

3点A(0, 1, 1), B(-1, -1, 2), C(2, 3, 1)を頂点とする△ABCの面積を求めよ。

$$\vec{OA} = (0, 1, 1), \vec{OB} = (-1, -1, 2), \vec{OC} = (2, 3, 1)$$

$$\begin{cases} \vec{AB} = -\vec{OA} + \vec{OB} \\ \quad = (0, -1, -1) + (-1, -1, 2) \\ \quad = (-1, -2, 1) \\ \vec{AC} = -\vec{OA} + \vec{OC} \\ \quad = (0, -1, -1) + (2, 3, 1) \\ \quad = (2, 2, 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\vec{AB}| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \\ |\vec{AC}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2-4 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \times 8 - 36} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{12} \\ &= \underline{\underline{\sqrt{3}}} \end{aligned}$$

座標空間内の同一平面上にある4点 $O(0, 0, 0)$, $A(4, a, b)$, $B(2, 3, 2)$, $C(0, 5, 1)$ が $\angle AOB = 90^\circ$ を満たすとき、実数 a, b の値を求めよ。

4点 $OABC$ が同一平面上にあるので

$$\vec{OA} = s\vec{OB} + t\vec{OC} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

とでき

$$(4, a, b) = s(2, 3, 2) + t(0, 5, 1)$$

$$(4, a, b) = (2s, 3s, 2s) + (0, 5t, t)$$

$$(4, a, b) = (2s, 3s+5t, 2s+t)$$

よって

$$\begin{cases} 4 = 2s \\ a = 3s+5t \\ b = 2s+t \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2 \\ a = 6+5t \\ b = 4+t \end{cases} \quad \text{--- ①}$$

また

$$\angle AOB = 90^\circ \text{ より}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$$

$$(4, a, b) \cdot (2, 3, 2) = 0$$

$$8 + 3a + 2b = 0$$

① を代入して

$$8 + 18 + 15t + 8 + 2t = 0$$

$$17t = -34$$

$$t = -2$$

よって

$$s = 2, t = -2, \underline{\underline{a = -4, b = 2}}$$

点 $(-5, 3, 3)$ を通り $\vec{l}=(1, -2, 2)$ に平行な直線 l と、点 $(0, 3, 2)$ を通り $\vec{m}=(3, 4, -5)$ に平行な直線 m について

(1) 2直線の交点の座標を求めよ。

(2) 2直線のなす角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)を求めよ。

(1)

交点 P として

l 上にあるので

$$\vec{OP} = (-5, 3, 3) + s(1, -2, 2)$$

$$= (-5+s, 3-2s, 3+2s) \quad \text{--- ①}$$

m 上にあるので

$$\vec{OP} = (0, 3, 2) + t(3, 4, -5)$$

$$= (3t, 3+4t, 2-5t) \quad \text{--- ②}$$

$$\text{①} = \text{②} \text{ より}$$

$$\begin{cases} -5+s=3t \\ 3-2s=3+4t \\ 3+2s=2-5t \end{cases}$$

これを解いて

$$s=2, t=-1$$

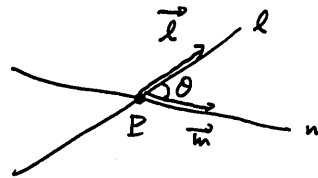
このとき ① より

$$\vec{OP} = (-3, -1, 7)$$

つまり

$$\underline{\underline{\text{交点 } (-3, -1, 7)}}$$

(2)



$$|\vec{l}| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$|\vec{m}| = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2}$$

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = 3 - 8 - 10 = -15$$

よ) $\vec{l}$ と $\vec{m}$ のなす角 φ として

$$\vec{l} \cdot \vec{m} = |\vec{l}| |\vec{m}| \cos \varphi \quad \text{から}$$

$$-15 = 3 \times 5\sqrt{2} \times \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ \text{ で}$$

$$\varphi = 135^\circ$$

よ、

$$\underline{\underline{\theta = 45^\circ}}$$

点 $O(0, 0, 0)$ を原点とする座標空間の点 $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(1, 1, \sqrt{6})$ について、直線 AB 上の点を P , 直線 OC 上の点を Q とする。

(1) 直線 AB と直線 OC が交わらないことを証明せよ。

(2) 2点 P, Q の距離 PQ の最小値を求め、そのときの点 P および点 Q の座標を求めよ。 (2014 立命館大)

(1) 証明

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\ = (-4, 0, 0) + (0, 4, 0) \\ = (-4, 4, 0) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} \quad (k \in \mathbb{R}) \\ &= (4, 0, 0) + k(-4, 4, 0) \\ &= (4 - 4k, 4k, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= l\overrightarrow{OC} \quad (l \in \mathbb{R}) \\ &= l(1, 1, \sqrt{6}) \\ &= (l, l, \sqrt{6}l) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} \quad \text{と仮定すると}$$

$$\begin{cases} 4 - 4k = l & \text{--- ①} \\ 4k = l & \text{--- ②} \\ 0 = \sqrt{6}l & \text{--- ③} \end{cases}$$

③ より $l = 0$

② より $k = 0$

これは ① を満たさない。

つまり 直線 AB と 直線 OC は交わらない。 ■

(2) 解法1

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \\ &= (-4 + 4k, -4k, 0) + (l, l, \sqrt{6}l) \\ &= (4k + l - 4, -4k + l, \sqrt{6}l) \\ |\overrightarrow{PQ}|^2 &= (4k + l - 4)^2 + (-4k + l)^2 + 6l^2 \\ &= 16k^2 + l^2 + 16 + 8kl - 8l - 32k \\ &\quad + 16k^2 - 8kl + l^2 + 6l^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= 32k^2 - 32k + 8l^2 - 8l + 16 \\ &= 32\left\{k^2 - k\right\} + 8\left\{l^2 - l\right\} + 16 \\ &= 32\left\{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} + 8\left\{\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} + 16 \\ &= 32\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - 8 + 8\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 - 2 + 16 \\ &= 32\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(l - \frac{1}{2}\right)^2 + 6 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{PQ}|^2$ が 最小 となるとき

$|\overrightarrow{PQ}|$ も 最小 であり。

$$k = \frac{1}{2}, l = \frac{1}{2} \quad \text{のとき}$$

$$\min |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{6}$$

このとき

$$\underline{\underline{P(2, 2, 0), Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)}}$$

(2) 解法2

PQ が 最小 となるのは

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{かつ} \quad \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OC}$$

のときであり

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 & \text{--- ④} \\ \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OC} = 0 & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{PQ} = (4k + l - 4, -4k + l, \sqrt{6}l) \\ \overrightarrow{AB} = (-4, 4, 0) \\ \overrightarrow{OC} = (1, 1, \sqrt{6}) \end{pmatrix}$$

④ より

$$\begin{aligned} -4(4k + l - 4) + 4(-4k + l) &= 0 \\ -8k + 4 &= 0 \\ k &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

⑤ より

$$\begin{aligned} (4k + l - 4) + (-4k + l) + 6l &= 0 \\ 8l - 4 &= 0 \\ l &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore P(2, 2, 0), Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$\text{このとき} \quad \min |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \sqrt{6}$$

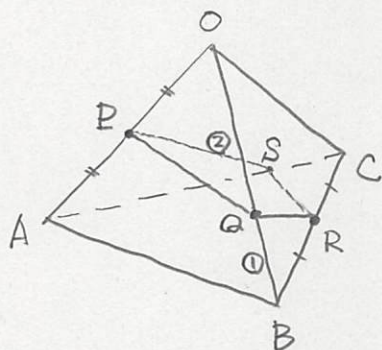
四面体 OABC において、P を辺 OA の中点、Q を辺 OB を 2:1 に内分する点、R を辺 BC の中点とする。P、Q、R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ 、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{PQ}$ 、 $\overrightarrow{PR}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 比 $|\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SC}|$ を求めよ。

(3) 四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とすると、 $|\overrightarrow{QS}|$ を求めよ。

(2016 神戸大)



(1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a} \\ \overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{b} \\ \overrightarrow{OR} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

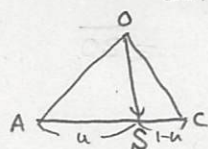
$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OR} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

(2)

点 S は平面 PQR 上より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \overrightarrow{OP} + (s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + s\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &\quad + t\left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t\right)\vec{a} \\ &\quad + \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2}t\right)\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

点 S は直線 AC 上より



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \frac{(1-u)\overrightarrow{OA} + u\overrightarrow{OC}}{u + (1-u)} \\ &= (1-u)\vec{a} + u\vec{c} \quad \text{--- ②} \end{aligned}$$

①=② から、 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立だから

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t = 1-u \\ \frac{2}{3}s + \frac{1}{2}t = 0 \\ \frac{1}{2}t = u \end{cases}$$

これを解いて

$$s = -1, t = \frac{4}{3}, u = \frac{2}{3}$$

よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AS}| : |\overrightarrow{SC}| &= \frac{2}{3} : \frac{1}{3} \\ &= \underline{\underline{2:1}} \end{aligned}$$

(2) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 1$$

(3) より

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

だから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QS} &= -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OS} \\ &= -\frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{QS}|^2 &= \frac{1}{9}(|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\vec{b} \cdot \vec{c} + 4\vec{c} \cdot \vec{a}) \\ &= \frac{1}{9}(1 + 4 + 4 - 2 - 4 + 2) \\ &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

よって

$$|\overrightarrow{QS}| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{5}}{3}}}$$

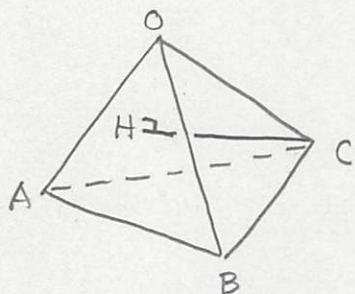
四面体 OABC において、 $OA=OB=OC=1$ とする。 $\angle AOB=60^\circ$, $\angle BOC=45^\circ$, $\angle COA=45^\circ$ とし、 $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き、その交点を H とする。

- (1) $\vec{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (2) CH の長さを求めよ。
- (3) 四面体 OABC の体積を求めよ。

(2013 東北大)

(1)

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



点 H は平面 OAB 上より

$$\vec{OH} = s\vec{a} + t\vec{b} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

とてき

 $\vec{CH} \perp$ 平面 OAB より

$$\begin{cases} \vec{CH} \cdot \vec{OA} = 0 & \text{--- ①} \\ \vec{CH} \cdot \vec{OB} = 0 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \text{--- ①} \\ \vec{CH} = -\vec{OC} + \vec{OH} \\ = s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c} \end{pmatrix}$$

① より

$$(s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0$$

$$s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$$

$$s + \frac{1}{2}t - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$2s + t - \sqrt{2} = 0 \quad \text{--- ①'}$$

② より

$$(s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\frac{1}{2}s + t - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$s + 2t - \sqrt{2} = 0 \quad \text{--- ②'}$$

$$\text{①', ②' より} \\ s = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad t = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって} \\ \vec{OH} = \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$$

(2)

$$|\vec{CH}|^2 = \vec{CH} \cdot \vec{CO}$$

$$\begin{pmatrix} \text{--- ①} \\ \vec{CH} = -\vec{OC} + \vec{OH} \\ = \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b} - \vec{c} \\ \vec{CO} = -\vec{c} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{CH}|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot (-\vec{c})$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{\sqrt{2}}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{1}{3}$$

よって

$$\underline{\underline{CH = \frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

(3)

$$S(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって

$$V(OABC) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

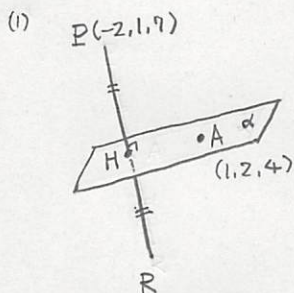
$$= \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

点A(1, 2, 4)を通り、ベクトル $\vec{n}=(-3, 1, 2)$ に垂直な平面を α とする。平面 α に関して同じ側に2点P(-2, 1, 7), Q(1, 3, 7)がある。

(1) 平面 α に関して点Pと対称な点Rの座標を求めよ。

(2) 平面 α 上の点で、PS+QSを最小にする点Sの座標とそのときの最小値を求めよ。

(2012 鳥取大)



線分PRの中点H(x, y, z)とすると
点Hは平面 α 上にあるので

$$\vec{AH} \perp \vec{n} \quad \text{よって}$$

$$\vec{AH} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{AH} = -\vec{OA} + \vec{OH} \\ = (-1, -2, -4) + (x, y, z) \\ = (x-1, y-2, z-4) \\ \vec{n} = (-3, 1, 2) \end{array} \right)$$

$$-3(x-1) + (y-2) + 2(z-4) = 0$$

$$-3x + y + 2z = 7 \quad \text{--- ①}$$

$$\vec{PH} \parallel \vec{n} \quad \text{よって}$$

$$\vec{PH} = k\vec{n} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\left(\begin{array}{l} \vec{PH} = -\vec{OP} + \vec{OH} \\ = (2, -1, -7) + (x, y, z) \\ = (x+2, y-1, z-7) \end{array} \right)$$

$$(x+2, y-1, z-7) = k(-3, 1, 2)$$

$$(x+2, y-1, z-7) = (-3k, k, 2k)$$

$$\begin{cases} x+2 = -3k \\ y-1 = k \\ z-7 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3k-2 \\ y = k+1 \\ z = 2k+7 \end{cases} \quad \text{--- ②}$$

①, ②より

$$-3(-3k-2) + (k+1) + 2(2k+7) = 7$$

$$9k + 6 + k + 1 + 4k + 14 = 7$$

$$14k = -14$$

$$k = -1$$

このとき ②より

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 5 \end{cases}$$

$$\text{よって } H(1, 0, 5)$$

また、

$$\vec{OH} = \frac{\vec{OP} + \vec{OR}}{2} \quad \text{よって}$$

$$\vec{OR} = 2\vec{OH} - \vec{OP}$$

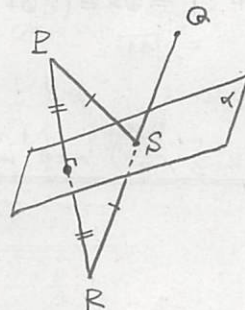
$$= (2, 0, 10) - (-2, 1, 7)$$

$$= (4, -1, 3)$$

よって

$$\underline{\underline{R(4, -1, 3)}}$$

(2)



$$PS + QS = RS + SQ \geq RQ$$

つまり、

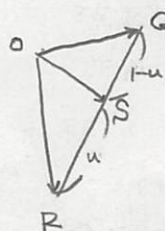
3点R, S, Qが一直線上に並んだとき最小となる。

平面 α 上の点S(x, y, z)に対し

$$-3x + y + 2z = 7 \quad \text{--- ③}$$

が成り立っており、

点Sは線分RQ上にあるので



$$\vec{OS} = \frac{(1-u)\vec{OR} + u\vec{OQ}}{u + (1-u)}$$

$$= (1-u)(4, -1, 3) + u(1, 3, 7)$$

$$= (4-4u, -1+u, 3-3u) + (u, 3u, 7u)$$

$$= (4-3u, -1+4u, 3+4u)$$

(裏に続く)

$$\begin{cases} X = 4 - 3u \\ Y = -1 + 4u \\ Z = 3 + 4u \end{cases}$$

これは ③ を満たすので

$$-3(4-3u) + (-1+4u) + 2(3+4u) = 7$$

$$-12 + 9u - 1 + 4u + 6 + 8u = 7$$

$$21u = 14$$

$$u = \frac{2}{3}$$

このとき

$$\begin{cases} X = 4 - 2 = 2 \\ Y = -1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{3} \\ Z = 3 + \frac{8}{3} = \frac{17}{3} \end{cases}$$

より $S = (2, \frac{5}{3}, \frac{17}{3})$

また:

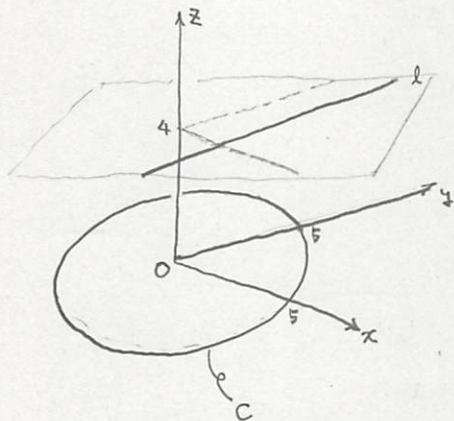
$$\begin{aligned} RQ &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16 + 16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

よって

$$\underline{\underline{S(2, \frac{5}{3}, \frac{17}{3}) \text{ において } \min(PQ + QS) = \sqrt{41}}}$$

xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に $x^2+y^2=25$ により定まる円 C があり、平面 $z=4$ の上に $x=1$ により定まる y 軸に平行な直線 ℓ がある。 C 上の点 P で、 ℓ 上の点との距離の最小値が 5 であるような P の座標をすべて求めよ。

(2007 一橋大)



$$P(5\cos\theta, 5\sin\theta, 0) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

とおくと、

点 P から ℓ 上の点との距離を d 最小となるような点 $Q(1, 5\sin\theta, 4)$

とできる。

$$PQ^2 = (5\cos\theta - 1)^2 + (-4)^2 = 5^2$$

$$(5\cos\theta - 1)^2 = 9$$

$$5\cos\theta - 1 = \pm 3$$

$$5\cos\theta = -2, 4$$

$$\cos\theta = -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\frac{2}{5} \text{ のとき } \sin\theta = \pm \frac{\sqrt{21}}{5} \\ \cos\theta = \frac{4}{5} \text{ のとき } \sin\theta = \pm \frac{3}{5} \end{cases}$$

よって

$$P(-2, \sqrt{21}, 0), (-2, -\sqrt{21}, 0),$$

$$\underline{\underline{(4, 3, 0), (4, -3, 0)}}$$

空間内に3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 3)$ をとる。

- (1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ を満たしながら動くとき、この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。
- (2) (1) の定点 Q は3点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。
- (3) (1) の P について、四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。

(2000 九州大)

(1) 証明1

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \frac{\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}}{3} = 0$$

ここで
線分 BC を $2:1$ に内分する点 D
とおくと
$$\overrightarrow{PD} = \frac{\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}}{3}$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PD} = 0$$

$$\text{すなわち } \overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PD}$$

すなわち、点 P は2点 A, D を直径の両端とする球面上を動く。

よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$$

を満たす点 Q を中心とする。

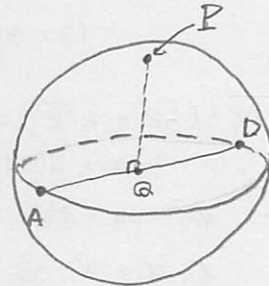
半径 $|\overrightarrow{AQ}|$ の球面上を点 P は動く。

(2) (証明)

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \quad \text{を満たすので}$$

点 Q は3点 A, B, C を含む平面上にある。

(3)



$$\overrightarrow{PQ} \perp \text{平面 } ABC$$

となるときに最大となる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (-1, 0, 3) \\ \text{よって} \\ |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10} \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(\triangle ABC) &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{5 \times 10 - 1} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &= |\overrightarrow{AQ}| \\ &= \left| \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} \right| \\ &= \frac{1}{6} |(-1, 2, 0) + 2(-1, 0, 3)| \\ &= \frac{1}{6} |(-3, 2, 6)| \\ &= \frac{1}{6} \sqrt{49} \\ &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \text{Max } V(ABCP) &= \frac{1}{3} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{6} \\ &= \frac{49}{36} \end{aligned}$$

(1) 証明2

$P(x, y, z)$ をとる.

$$\left(\begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (x-1, y, z) \\ \overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} = (x, y-2, z) + 2(x, y, z-3) \\ \quad = (3x, 3y-2, 3z-6) \end{array} \right)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0 \quad \text{となる}$$

$$(x-1) \cdot 3x + y(3y-2) + z(3z-6) = 0$$

$$3x^2 - 3x + 3y^2 - 2y + 3z^2 - 6z = 0$$

$$x^2 - x + y^2 - \frac{2}{3}y + z^2 - 2z = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (y - \frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9} + (z - 1)^2 - 1 = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 + (z - 1)^2 = \frac{49}{36}$$

よって,

動点 P は点 $Q(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1)$ を中心とする

半径 $\frac{7}{6}$ の球面上にある。

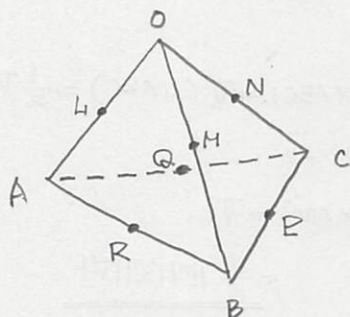
四面体OABCにおいて、 $\vec{a}=\vec{OA}$, $\vec{b}=\vec{OB}$, $\vec{c}=\vec{OC}$ とおく。線分OA, OB, OC, BC, CA, ABの中点をそれぞれ, L, M, N, P, Q, Rとし、 $\vec{p}=\vec{LP}$, $\vec{q}=\vec{MQ}$, $\vec{r}=\vec{NR}$ とおく。

(1) 線分LP, MQ, NRは1点で交わることを示せ。

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ を用いて表せ。

(3) 直線LP, MQ, NRが互いに直交するとする。Xを $\vec{AX}=\vec{LP}$ となる空間の点とすると、四面体XABCの体積を $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$ を用いて表せ。

(2001 東北大)



$$\begin{aligned}\vec{OS} &= \left\{ \frac{1}{2}\vec{c} + \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) \right\} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\vec{ON} + \vec{OR}}{2} \quad \text{なので}\end{aligned}$$

線分NRの中点にも一致する。

よって

線分LP, MQ, NRは1点で交わる。

(1) (証明)

$$\left(\begin{aligned} \vec{OL} &= \frac{1}{2}\vec{a}, \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{b}, \vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{c} \\ \vec{OP} &= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \vec{OQ} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} \\ \vec{OR} &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned} \right)$$

交点Sが存在すると仮定すると

$$L \xrightarrow{\ell} S \xrightarrow{1-\ell} P$$

$$\begin{aligned}\vec{OS} &= \frac{(1-\ell)\vec{OL} + \ell\vec{OP}}{\ell + (1-\ell)} \\ &= \frac{1-\ell}{2}\vec{a} + \frac{\ell}{2}\vec{b} + \frac{\ell}{2}\vec{c} \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

$$M \xrightarrow{m} S \xrightarrow{1-m} Q$$

$$\begin{aligned}\vec{OS} &= \frac{(1-m)\vec{OM} + m\vec{OQ}}{m + (1-m)} \\ &= \frac{1-m}{2}\vec{b} + \frac{m}{2}\vec{c} + \frac{m}{2}\vec{a} \quad \text{--- ②}\end{aligned}$$

①=②, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立なので

$$\begin{cases} \frac{1-\ell}{2} = \frac{m}{2} \\ \frac{\ell}{2} = \frac{1-m}{2} \\ \frac{\ell}{2} = \frac{m}{2} \end{cases}$$

これを満たすのは $\ell = m = \frac{1}{2}$

よって

$$\vec{OS} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

(2)

$$\left(\begin{aligned} \vec{p} &= \vec{LP} \\ &= -\vec{OL} + \vec{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \vec{q} &= \vec{MQ} \\ &= -\vec{OM} + \vec{OQ} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \\ \vec{r} &= \vec{NR} \\ &= -\vec{ON} + \vec{OR} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned} \right)$$

$$-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{p} \quad \text{--- ③}$$

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{q} \quad \text{--- ④}$$

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 2\vec{r} \quad \text{--- ⑤}$$

③+④+⑤ より

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 2\vec{p} + 2\vec{q} + 2\vec{r} \quad \text{--- ⑥}$$

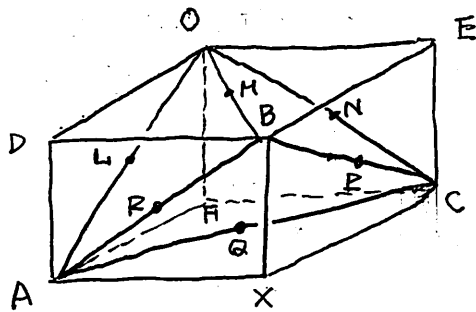
$$\text{③, ⑥ より} \quad \vec{a} = \vec{p} + \vec{r}$$

$$\text{④, ⑥ より} \quad \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}$$

$$\text{⑤, ⑥ より} \quad \underline{\underline{\vec{c} = \vec{p} + \vec{q}}}$$

(裏に続く)

(3) 解法1



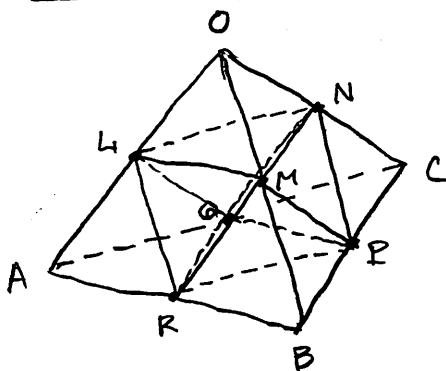
図のように、四面体 $OABC$ は
平行六面体 $ODBE-FAXC$ に
埋めこめる。

また、 LP, MQ, NR は互いに直交
するから、平行六面体は直方体
である。

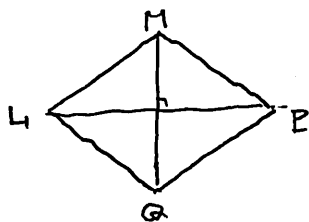
よって

$$\begin{aligned} V(XABC) &= \frac{1}{3} \times S(\triangle AXC) \times BX \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} |P||Q| \right) \times |R| \\ &= \frac{1}{6} |P||Q||R| \end{aligned}$$

解法2



LP と MQ が直交するから



$$S(\square LQPM) = \frac{1}{2} \times |P| \times |Q|$$

また、(平面 $LQPM$) $\perp$ NR から

$$\begin{aligned} V(N-LQPM-R) &= \frac{1}{3} \times S(\square LQPM) \times |NR| \\ &= \frac{1}{6} |P||Q||R| = V. \quad \text{よって} \end{aligned}$$

$$V(OABC) = V \quad \text{よって}$$

$$\begin{aligned} V(OLMN) &= V(ALQR) = V(BMER) \\ &= V(CNEQ) = \left(\frac{1}{2} \right)^3 V = \frac{1}{8} V \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} V_1 &= V - \left(\frac{1}{8} V \right) \times 4 \\ &= \frac{1}{2} V \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

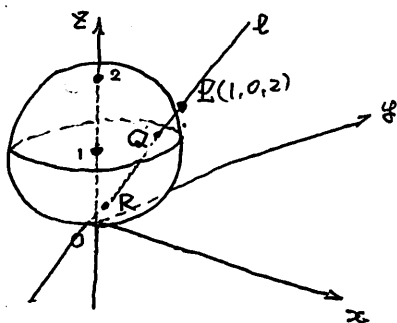
--- ②

$$V(XABC) = V(LABC) = \frac{1}{2} V \quad \text{--- ③}$$

①, ② より

$$\begin{aligned} V(XABC) &= V_1 \\ &= \frac{1}{6} |P||Q||R| \end{aligned}$$

xyz 空間の中で、 $(0, 0, 1)$ を中心とする半径1の球面 S を考える。点 Q が $(0, 0, 2)$ 以外の S 上の点を動くとき、点 Q と点 $P(1, 0, 2)$ の2点を通る直線 ℓ と平面 $z=0$ との交点を R とおく。 R の動く範囲を求め、図示せよ。



$$S: x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \quad \text{--- ①}$$

$Q(x, y, z)$ とおくと ① を満たしている。

ただし、 $(x, y, z) \neq (0, 0, 2)$

$R(X, Y, 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \vec{OP} + \vec{PQ} \\ &= \vec{OP} + k \vec{PR} \\ &= (1-k) \vec{OP} + k \vec{OR} \\ &= (1-k, 0, z-zk) + (kX, kY, 0) \\ &= (kX+1-k, kY, z-zk) \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} x = kX + 1 - k \\ y = kY \\ z = z - zk \end{cases}$$

① に代入して

$$(kX+1-k)^2 + (kY)^2 + (1-zk)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} k^2 X^2 + 1 + k^2 + 2kX - 2k - 2k^2 X + k^2 Y^2 \\ + 1 - 4k + 4k^2 = 1 \end{aligned}$$

$$(X^2 - 2X + Y^2 + 5)k^2 + (2X - 6)k + 1 = 0 \quad \text{--- ②}$$

よって

$$X^2 - 2X + Y^2 + 5 = (X-1)^2 + Y^2 + 4 \neq 0$$

なので

k についての2次方程式 ② は実数解をもつとよい。

判別式 $D \geq 0$ より

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (X-3)^2 - (X^2 - 2X + Y^2 + 5) \\ &= X^2 - 6X + 9 - X^2 + 2X - Y^2 - 5 \\ &= -4X - Y^2 + 4 \geq 0 \end{aligned}$$

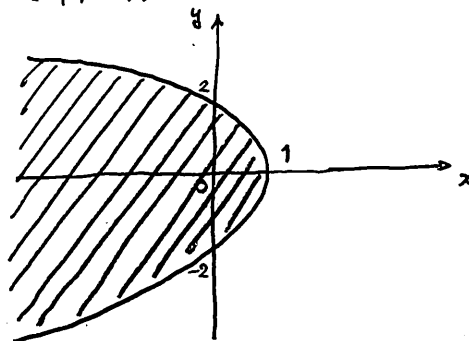
よって

$$X \leq -\frac{1}{4}Y^2 + 1$$

よって

$$R(x, y, 0) \text{ は}$$

を満たす。



求める範囲は図の斜線部

ただし、境界を含む。