |\overrightarrow{PB}| |\overrightarrow{PC}| + |\overrightarrow{PC}|^2 = 4 \quad \text{--- ④}$$

$$|\overrightarrow{PA}| = x, |\overrightarrow{PB}| = y, |\overrightarrow{PC}| = z \text{ とおく}$$

②, ③, ④ はそれぞれ

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1 & \text{--- ②'} \\ x^2 + xz + z^2 = 3 & \text{--- ③'} \\ y^2 + yz + z^2 = 4 & \text{--- ④'} \end{cases}$$

$$\text{②'} \times (x - y) \quad x^3 - y^3 = x - y$$

$$\text{③'} \times (z - x) \quad z^3 - x^3 = 3z - 3x$$

$$\text{④'} \times (y - z) \quad y^3 - z^3 = 4y - 4z \quad (+)$$

$$0 = -2x + 3y - z$$

$$\text{つまり, } z = -2x + 3y \quad \text{--- ⑤}$$

⑤を③'に代入して

$$x^2 - 2x^2 + 3xy + 4x^2 - 12xy + 9y^2 = 3$$

$$3x^2 - 9xy + 9y^2 = 3$$

$$x^2 - 3xy + 3y^2 = 1 \quad \text{--- ⑥}$$

$$\text{②'} - \text{⑥} \text{ より}$$

$$4xy - 2y^2 = 0$$

$$y(2x - y) = 0$$

$$y = 0, 2x$$

ii) $y = 0$ のとき

$$\text{②'} \text{ より } x = 1$$

$$\text{④'} \text{ より } z = 2$$

これは③'を満たさぬ。

iii) $y = 2x$ のとき

$$\text{②'} \text{ より } x = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad \text{よって } y = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\text{③'} \text{ より}$$

$$z^2 + \frac{1}{\sqrt{7}}z - \frac{20}{7} = 0$$

$$7z^2 + \sqrt{7}z - 20 = 0$$

(裏に続く)

$$(\sqrt{7}z+5)(\sqrt{7}z-4)=0$$

$$z > 0 \text{ より } z = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

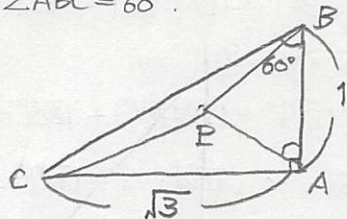
(i), (ii) より

$$\underline{|\vec{PA}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\vec{PB}| = \frac{2}{\sqrt{7}}, |\vec{PC}| = \frac{4}{\sqrt{7}}}$$

解法2

$$\angle BAC = 90^\circ, AB = 1, AC = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$\angle ABC = 60^\circ$$



$$\angle PAB = 180^\circ - \angle APB - \angle PBA$$

$$= 180^\circ - 120^\circ - \angle PBA$$

$$= 60^\circ - \angle PBA$$

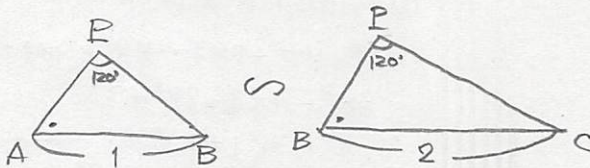
$$\angle PBC = 60^\circ - \angle PBA$$

よって

$$\angle PAB = \angle PBC$$

また

$$\angle APB = \angle BPC \text{ より}$$



$$PA = x \quad \text{と} \quad PB = 2x$$

$\triangle PAB$ で余弦定理より

$$1 = x^2 + 4x^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos 120^\circ$$

$$5x^2 + 2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{7}$$

$$x > 0 \text{ より } x = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\text{また } |\vec{PC}| = 2|\vec{PB}| \text{ となる}$$

$$\underline{|\vec{PA}| = \frac{1}{\sqrt{7}}, |\vec{PB}| = \frac{2}{\sqrt{7}}, |\vec{PC}| = \frac{4}{\sqrt{7}}}$$

点Pは
 $\triangle ABC$ のフェルマ点

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件

$(\cos \theta) \overrightarrow{OA} + (\sin \theta) \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が垂直であることを証明せよ。

(2) $|\overrightarrow{CA}|, |\overrightarrow{CB}|$ を $\frac{\theta}{2}$ を用いて表せ。

(3) $\triangle ABC$ の周の長さ $AB + BC + CA$ を最大にする θ の値を求めよ。

(2012 広島大)

(1) (証明)

$$(\cos \theta) \overrightarrow{OA} + (\sin \theta) \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad \text{より}$$

$$(\cos \theta) \overrightarrow{OA} + (\sin \theta) \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OC}$$

$$|(\cos \theta) \overrightarrow{OA} + (\sin \theta) \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$$

両辺を 2 乗して

$$(\cos^2 \theta) |\overrightarrow{OA}|^2 + 2(\sin \theta \cos \theta) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (\sin^2 \theta) |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2$$

ここで

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \quad \text{だから}$$

$$\cos^2 \theta + 2(\sin \theta \cos \theta) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \sin^2 \theta = 1$$

$$2(\sin \theta \cos \theta) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\sin \theta \cos \theta \neq 0 \quad \text{だから}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \quad \blacksquare$$

(2)

$$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$$

$$= (1 + \cos \theta) \overrightarrow{OA} + (\sin \theta) \overrightarrow{OB}$$

$$|\overrightarrow{CA}|^2 = (1 + \cos \theta)^2 |\overrightarrow{OA}|^2 + 2(1 + \cos \theta)(\sin \theta) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (\sin^2 \theta) |\overrightarrow{OB}|^2$$

$$= 1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 2 + 2\cos \theta$$

$$= 4 \times \frac{1 + \cos \theta}{2}$$

$$= 4 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$|\overrightarrow{CA}| > 0 \quad \text{より} \quad \underline{\underline{|\overrightarrow{CA}| = 2 \cos \frac{\theta}{2}}}$$

$$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$$

$$= (\cos \theta) \overrightarrow{OA} + (1 + \sin \theta) \overrightarrow{OB}$$

$$|\overrightarrow{CB}|^2 = (\cos^2 \theta) |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\cos \theta(1 + \sin \theta) \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + (1 + \sin \theta)^2 |\overrightarrow{OB}|^2$$

$$= \cos^2 \theta + 1 + 2\sin \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 2 + 2\sin \theta$$

$$= 2(1 + \sin \theta)$$

$$= 2 \left(1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CB}|^2 &= 2 \left(\sin \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \right)^2 \\ &= 2 \left(\sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)^2 \\ &= 4 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

ここで

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad \text{より} \quad \frac{\pi}{4} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$$

だから, $|\overrightarrow{CB}| > 0$ だから

$$\underline{\underline{|\overrightarrow{CB}| = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}}$$

(3)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\overrightarrow{OA}|^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 2 \\ |\overrightarrow{AB}| &> 0 \quad \text{だから} \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$AB + BC + CA$$

$$= \sqrt{2} + 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

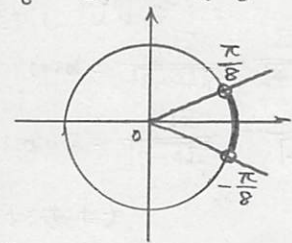
$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) + 2 \cos \frac{\theta}{2} + \sqrt{2}$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) + 2 \cos \frac{\theta}{2} + \sqrt{2}$$

$$= 2 \times 2 \cos \frac{\pi}{8} \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) + \sqrt{2}$$

$$= 4 \cos \frac{\pi}{8} \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) + \sqrt{2}$$

$$\left[\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \text{ が } 0 \text{ になる! } \left(-\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{8} \right) \right]$$



$$\therefore \frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} = 0 \quad \text{が最大}$$

$$\text{つまり} \quad \underline{\underline{\theta = \frac{\pi}{4}}}$$