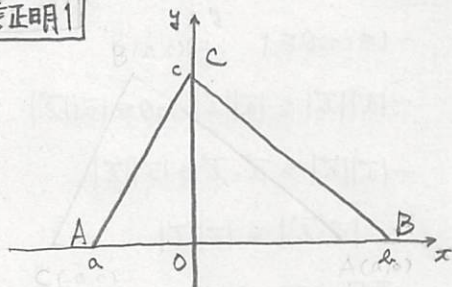


△ABCにおいて、 $2AB^2 < (2+AC^2)(2+BC^2)$ が成り立つことを示せ。

(2006 山形大)

証明1

 $a \neq b, c \neq 0$ とおく $A(a, 0), B(b, 0), C(0, c)$ とおく

$$AB^2 = (b-a)^2, AC^2 = a^2 + c^2, BC^2 = b^2 + c^2$$

と置く。

(右辺) - (左辺)

$$\begin{aligned} &= (2 + a^2 + c^2)(2 + b^2 + c^2) - 2(b-a)^2 \\ &= (2 + c^2)^2 + (a^2 + b^2)(2 + c^2) + a^2 b^2 \\ &\quad - 2(b^2 - 2ab + a^2) \\ &= 4 + 4c^2 + c^4 + a^2 c^2 + b^2 c^2 + a^2 b^2 + 4ab \quad \text{--- ①} \\ &= (b^2 + c^2)a^2 + 4ba + b^2 c^2 + c^4 + 4c^2 + 4 \\ &= (b^2 + c^2) \left\{ a^2 + \frac{4b}{b^2 + c^2} a \right\} + b^2 c^2 + c^4 + 4c^2 + 4 \\ &= (b^2 + c^2) \left\{ \left(a + \frac{2b}{b^2 + c^2} \right)^2 - \left(\frac{2b}{b^2 + c^2} \right)^2 \right\} \\ &\quad + b^2 c^2 + c^4 + 4c^2 + 4 \\ &= (b^2 + c^2) \left(a + \frac{2b}{b^2 + c^2} \right)^2 - \frac{4b^2}{b^2 + c^2} \\ &\quad + \frac{b^4 c^2 + b^2 c^4 + b^2 c^4 + c^6 + 4b^2 c^2 + 4c^4 + 4b^2 + 4c^2}{b^2 + c^2} \\ &= (b^2 + c^2) \left(a + \frac{2b}{b^2 + c^2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{c^2 b^4 + (2c^4 + 4c^2) + c^6 + 4c^4 + 4c^2}{b^2 + c^2} > 0 \end{aligned}$$

よって

(左辺) < (右辺)

となり、与不等式は成り立つ。

※ ① のあと

$$(右辺) - (左辺) = (ab+2)^2 + c^4 + (4+a^2+b^2)c^2 > 0$$

といても OK.

証明2

(右辺) - (左辺)

$$\begin{aligned} &= (2 + |AC|^2)(2 + |BC|^2) - 2|AB|^2 \\ &= (2 + |\vec{CA}|^2)(2 + |\vec{CB}|^2) - 2|-\vec{CA} + \vec{CB}|^2 \\ &= 4 + 2|\vec{CA}|^2 + 2|\vec{CB}|^2 + |\vec{CA}|^2|\vec{CB}|^2 \\ &\quad - 2|\vec{CA}|^2 + 4\vec{CA} \cdot \vec{CB} - 2|\vec{CB}|^2 \\ &= |\vec{CA}|^2|\vec{CB}|^2 + 4\vec{CA} \cdot \vec{CB} + 4. \end{aligned}$$

ここで

 $\vec{CA}$ と $\vec{CB}$ のなす角 θ とし。

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1. \quad \text{より}$$

$$-|\vec{CA}||\vec{CB}| \leq |\vec{CA}||\vec{CB}|\cos \theta \leq |\vec{CA}||\vec{CB}|$$

$$-|\vec{CA}||\vec{CB}| \leq \vec{CA} \cdot \vec{CB} \leq |\vec{CA}||\vec{CB}|$$

$$\geq |\vec{CA}|^2|\vec{CB}|^2 - 4|\vec{CA}||\vec{CB}| + 4$$

$$= (|\vec{CA}||\vec{CB}| - 2)^2$$

等号成立は

$$\cos \theta = -1 \quad \text{のとき}$$

つまり、

3点 A, C, B が一直線上となるとき

であるが、これは、△ABC が存在

することに不合理

よって

$$(右辺) - (左辺) > 0$$

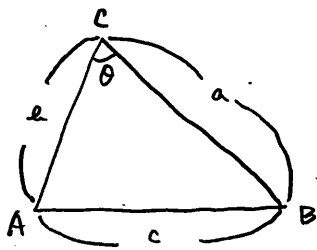
つまり

$$(左辺) < (右辺)$$

となり、与不等式は成り立つ。

(裏に続く)

証明3



$$AB = c, BC = a, CA = b,$$

$$\angle ACB = \theta \quad \text{とおく.}$$

$\triangle ABC$ に余弦定理 より

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$$

(右辺)-(左辺)

$$= (2 + b^2)(2 + a^2) - 2c^2$$

$$= 4 + 2a^2 + 2b^2 + a^2b^2 - 2a^2 - 2b^2 + 4ab \cos \theta$$

$$= a^2b^2 + 4(\cos \theta)ab + 4$$

$$= (ab + 2\cos \theta)^2 - 4\cos^2 \theta + 4$$

$$= (ab + 2\cos \theta)^2 + 4(1 - \cos^2 \theta)$$

$$= (ab + 2\cos \theta)^2 + 4\sin^2 \theta$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ 0 < \theta < 180^\circ \quad \text{より} \\ \sin \theta > 0 \end{array} \right)$$

よ、

$$(右辺) - (左辺) > 0$$

つまり

$$(左辺) < (右辺)$$

となり.

与不等式は成り立つ. $\blacksquare$

証明4

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \quad \text{より}$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

$$-|\vec{a}||\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$$

両辺ともに0以上となるので2乗してよ.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

よって

$$\vec{a} = (\sqrt{2}, AC), \quad \vec{b} = (BC, \sqrt{2})$$

とおく.

$$\left(\begin{array}{l} |\vec{a}|^2 = 2 + AC^2, \quad |\vec{b}|^2 = BC^2 + 2 \\ (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (\sqrt{2}BC + \sqrt{2}AC)^2 \\ \quad = 2(AC + BC)^2 \quad \text{より} \end{array} \right)$$

$$(2 + AC^2)(2 + BC^2) \geq 2(AC + BC)^2$$

また.

$\triangle ABC$ が存在するとき

$$AC + BC > AB \quad \text{より}$$

$$2(AC + BC)^2 > 2AB^2$$

よ、

$$(2 + AC^2)(2 + BC^2) > 2AB^2$$

となり.

与不等式は成り立つ. $\blacksquare$

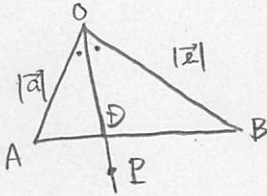
△OABにおいて、頂点A, Bにおけるそれぞれの外角の二等分線の交点をCとする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1) 点Pが∠AOBの二等分線上にあるとき、 $\overrightarrow{OP}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ となる実数tが存在することを示せ。

(2) $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=5$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$ のとき、 $\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2014 静岡大)

(1) 証明



直線OPと線分ABの交点Dとて

$$AD:DB = |\vec{a}|:|\vec{b}|$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \\ &= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)\end{aligned}$$

3点O, D, Pは一直線上なため

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= k \overrightarrow{OD} \quad (k \in \mathbb{R}) \\ &= \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} k \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)\end{aligned}$$

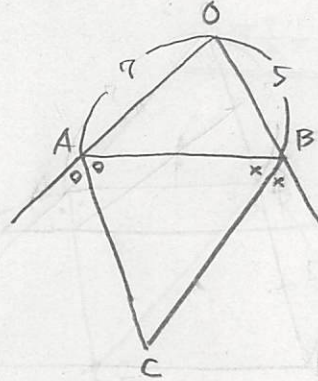
ここで

$$t = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} k \quad \text{とおく}$$

$$\overrightarrow{OP} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$$

となる $t \in \mathbb{R}$ が存在する。 ■

(2)



$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{a} - \vec{b}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 49 - 10 + 25 \\ &= 64\end{aligned}$$

$$\text{よって } |\overrightarrow{AB}| = 8$$

点Cは∠OABの外角の二等分線上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \vec{a} + s \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \right) \\ &= \vec{a} + s \left(\frac{\vec{a}}{7} + \frac{-\vec{a} + \vec{b}}{8} \right) \\ &= \vec{a} + s \left(\frac{\vec{a}}{56} + \frac{\vec{b}}{8} \right) \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

点Cは∠OBAの外角の二等分線上より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \vec{b} + t \left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} + \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} \right) \\ &= \vec{b} + t \left(\frac{\vec{b}}{5} + \frac{-\vec{b} + \vec{a}}{8} \right) \\ &= \vec{b} + t \left(\frac{\vec{a}}{8} + \frac{3}{40} \vec{b} \right) \quad \text{--- ②}\end{aligned}$$

①=② から $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は一次独立なため

$$\begin{cases} 1 + \frac{s}{56} = \frac{t}{8} \\ \frac{s}{8} = 1 + \frac{3}{40} t \end{cases}$$

(裏に続く)

$$\begin{cases} -s + 7t = 56 \\ 5s - 3t = 40 \end{cases}$$

これを解いて.

$$s = 14, t = 10$$

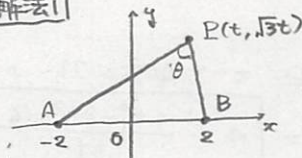
よて

$$\underline{\underline{\vec{oc} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}}}$$

t を正の実数とする。座標平面において、3点 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$, $P(t, \sqrt{3}t)$ を頂点とする $\triangle ABP$ を考える。

- (1) $\triangle ABP$ が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。
- (2) $\triangle ABP$ の垂心の座標を求めよ。
- (3) 辺 AB , BP , PA の中点をそれぞれ M , Q , R とおく。 t が(1)で求めた範囲を動くとき、 $\triangle ABP$ を線分 MQ , QR , RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と、そのときの t の値を求めよ。 (2015 東北大)

(1) 解法1

 $\angle APB = \theta$ とおく

$$\vec{PA} = -\vec{OP} + \vec{OA}$$

$$= (-t, -\sqrt{3}t) + (-2, 0)$$

$$= (-t-2, -\sqrt{3}t)$$

$$\vec{PB} = -\vec{OP} + \vec{OB}$$

$$= (-t, -\sqrt{3}t) + (2, 0)$$

$$= (-t+2, -\sqrt{3}t)$$

$$|\vec{PA}| = \sqrt{(-t-2)^2 + (-\sqrt{3}t)^2}$$

$$= \sqrt{4t^2 + 4t + 4} = 2\sqrt{t^2 + t + 1}$$

$$|\vec{PB}| = \sqrt{(-t+2)^2 + (-\sqrt{3}t)^2}$$

$$= \sqrt{4t^2 - 4t + 4} = 2\sqrt{t^2 - t + 1}$$

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (-t-2)(-t+2) + 3t^2$$

$$= 4t^2 - 4$$

$\therefore |\vec{PA}| \neq 0, |\vec{PB}| \neq 0$ であり、

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = |\vec{PA}| |\vec{PB}| \cos \theta \quad \text{より}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}| |\vec{PB}|}$$

$$= \frac{4t^2 - 4}{4\sqrt{t^2 + t + 1} \sqrt{t^2 - t + 1}}$$

$$= \frac{t^2 - 1}{\sqrt{t^2 + t + 1} \sqrt{t^2 - t + 1}}$$

$\triangle ABP$ が鋭角三角形 となるためには

$$0 < t < 2 \quad \text{かつ} \quad \cos \theta > 0 \quad \text{より}$$

$$0 < t < 2 \quad \text{かつ} \quad t^2 - 1 > 0$$

$$0 < t < 2 \quad \text{かつ} \quad t < -1, 1 < t$$

よって

$$\underline{1 < t < 2}$$

* $\cos \theta > 0$ より
 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} > 0$ の条件 と $0 < t < 2$
 だけで十分。

解法2

$t \geq 2$ のとき $\angle ABP \geq 90^\circ$ となるので

$0 < t < 2$ としよ。

$$\left(\begin{array}{l} \text{PAの傾き} = \frac{\sqrt{3}t}{t+2} \\ \text{PBの傾き} = \frac{\sqrt{3}t}{t-2} \end{array} \right. \quad \text{であり、}$$

2直線 PA, PB と x 軸 正の向き α なる角

をそれぞれ α, β とおき、 $\angle APB = \theta$ とおくと

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}t}{t+2}, \quad \tan \beta = \frac{\sqrt{3}t}{t-2}$$

$$\theta = \beta - \alpha \quad \text{であり、}$$

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}t}{t-2} - \frac{\sqrt{3}t}{t+2}}{1 + \frac{\sqrt{3}t}{t-2} \times \frac{\sqrt{3}t}{t+2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}t((t+2) - (t-2))}{(t-2)(t+2) + 3t^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}t}{4t^2 - 4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}t}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}t}{(t+1)(t-1)}$$

$0 < t < 2$ のもとで $t > 0$ かつ $t+1 > 0$ より

$$\tan \theta > 0 \quad \text{となるには}$$

$$t-1 > 0$$

$$t > 1$$

つまり

$$\underline{1 < t < 2}$$

(裏に続く)

(2) 解法1

$$PA \text{ の傾き} = \frac{\sqrt{3}t}{t+2} \quad \text{より}$$

点Bから直線PAに下ろす垂線の方程式は

$$y = -\frac{t+2}{\sqrt{3}t}(x-2) \quad \text{--- ①}$$

点Pから直線ABに下ろす垂線の方程式は

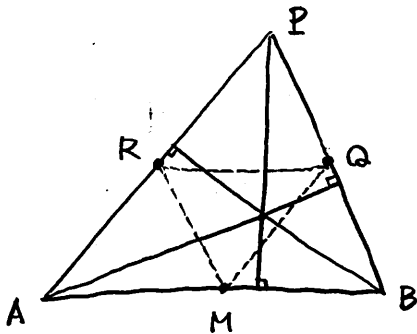
$$x = t \quad \text{--- ②}$$

①・②を連立して

$$\begin{aligned} y &= -\frac{t+2}{\sqrt{3}t} \times (t-2) \\ &= \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t} \end{aligned}$$

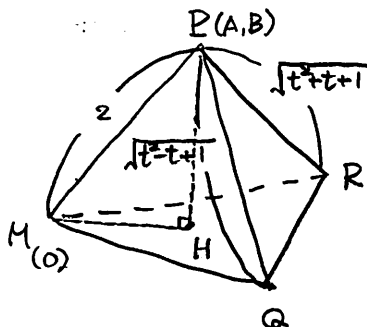
$$\text{よって 垂心} \left(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t} \right)$$

(3)



3点M, Q, Rはそれぞれ
辺AB, BP, PAの中点であるので
 $RQ \parallel AB$, $MR \parallel BP$, $QM \parallel PA$
であり。

折り曲げてできる3点P, A, Bが
集まる点から△MQRに下ろした垂線
の足Hは△ABPの垂心と一致する。



$$\begin{aligned} OH &= \sqrt{t^2 + \left(\frac{4-t^2}{\sqrt{3}t} \right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + \frac{t^4 - 8t^2 + 16}{3t^2}} \\ &= \sqrt{\frac{4t^4 - 8t^2 + 16}{3t^2}} \end{aligned}$$

△OHPで $\sin \angle POH = \frac{PH}{OP}$ より

$$\begin{aligned} PH &= \sqrt{4 - \frac{4t^4 - 8t^2 + 16}{3t^2}} \\ &= \sqrt{\frac{-4t^4 + 20t^2 - 16}{3t^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{-t^4 + 5t^2 - 4}{t^2}} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} S(\triangle MQR) &= \frac{1}{4} S(\triangle PAB) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \sqrt{PA^2 \cdot PB^2 - (PA \cdot PB)^2} \\ &= \frac{1}{8} \sqrt{4(t^2+t+1) \cdot 4(t^2-t+1) - (4t^2-4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(t^4+2t^2+1-t^2) - (t^4-2t^2+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{3t^2} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} V(PMQR) &= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{t^2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{-t^4 + 5t^2 - 4}{t^2}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{-t^4 + 5t^2 - 4} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{-\left(t^2 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

よって

$$1 < t < 2 \quad \text{より} \quad 1 < t^2 < 4$$

つまり

$$t^2 = \frac{5}{2} \quad \text{αとき 最大 となり}$$

αとき

$$t = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad \text{で} \quad \text{Max } V(PMQR) = \frac{1}{2}$$

(1) 解法3

$t \geq 2$ のとき $\angle ABE \geq 90^\circ$ となるので

$0 < t < 2$ としよ。

$\triangle ABE$ が鋭角三角形となるためには

$$EA^2 + EB^2 > AB^2$$

$$\{(t+2)^2 + 3t^2\} + \{(t-2)^2 + 3t^2\} > 16$$

$$4t^2 + 4t + 4 + 4t^2 - 4t + 4 > 16$$

$$8t^2 - 8 > 0$$

$$t^2 - 1 > 0$$

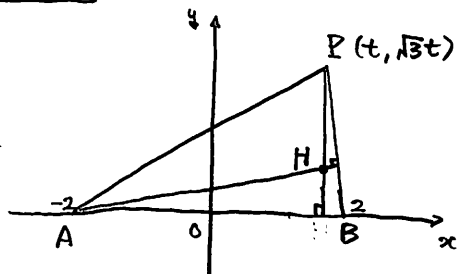
$$(t+1)(t-1) > 0$$

$$t < -1, 1 < t$$

$0 < t < 2$ とあわせて

$$\underline{\underline{1 < t < 2}}$$

(2) 解法2



$PH \perp AB$ より

垂心 $H(t, u)$ とできる。

$AH \perp BE$ より

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \\ \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} \\ \quad = (2, 0) + (t, u) \\ \quad = (t+2, u) \\ \overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} \\ \quad = (-2, 0) + (t, \sqrt{3}t) \\ \quad = (t-2, \sqrt{3}t) \end{array} \right)$$

$$(t+2, u) \cdot (t-2, \sqrt{3}t) = 0$$

$$t^2 - 4 + \sqrt{3}tu = 0$$

$$\sqrt{3}tu = 4 - t^2$$

$t \neq 0$ より

$$u = \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$$

よって 垂心 $H(t, \frac{4-t^2}{\sqrt{3}t})$

空間内の異なる3点 $A(2, 2, 2)$, $B(0, 0, 2)$, $P(x, y, z)$ について考える。

- (1) 空間内の点 P が $\angle APB = 90^\circ$ を満たしながら動くとする。このとき、点 P が描く図形を求めよ。
- (2) 点 P が (1) で求めた図形上を動くとき、 $\triangle APB$ の面積の最大値を求めよ。
- (3) 点 P が $\angle APB = 90^\circ$ および $z=2$ を満たし、かつ $\triangle APB$ の面積が最大となるとする。このとき、点 $L(1, 1, 4)$ に置いた光源が xy 平面上に作る $\triangle APB$ の影の面積を求めよ。

(2012 成島大)

(1)

$$\angle APB = 90^\circ \text{ より}$$

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$$

ここで

$$\vec{PA} = -\vec{OP} + \vec{OA}$$

$$= (-x, -y, -z) + (2, 2, 2)$$

$$= (-x+2, -y+2, -z+2)$$

$$\vec{PB} = -\vec{OP} + \vec{OB}$$

$$= (-x, -y, -z) + (0, 0, 2)$$

$$= (-x, -y, -z+2)$$

$$(-x+2)(-x) + (-y+2)(-y) + (-z+2)^2 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y + (z-2)^2 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$$

よて、点 P が描く図形は

$$\text{球面: } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 2$$

ただし、2点 A, B を除く。

(2)

$PA = PB$ とするとき $S(\triangle APB)$ は最大となる。

このとき、

球の中心 $C(1, 1, 2)$

より、

$$CP = \sqrt{2} \text{ より}$$

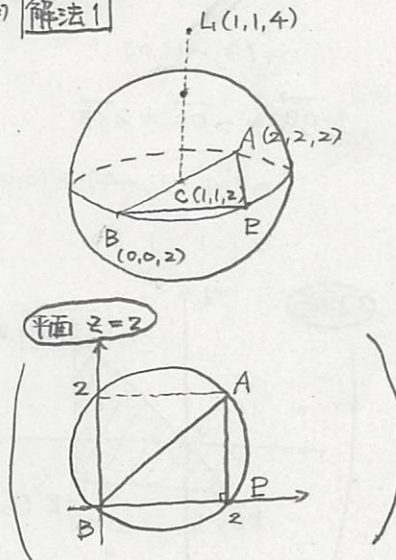
$$AB = 2\sqrt{2}$$

よて

$$\text{Max } S(\triangle APB) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= \underline{\underline{2}}$$

(3) 解法1



$P(2, 0, 2)$ としてよい。

3点 A, P, B が xy 平面上に写る点
をそれぞれ A', P', B' とおく

$$\begin{cases} \vec{LA'} = k\vec{LA} \\ \vec{LP'} = k\vec{LP} \\ \vec{LB'} = k\vec{LB} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

よて、

$$\vec{LA'} = k\vec{LA} \text{ より}$$

$$-\vec{OL} + \vec{OA'} = k(-\vec{OL} + \vec{OA})$$

$$\vec{OA'} = (1-k)\vec{OL} + k\vec{OA}$$

$$= (1-k)(1, 1, 4) + k(2, 2, 2)$$

$$= (1+k, 1+k, 4-2k)$$

点 A' は xy 平面上より

$$4-2k=0$$

$$k=2$$

(裏に続く)

このとき

$$\vec{OA'} = (3, 3, 0).$$

同様に

$$\vec{OB'} = -\vec{OL} + 2\vec{OE}$$

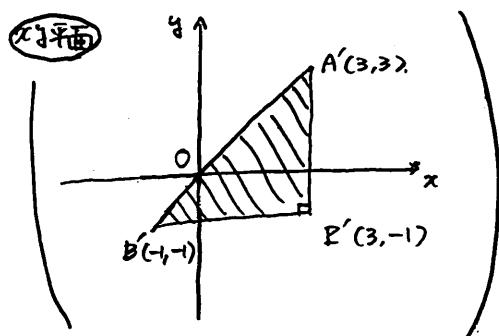
$$= (-1, -1, -4) + (4, 0, 4)$$

$$= (3, -1, 0)$$

$$\vec{OB'} = -\vec{OL} + 2\vec{OB}$$

$$= (-1, -1, -4) + (0, 0, 4)$$

$$= (-1, -1, 0)$$

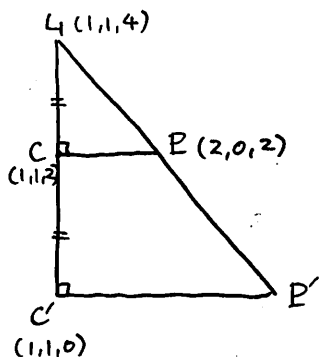


よって

$$S(\triangle A'E'B') = \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$

$$= 8$$

(3) 解法2



3点 A, E, B, C が xy 平面上に写る点

をそれぞれ A', E', B', C' とする

$\triangle APB$ の $\triangle A'E'B'$ とあり.

相似比 $LC : LC' = 1 : 2$ より

面積比 $1 : 4$

$$\therefore S(\triangle APB) : S(\triangle A'E'B') = 1 : 4$$

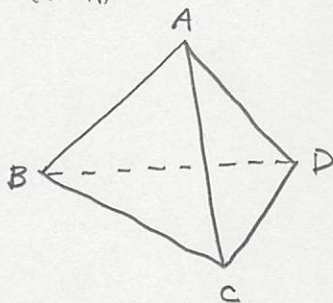
$$2 : S(\triangle A'E'B') = 1 : 4$$

よって

$$S(\triangle A'E'B') = 8$$

四面体ABCDにおいてACとBDが垂直となる必要十分条件は $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$ であることを示せ。

(証明)



($\Rightarrow$)

$AC \perp BD$ のとき

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$\vec{AC} \cdot (-\vec{AB} + \vec{AD}) = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} \quad \text{--- ①}$$

このとき

$$AD^2 + BC^2$$

$$= |\vec{AD}|^2 + |-\vec{AB} + \vec{AC}|^2$$

$$= |\vec{AD}|^2 + |\vec{AB}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + |\vec{AC}|^2$$

$$= |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 + |\vec{AD}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} \quad \text{--- ②}$$

$$AB^2 + CD^2$$

$$= |\vec{AB}|^2 + |-\vec{AC} + \vec{AD}|^2$$

$$= |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AD} + |\vec{AD}|^2$$

$$= |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 + |\vec{AD}|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AD} \quad \text{--- ③}$$

① のもとで ② = ③ となる

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$$

は成り立つ。

($\Leftarrow$)

$$AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 \quad \text{のとき}$$

②, ③ より

$$|\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 + |\vec{AD}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

$$= |\vec{AB}|^2 + |\vec{AC}|^2 + |\vec{AD}|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AD}$$

$$-2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -2\vec{AC} \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AD}$$

$$\vec{AC} \cdot (-\vec{AB} + \vec{AD}) = 0$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$\therefore \vec{AC} \perp \vec{BD}$$

は成り立つ

座標空間内の8点 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$ を頂点とする立方体を考える。 $0 < t < 3$ のとき、3点 $(t, 0, 0)$, $(0, t, 0)$, $(0, 0, t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし、 $f(0) = f(3) = 0$ とする。

(1) $0 \leq t \leq 3$ のとき、 $f(t)$ を t の式で表せ。

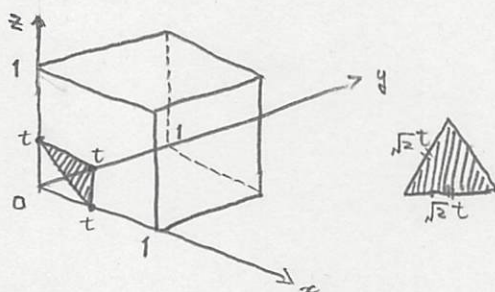
(2) 関数 $f(t)$ の $0 \leq t \leq 3$ における最大値を求めよ。

(3) 定積分 $\int_0^3 f(t) dt$ の値を求めよ。

(2015 岡山大)

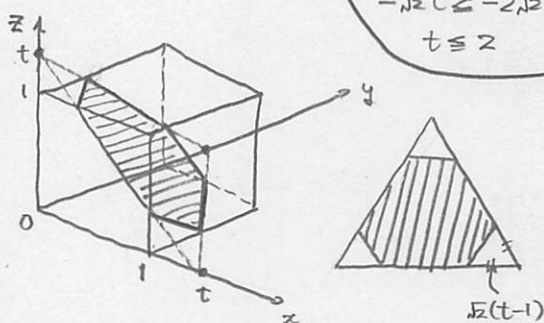
(i)

(i) $0 < t \leq 1$ のとき



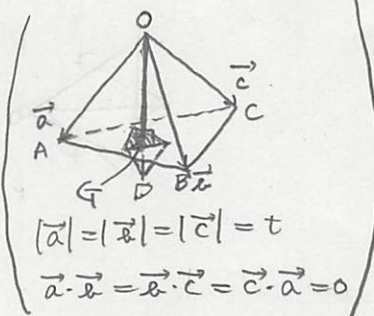
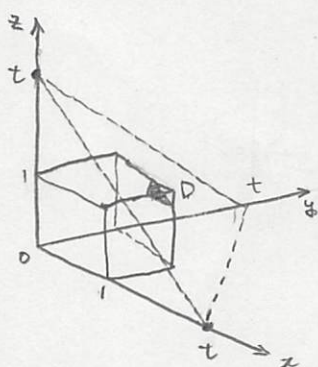
$$f(t) = \frac{1}{2} (\sqrt{2}t)^2 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2$$

(ii) $1 \leq t \leq 2$ のとき

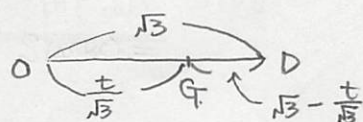


$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 - \left(\frac{1}{2} \{ \sqrt{2}(t-1) \}^2 \sin \frac{\pi}{3} \right) \times 3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3(t-1)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} (t^2 - 3t^2 + 6t - 3) \\ &= -\sqrt{3} t^2 + 3\sqrt{3} t - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(iii) $2 \leq t < 3$ のとき



$$\begin{aligned} |\vec{OG}|^2 &= \vec{OA} \cdot \vec{OG} \\ &= \vec{a} \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{3} |\vec{a}|^2 \\ &= \frac{1}{3} t^2 \\ |\vec{OG}| > 0 \text{ より } |\vec{OG}| &= \frac{t}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$



$$OG : GD = t : (3-t) \quad \text{から}$$

$$S(\triangle ABC) : f(t) = t^2 : (3-t)^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 : f(t) = t^2 : (3-t)^2$$

$$t^2 f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 (3-t)^2$$

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} (3-t)^2$$

(i) ~ (iii) より

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 & (0 \leq t \leq 1) \\ -\sqrt{3} t^2 + 3\sqrt{3} t - \frac{3\sqrt{3}}{2} & (1 \leq t \leq 2) \\ \frac{\sqrt{3}}{2} (3-t)^2 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

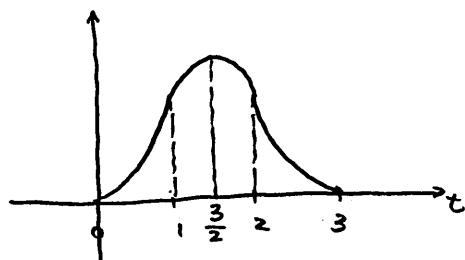
(裏に続く.)

(2) $1 \leq t \leq 2$ and

$$f(t) = -\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\sqrt{3}\left\{t^2 - 3t\right\} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\sqrt{3}\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$



∴ Max $f(t) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ($t = \frac{3}{2}$)

(3)

$$\int_0^3 f(t) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 dt + \int_1^2 \left(-\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) dt$$

$$+ \int_2^3 \frac{\sqrt{3}}{2} (3-t)^2 dt$$

$$= \left[\frac{\sqrt{3}}{6} t^3\right]_0^1 + \left[-\frac{\sqrt{3}}{3} t^3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} t^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} t\right]_1^2$$

$$+ \left[\frac{\sqrt{3}}{6} (t-3)^3\right]_2^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6} + \left(-\frac{8\sqrt{3}}{3} + 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= 3\sqrt{3} - \frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= \underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

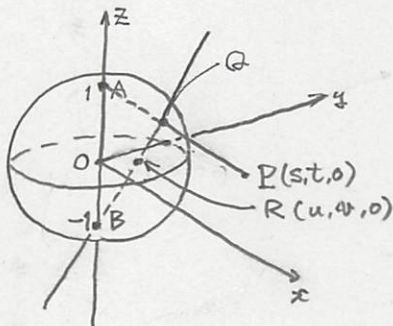
座標空間内に、原点 $O(0, 0, 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ がある。 O と異なる点 $P(s, t, 0)$ に対し、直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u, v, 0)$ とする。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

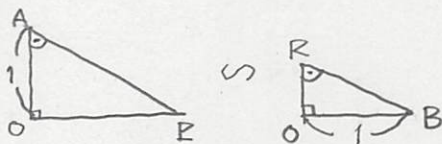
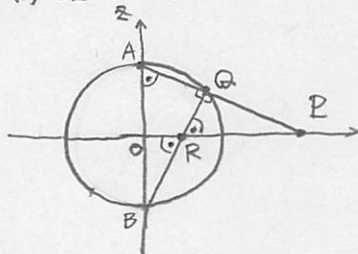
(2) s を u, v を用いて表せ。

(3) ℓ は xy 平面内の直線で、原点 O を通らないものとする。直線 ℓ 上を点 P が動くとき、対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。

(2016 岡山大学)



(i) $OP > 1$ のとき

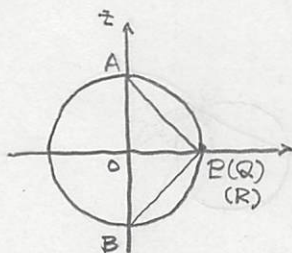


$$OA : OP = OR : OB$$

$$1 : OP = OR : 1$$

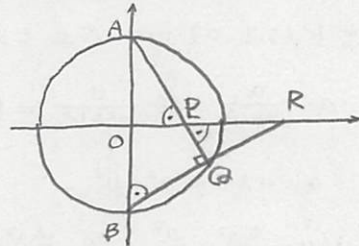
$$OP \cdot OR = 1$$

(ii) $OP = 1$ のとき



$$OP \cdot OR = 1$$

(iii) $0 < OP < 1$ のとき



$$OA : OP = OR : OB$$

$$1 : OP = OR : 1$$

$$OP \cdot OR = 1$$

(i) ~ (iii) より

$$\underline{OP \cdot OR = 1}$$

(2) 3点 O, P, R は、一直線上にあるから

$$\overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{OR} \quad \text{とできる}$$

$$\text{よって } OP \cdot OR = 1 \quad \text{から}$$

$$k |\overrightarrow{OR}|^2 = 1$$

$$k(u^2 + v^2) = 1$$

$$\therefore u^2 + v^2 \neq 0 \quad \text{から}$$

$$k = \frac{1}{u^2 + v^2}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{u^2 + v^2} \overrightarrow{OR}$$

$$(s, t, 0) = \frac{1}{u^2 + v^2} (u, v, 0)$$

よって

$$\underline{s = \frac{u}{u^2 + v^2}}$$

(裏に続く)

(3) (証明)
(2) より

$$s = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad t = \frac{v}{u^2+v^2}$$

l は xy 平面上の直線 で

原点 を通らない ので

$$ax + by = 1 \quad \text{とできる.}$$

点 $P(s, t, 0)$ は l 上 の点

$$a \cdot \frac{u}{u^2+v^2} + b \cdot \frac{v}{u^2+v^2} = 1$$

$$au + bv = u^2 + v^2$$

$$\left(u - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(v - \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$\left(u - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(v - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

よって

$R(u, v, 0)$ は

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}, \quad z = 0$$

を満たす.

つまり,

点 R は 中心 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right)$, 半径 $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

である xy 平面上の円周上にある.

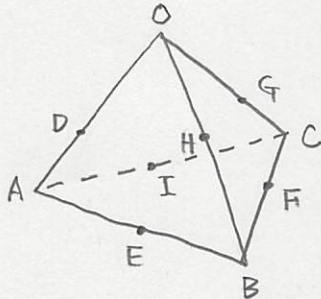


四面体OABCを考える。点D, E, F, G, H, Iは、それぞれ辺OA, AB, BC, CO, OB, AC上にあり、頂点ではないとする。

(1) $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならば $AE:EB=CF:FB$ であることを示せ。

(2) D, E, F, G, H, Iが正八面体の頂点となっているとき、これらの点は四面体OABCの各辺の中点であり、四面体OABCは正四面体であることを示せ。

(2017 京大)



(1) (証明)

$$\begin{cases} OD:DA = k:(1-k), OG:GC = l:(1-l) \\ AE:EB = m:(1-m), CF:FB = n:(1-n) \end{cases} \quad (k, l, m, n \in \mathbb{R})$$

とおく。

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG} = l\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OE} = (1-m)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OF} = n\overrightarrow{OB} + (1-n)\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

 $\overrightarrow{DG} \parallel \overrightarrow{EF}$ とき

$$\overrightarrow{EF} = p\overrightarrow{DG} \quad \text{なる } p \in \mathbb{R} \text{ が存在し}$$

$$-\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = p(-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OG})$$

$$(m-1)\overrightarrow{OA} - m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OB} + (1-n)\overrightarrow{OC}$$

$$= -kp\overrightarrow{OA} + lp\overrightarrow{OC}$$

$$(m-1)\overrightarrow{OA} + (-m+n)\overrightarrow{OB} + (1-n)\overrightarrow{OC} = -kp\overrightarrow{OA} + lp\overrightarrow{OC}$$

 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は1次独立なので

$$\begin{cases} m-1 = -kp & \text{--- ①} \\ -m+n = 0 & \text{--- ②} \\ 1-n = lp & \text{--- ③} \end{cases}$$

②より $m=n$ よって $m-1 = -kp$

$$AE:EB = CF:FB$$

(2)

図形HDEFGIが正八面体とき

 $\square DEFG$ は正方形であり、

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{EF} \quad \text{が成り立つこと}$$

(1) $p=1$

このとき

$$m=n=1-k, \quad k=l \quad \text{であり}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OG} = k\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OE} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OF} = (1-k)\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{DG} \perp \overrightarrow{DE} \quad \text{も成り立つこと}$$

$$\overrightarrow{DG} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$$

$$\begin{cases} \text{よって} \\ \overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OG} \\ \quad = -k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \\ \quad = (1-k)\overrightarrow{OB} \end{cases} \quad \text{より}$$

$$k(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot (1-k)\overrightarrow{OB} = 0$$

 $k \neq 0, 1$ とき

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \quad \text{--- (*)}$$

また

 $\square EFGI$ も正方形であり、

$$\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{IG}$$

よって

$$\begin{cases} OH:HB = q:(1-q) \\ AI:IC = r:(1-r) \end{cases} \quad (q, r \in \mathbb{R})$$

とおく。

$$\begin{cases} \overrightarrow{OH} = q\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OI} = (1-r)\overrightarrow{OA} + r\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} \overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OH} \\ \quad = -k\overrightarrow{OA} + (k+q-1)\overrightarrow{OB} \quad \text{--- ④} \\ \overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OG} \\ \quad = (r-1)\overrightarrow{OA} + (k-r)\overrightarrow{OC} \quad \text{--- ⑤} \end{cases}$$

④=⑤, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ は1次独立なので

(裏に続く)

$$\begin{cases} -k = r-1 \\ k+g-1=0 \\ 0=k-r \end{cases}$$

これを解いて

$$k = \frac{1}{2}, g = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2}$$

よって

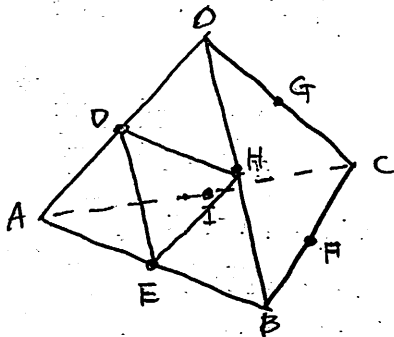
D, E, F, G, H, I はそれぞれ

四面体 OABC の各辺の中点である。

また

図形 HDEFGI が正八面体であり

$\triangle DEH$ は正三角形であり



$DE = EH = DH$ が成り立つ。

また

中点連結定理により

$$\begin{cases} 2DE = OB \\ 2EH = OA \\ 2DH = AB \end{cases}$$

が成り立つので

$\triangle OAB$ も正三角形

$\triangle OBC$ も $\triangle OCA$ も同様であるので

四面体 OABC は

正四面体である。