

3点O, A, Bは同一直線上にないとする。次の場合について $\vec{OP} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$ で表される点Pの存在する範囲を図示せよ。

(1) $\alpha + \beta = 2, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$

(2) $\alpha = 0, -1 \leq \beta \leq 1$

(3) $\alpha + 2\beta \leq 2, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$

(1)

$\alpha + \beta = 2, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ より

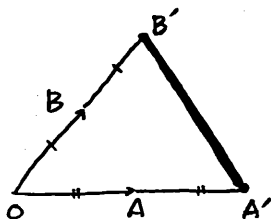
$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 1, \frac{\alpha}{2} \geq 0, \frac{\beta}{2} \geq 0$

$\vec{OP} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$

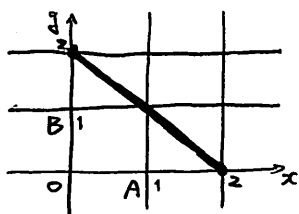
$= \frac{\alpha}{2}(2\vec{OA}) + \frac{\beta}{2}(2\vec{OB})$

$2\vec{OA} = \vec{OA'}, 2\vec{OB} = \vec{OB'}$ とおくと

点Pの存在範囲は線分A'B'



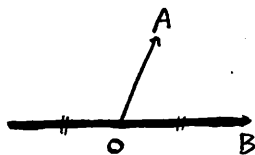
$x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0$



(2)

$\alpha = 0$ より

$\vec{OP} = \beta\vec{OB} \quad (-1 \leq \beta \leq 1)$



(3)

$\alpha + 2\beta \leq 2, \alpha \geq 0, \beta \geq 0$ より

$\frac{\alpha}{2} + \beta \leq 1, \frac{\alpha}{2} \geq 0, \beta \geq 0$

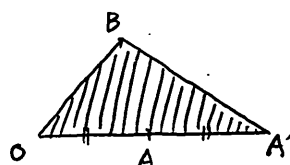
$\vec{OP} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$

$= \frac{\alpha}{2}(2\vec{OA}) + \beta\vec{OB}$

$2\vec{OA} = \vec{OA'}$ とおくと

点Pの存在範囲は

$\triangle OA'B$ の内部及び周

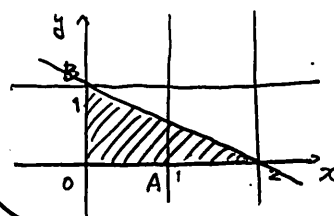


よって、図の斜線部

ただし、境界も含む。

$x + 2y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$

$(y \leq -\frac{1}{2}x + 1)$



- (1) 平面上に2つの定点 $O(0, 0)$, $C(4, 3)$ と動点 P がある。 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ とする。点 P が $|\vec{p} - \vec{c}| \leq 1$ を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を図示せよ。また、 $|\vec{p}|$ の最大値を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0$ を満たす平面上の点 P の軌跡は、どんな図形になるか。

(1)

$$|\vec{p} - \vec{c}| \leq 1 \quad \text{より}$$

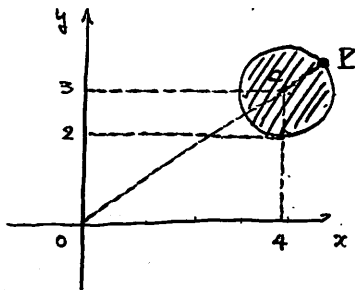
$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC}| \leq 1$$

$$|\overrightarrow{CP}| \leq 1$$

よって、

点 P の存在範囲は

点 C を中心とする半径1の円の内部及び周



よって、

図の斜線部

ただし、境界を含む。

 $|\vec{p}|$ が最大となるのは

3点 O, C, P がこの順に一直線上になるときである。

 $OC = 5$ であることとあわせて。

$$\text{Max } |\vec{p}| = 5 + 1 = 6$$

(2) 解法1

(i) $\overrightarrow{OP} \neq \vec{0}$ かつ $\overrightarrow{AP} \neq \vec{0}$ のとき。

$$\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0 \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AP}$$

$$\angle OPA = 90^\circ$$

よって

点 P の軌跡は線分 OA を直径の両端とする円ただし、2点 O, A を除く。(ii) $\overrightarrow{OP} = \vec{0}$ のとき。点 P は点 O と一致する。(iii) $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ のとき点 P は点 A と一致する。

(i) ~ (iii) より

点 P の軌跡は線分 OA を直径の両端とする円

(2) 解法2

$$\overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) = 0$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 - \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$$

$$|\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 = 0$$

$$|\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2$$

よって

$$|\overrightarrow{OP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$$

よって

点 P の軌跡は線分 OA の中点を中心とする半径 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|$ の円

つまり

線分 OA を直径の両端とする円

平面上の3点O, A, Bが $|\vec{OA}|=1$, $|\vec{OA}-\vec{OB}|=\sqrt{3}$, $|\vec{OA}+\vec{OB}|=\sqrt{7}$ を満たしている。 $1 \leq k \leq 2$ を満たす実数kを用いて点Pを $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$, $s+2t=k$, $s \geq 0$, $t \geq 0$ と定めるとき、点Pの存在範囲の面積を求めよ。

(2016 福岡大)

解法1

$$|\vec{OA}-\vec{OB}|=\sqrt{3}$$

∴両辺を2乗して

$$|\vec{OA}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 3$$

$$1 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 3$$

$$-2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 2 \quad \text{--- ①}$$

$$|\vec{OA}+\vec{OB}|=\sqrt{7}$$

∴両辺を2乗して

$$|\vec{OA}|^2 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 7$$

$$1 + 2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 7$$

$$2\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2 = 6 \quad \text{--- ②}$$

①, ②より $|\vec{OB}| \geq 0$ に注意して解くと

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1, \quad |\vec{OB}| = 2$$

∴このとき

$$S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \sqrt{1 \times 4 - 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

∴ここで

$$s+2t=k, \quad s \geq 0, t \geq 0$$

$$1 \leq k \leq 2 \quad \text{より}$$

$$\frac{s}{k} + \frac{2t}{k} = 1, \quad \frac{s}{k} \geq 0, \frac{2t}{k} \geq 0$$

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$$

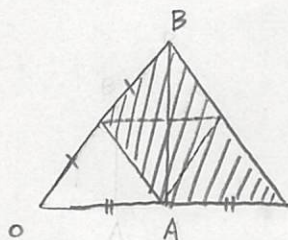
$$= \frac{s}{k}(k\vec{OA}) + \frac{2t}{k}\left(\frac{k}{2}\vec{OB}\right)$$

$$k\vec{OA} = \vec{OA'}, \quad \frac{k}{2}\vec{OB} = \vec{OB'} \quad \text{とおく}$$

kを固定したときに

点Pは線分A'B'上を動く

$1 \leq k \leq 2$ で動くとき



点Pの存在範囲は

図の斜線部

ただし、境界を含む

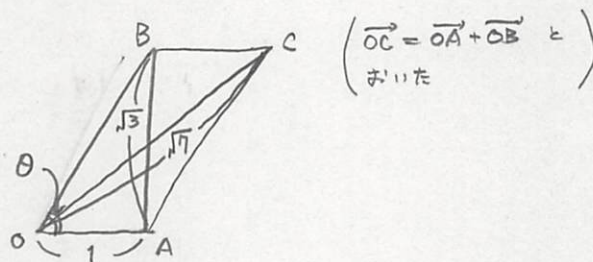
このとき、求める面積Sは

$$S = \left\{ \frac{1}{2} S(\triangle OAB) \right\} \times 3$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

解法2

$$|\vec{OA}|=1, \quad |\vec{OA}-\vec{OB}|=\sqrt{3}, \quad |\vec{OA}+\vec{OB}|=\sqrt{7} \quad \text{より}$$



□OACBは平行四辺形であり

$$\angle AOB = \theta \quad \text{とおくと} \quad \angle OAC = 180^\circ - \theta$$

△OABで余弦定理より

$$3 = OB^2 + 1 - 2 \cdot OB \cdot 1 \cdot \cos \theta$$

$$OB^2 - 2OB \cos \theta = 2$$

△OACで余弦定理より

$$7 = 1 + AC^2 - 2 \cdot 1 \cdot AC \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

$$AC = OB \quad \text{より}$$

$$OB^2 + 2OB \cos \theta = 6$$

∴

$$OB = 2, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}$$

つまり

$$OB = 2, \quad \theta = 60^\circ$$

∴

$$\triangle OAB \text{ は } \angle OAB = 90^\circ$$

∴直角三角形であり

$$S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

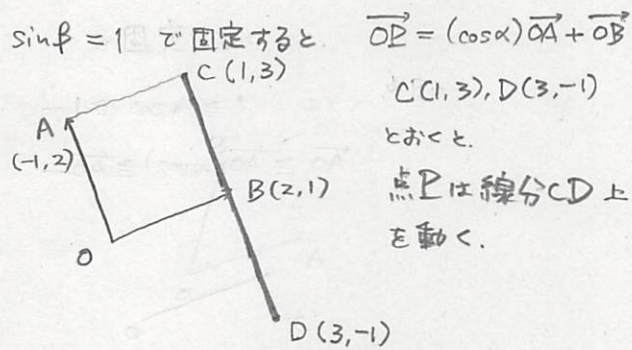
(あとは同じ)

xy 平面上に4点 $O(0, 0)$, $A(-1, 2)$, $B(2, 1)$, $P(u, v)$ がある。点 P が

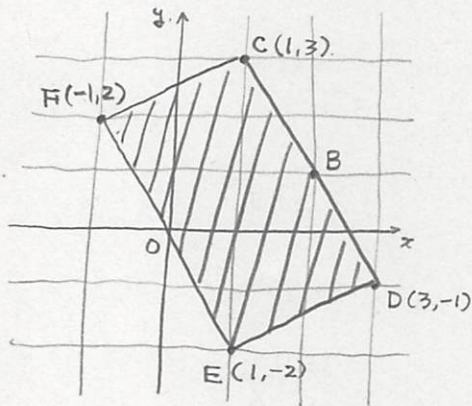
$$\overrightarrow{OP} = (\cos \alpha) \overrightarrow{OA} + (\sin \beta) \overrightarrow{OB} \quad (\text{ただし, } 0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi)$$

を満たすとき、点 P の存在する領域を図示せよ。

(2013 信州大)



$0 \leq \sin \beta \leq 1$ で動かすと、



$E(1, -2), F(-1, 2)$ とおくと

点 P の存在領域は

$\square CDEF$ の内部及び周

Oを原点とする座標平面に点A(2, 1)と点B(1, -2)をとる。実数 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$)に対して点Pは

$\overrightarrow{OP} = (\cos \theta) \overrightarrow{OA} + (1 - \sin \theta) \overrightarrow{OB}$ を満たすものとする。

(1) θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす値をとって変化するとき、点Pの軌跡を求めよ。

(2) 内積 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の最大値と、そのときの θ の値を求めよ。

(2013 同志社大)

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (\cos \theta) \overrightarrow{OA} + (1 - \sin \theta) \overrightarrow{OB} \\ &= (\cos \theta)(2, 1) + (1 - \sin \theta)(1, -2) \\ &= (2\cos \theta, \cos \theta) + (1 - \sin \theta, -2 + 2\sin \theta) \\ &= (2\cos \theta - \sin \theta + 1, \cos \theta + 2\sin \theta - 2)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OP} = (x, y) \text{ とおくと}$$

$$\begin{cases} x = 2\cos \theta - \sin \theta + 1 \\ y = \cos \theta + 2\sin \theta - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{2x+y}{5} \\ \sin \theta = \frac{-x+2y+5}{5} \end{cases}$$

ここで

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{ より } -1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ より}$$

$$-1 \leq \frac{2x+y}{5} \leq 1 \text{ より } -1 \leq \frac{-x+2y+5}{5} \leq 1$$

$$\begin{cases} -2x-5 \leq y \leq -2x+5 \\ \frac{1}{2}x-5 \leq y \leq \frac{1}{2}x+5 \end{cases} \quad \text{--- ①}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ より}$$

$$\left(\frac{-x+2y+5}{5}\right)^2 + \left(\frac{2x+y}{5}\right)^2 = 1$$

$$\begin{aligned}x^2 + 4y^2 + 25 - 4xy + 20y - 10x \\ + 4x^2 + 4xy + y^2 = 25\end{aligned}$$

$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 20y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

これは ① を満たしている。

$P(x, y)$ は

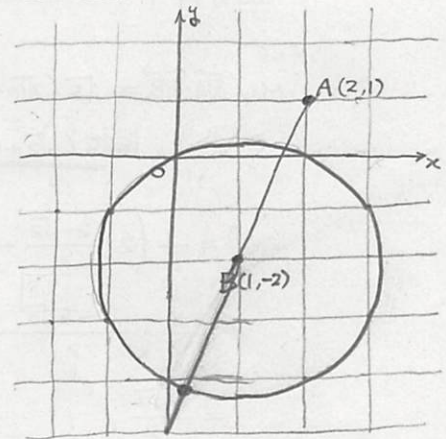
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

を満たすので

求める点Pの軌跡は

$$\text{円 } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

(2) 解法1



$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PB}| \cos \varphi$$

$$= \sqrt{5} |\overrightarrow{PA}| \cos \varphi$$

(ただし、 φ は $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ のなす角)

$$\text{直線 AB: } y = 3x - 5$$

$$\text{円 } (x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

と連立して

$$(x-1)^2 + (3x-3)^2 = 5$$

$$10(x-1)^2 = 5$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}$$

$$x-1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$x < 1 \text{ のとき } x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

このとき

$$y = 3 \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2} - 5$$

$$= \frac{-4 - 3\sqrt{2}}{2}$$

(裏に続く)

よ、2

$$\vec{OP} = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-4-3\sqrt{2}}{2} \right) \text{ とき最大}$$

2あり.

$$\begin{cases} AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \\ BP = \sqrt{5} \end{cases}$$

よ、1)

$$|\vec{PA}| = \sqrt{10} + \sqrt{5}$$

$$\cos \varphi = 1$$

よ、2

$$\begin{aligned} \text{Max } \vec{PA} \cdot \vec{PB} &= \sqrt{5}(\sqrt{10} + \sqrt{5}) \cdot 1 \\ &= \underline{\underline{5(\sqrt{2} + 1)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{5} \left(2 \times \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{-4-3\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{-5\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{5} \left(-\frac{2-\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{-4-3\sqrt{2}}{2} + 5 \right) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{-5\sqrt{2}}{2} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

よ、1)

$$\theta = \underline{\underline{\frac{5\pi}{4}}}$$

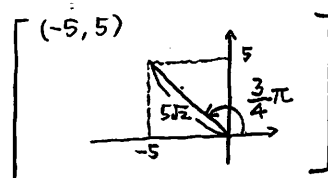
(2) **解法2**

$$\begin{aligned} \vec{PA} \cdot \vec{PB} &= (\vec{PB} + \vec{BA}) \cdot \vec{PB} \\ &= |\vec{PB}|^2 + \vec{BA} \cdot \vec{PB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= -\vec{OB} + \vec{OA} \\ &= (-1, 2) + (2, 1) \\ &= (1, 3) \\ \vec{PB} &= -\vec{OP} + \vec{OB} \\ &= (-2\cos\theta + \sin\theta - 1, -\cos\theta - 2\sin\theta + 2) + (1, -2) \\ &= (-2\cos\theta + \sin\theta, -\cos\theta - 2\sin\theta) \end{aligned}$$

また、
 $|\vec{PB}| = \sqrt{5}$
 よ、1)

$$\begin{aligned} \vec{PA} \cdot \vec{PB} &= 5 + (1, 3) \cdot (-2\cos\theta + \sin\theta, -\cos\theta - 2\sin\theta) \\ &= 5 - 2\cos\theta + \sin\theta - 3\cos\theta - 6\sin\theta \\ &= \underline{\underline{-5\cos\theta - 5\sin\theta + 5}} \end{aligned}$$



$$= 5\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{3\pi}{4}) + 5$$

$$-1 \leq \cos(\theta + \frac{3\pi}{4}) \leq 1 \quad \text{よ、1)}$$

$$-5\sqrt{2} + 5 \leq 5\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{3\pi}{4}) + 5 \leq 5\sqrt{2} + 5$$

最大となるのは

$$\theta + \frac{3\pi}{4} = 2\pi$$

$$\text{よ、2)} \quad \theta = \underline{\underline{\frac{5\pi}{4}}} \quad \text{とき}$$

$$\text{Max } \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \underline{\underline{5\sqrt{2} + 5}}$$

平面上の $\triangle ABC$ は、 $AB=2$ 、 $AC=3$ 、 $\angle BAC=60^\circ$ を満たしている。また、平面上の動点 P に対し実数 $f(P)$ を
 $f(P) = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AP}$ で定める。

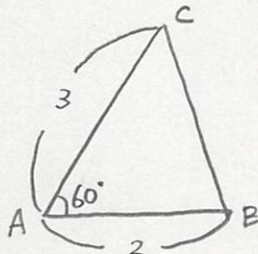
(1) $\triangle ABC$ の重心を G とすると、 $f(G)$ の値を求めよ。

(2) $f(P) = \frac{8}{3}$ となる点 P の全体は円になることを示せ。

(3) 点 P が平面全体を動くとき、 $f(P)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2016 香川大)

(1)



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 3$$

$$\begin{aligned} f(P) &= \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{AP} \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}) + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}) \cdot (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}) \\ &\quad + (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{AP} \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AP} \cdot (3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) + 3 \end{aligned}$$

ここで

点 G は $\triangle ABC$ の重心なので

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

$$\begin{aligned} f(G) &= \overrightarrow{AG} \cdot (3\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) + 3 \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \cdot (-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) + 3 \\ &= -\frac{1}{3}(|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2) + 3 \\ &= -\frac{1}{3}(9 + 6 + 4) + 3 \\ &= -\frac{19}{3} + 3 \\ &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

(2) 証明

$$f(P) = \frac{8}{3} \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot (3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) + 3 = \frac{8}{3}$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 - \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP} + \frac{1}{9} = 0$$

$$\left| \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \right|^2 - \left| \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \right|^2 + \frac{1}{9} = 0$$

$$\left| \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \right|^2 = \frac{1}{9}(|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{9}(4 + 6 + 9 - 1)$$

$$= \frac{18}{9}$$

$$= 2$$

よって

$$|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG}| = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{GP}| = \sqrt{2}$$

つまり

点 P の全体は

点 G を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円である

$$\begin{aligned} (3) \quad f(P) &= \overrightarrow{AP} \cdot (3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) + 3 \\ &= 3 \left\{ |\overrightarrow{AP}|^2 - \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP} \right\} + 3 \\ &= 3 \left\{ \left| \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \right|^2 - \left| \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \right|^2 \right\} + 3 \\ &= 3 \left| \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG} \right|^2 - \frac{|\overrightarrow{AB}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2}{3} + 3 \\ &= 3|\overrightarrow{GP}|^2 - \frac{9 + 6 + 4}{3} + 3 \\ &= 3|\overrightarrow{GP}|^2 - \frac{10}{3} \end{aligned}$$

よって

$$\underline{\underline{f(P) \geq -\frac{10}{3}}}$$

座標平面において、 $\triangle ABC$ は $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ を満たしている。この平面上の点 P が条件

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ を満たすとき、 P はどのような図形上の点であるか。その図形を描け。

(岡山 理科大)

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \quad \text{より}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

このとき

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}) + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}) \cdot (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}) \\ + (-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP}) \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \end{aligned}$$

$$3|\overrightarrow{AP}|^2 + (-2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 - \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP} = 0$$

$$\left| \overrightarrow{AP} - \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \right|^2 - \left| \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \right|^2 = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ \triangle ABC \text{ の重心 } G \text{ とし} \\ \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \\ = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} \end{array} \right)$$

$$|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AG}|^2 = |\overrightarrow{AG}|^2$$

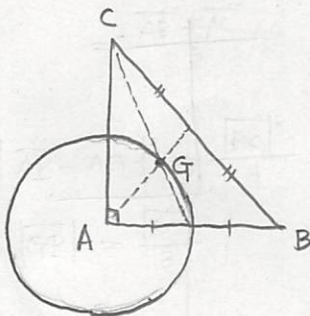
$$|\overrightarrow{GP}|^2 = |\overrightarrow{GA}|^2$$

$$\therefore |\overrightarrow{GP}| = |\overrightarrow{GA}|$$

つまり

点 P の軌跡は

点 G を中心とする半径 GA の円



O を原点とする座標平面上の曲線 $y=x^2$ 上の2点 A, B に対し, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t$ とおく。

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $t=2$ のとき, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ となる点 P の軌跡を求め, 図示せよ。

(2002 名古屋大)

(1)

$$\overrightarrow{OA} = (a, a^2), \overrightarrow{OB} = (b, b^2) \quad \text{とおく}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t \quad \text{より}$$

$$ab + a^2b^2 = t$$

$$t = (ab + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

ab はすべて実数 ε とるので

$$\underline{\underline{t \geq -\frac{1}{4}}}$$

(2)

$$t=2 \quad \text{のとき}$$

$$a^2b^2 + ab = 2$$

$$a^2b^2 + ab - 2 = 0$$

$$(ab+2)(ab-1) = 0$$

$$ab = -2, 1$$

$$\overrightarrow{OP} = (x, y) \quad \text{とおく}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$= (a, a^2) + (b, b^2)$$

$$= (a+b, a^2+b^2)$$

$$= (a+b, (a+b)^2 - 2ab)$$

$$\begin{cases} x = a+b \\ y = (a+b)^2 - 2ab \end{cases}$$

a, b は

$$s^2 - xs + ab = 0$$

の2解であり,

a, b は実数 なるため

判別式 $D \geq 0$

$$D = x^2 - 4ab \geq 0$$

$$i) ab = -2 \quad \text{のとき}$$

$$x^2 + 8 \geq 0$$

すべて x について成り立つ。

このとき

$$y = x^2 + 4$$

$F(x, y)$ は

$$y = x^2 + 4 \quad \varepsilon \text{ 満たす}$$

$$ii) ab = 1 \quad \text{のとき}$$

$$x^2 - 4 \geq 0$$

$$x \leq -2, 2 \leq x$$

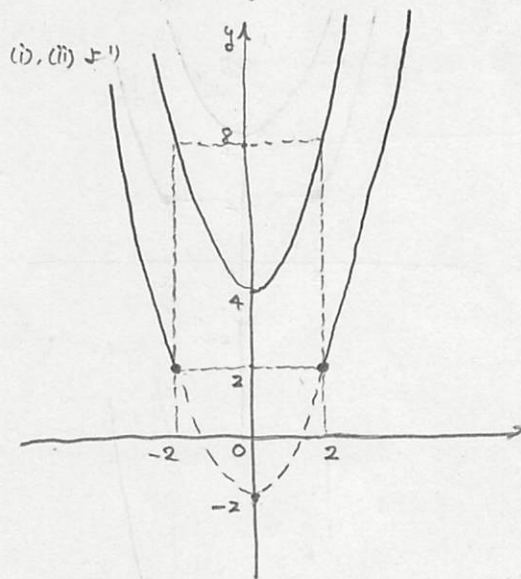
このとき

$$y = x^2 - 2$$

$F(x, y)$ は

$$y = x^2 - 2 \quad (x \leq -2, 2 \leq x)$$

ε 満たす。



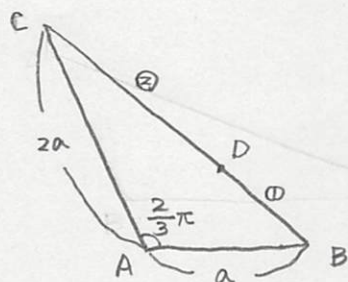
a を正の定数とする。 $AB=a$, $AC=2a$, $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$ である $\triangle ABC$ と, $|\overrightarrow{2AP}-\overrightarrow{2BP}-\overrightarrow{CP}|=a$ を満たす動点 P がある。

(1) 辺 BC を $1:2$ に内分する点を D とするとき, $|\overrightarrow{AD}|$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{AP}|$ の最大値を求めよ。

(3) 線分 AP が通過してできる図形の面積 S を求めよ。

(2014 旭川医科大学)



(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= \frac{2\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}}{1+2} \\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで} \\ |\overrightarrow{AB}| = a, |\overrightarrow{AC}| = 2a \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot 2a \cdot \cos \frac{2}{3}\pi \\ = -a^2 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AD}|^2 &= \frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}|\overrightarrow{AC}|^2 \\ &= \frac{4}{9}a^2 - \frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{9}a^2 \\ &= \frac{4}{9}a^2\end{aligned}$$

$$|\overrightarrow{AD}| > 0 \quad \text{だから}$$

$$\underline{\underline{|\overrightarrow{AD}| = \frac{2}{3}a}}$$

(2)

$$|\overrightarrow{2AP} - \overrightarrow{2BP} - \overrightarrow{CP}| = a$$

$$|\overrightarrow{2AP} - 2(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}) - (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AP})| = a$$

$$|-\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a$$

$$|\overrightarrow{AP} - (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})| = a$$

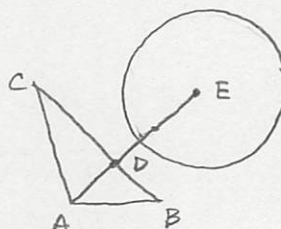
$$|\overrightarrow{AP} - 3 \times \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}| = a$$

$$|\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AD}| = a$$

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AD} \quad \text{とおく。}$$

$$|\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AE}| = a$$

$$|\overrightarrow{EP}| = a$$



よて、

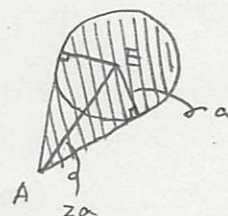
点 P は 点 E を中心とする
半径 a の円周上を動く。

3点 A, E, P がこの順に一直線上
にあるとき $|\overrightarrow{AP}|$ は最大となり。

このとき

$$\begin{aligned}\text{Max } |\overrightarrow{AP}| &= |\overrightarrow{AE}| + a \\ &= 3|\overrightarrow{AD}| + a \\ &= 2a + a \\ &= \underline{\underline{3a}}\end{aligned}$$

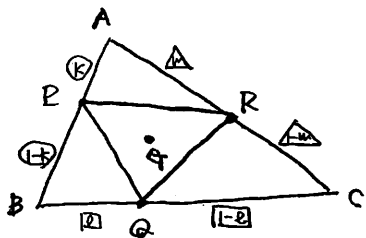
(3)



線分 AP の通過領域は図の斜線部であり

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times 2 + \left(\frac{1}{2} \times a^2 \times \frac{4}{3}\pi \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \times 2 + \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{4}{3}\pi \\ &= \underline{\underline{\left(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \right) a^2}}\end{aligned}$$

$\triangle ABC$ に対し、辺 AB 上に点 P を、辺 BC 上に点 Q を、辺 CA 上に点 R を、頂点とは異なるようにとる。この3点がそれぞれの辺上を動くとき、この3点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。



$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AQ} = \frac{(1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC}}{l + (1-l)} = (1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AR} = m \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$(0 < k < 1, 0 < l < 1, 0 < m < 1)$

とおく。

$\triangle PQR$ の重心 G とし

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} &= \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}}{3} \\ &= \frac{k}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{1-l}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{l}{3} \overrightarrow{AC} + \frac{m}{3} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{l}{3} (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{m}{3} \overrightarrow{AC} \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{l}{3} \overrightarrow{BC} + \frac{m}{3} \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

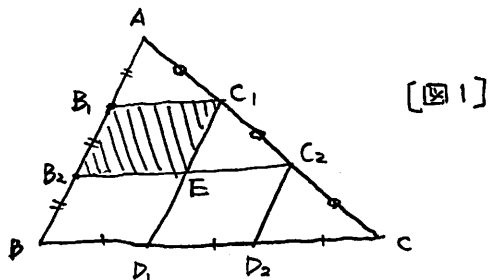


図2のように点 $B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E$ とおくと。

$$\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \quad (2' \text{あり})$$

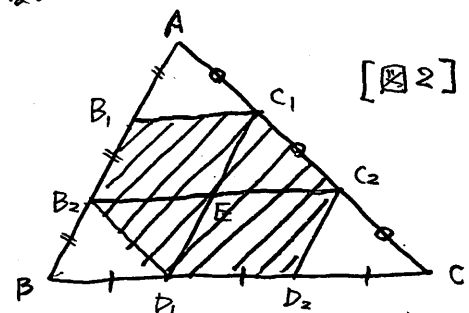
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AS} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{k}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{l}{3} \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB_1} + \frac{k}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{l}{3} \overrightarrow{BC} \quad (0 < k < 1, 0 < l < 1) \end{aligned}$$

とおくと。

点 S が動く範囲は [図1] の斜線部
ただし、境界を含まない。

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AS} + \frac{m}{3} \overrightarrow{AC} \quad (0 < m < 1)$$

なので



重心 G の動く範囲は [図2] の斜線部
ただし、境界を含まない。