

等差数列 $\{a_n\}$ は $a_6=37$, $a_{11}=22$ を満たすとする。

- (1) 一般項 a_n を求めよ。
- (2) a_n が負となる最小の自然数 n を求めよ。
- (3) 第1項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。
- (4) S_n が最大となるときの S_n の値を求めよ。

(1)

$$a_n = a + (n-1)d \quad \text{よって}$$

$$\begin{cases} a_6 = 37 \\ a_{11} = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+5d = 37 \\ a+10d = 22 \end{cases}$$

これを解いて

$$a = 52, d = -3$$

よって

$$\begin{aligned} a_n &= 52 + (n-1)(-3) \\ &= \underline{\underline{-3n + 55}} \end{aligned}$$

(2)

$$a_n < 0 \quad \text{より}$$

$$-3n + 55 < 0$$

$$-3n < -55$$

$$n > \frac{55}{3} = 18 + \frac{1}{3}$$

よって

$$\underline{\underline{\min n = 19}}$$

(3)

$$S_n = \frac{\{52 + (-3n + 55)\} \times n}{2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{(-3n + 107)n}{2}}}$$

(4)

(2)より

$$\begin{cases} n \geq 19 & \text{とき} & a_n < 0 \\ 1 \leq n \leq 18 & \text{とき} & a_n > 0 \end{cases}$$

よって

$$\text{Max } S_n = S_{18}$$

$$= \frac{(-54 + 107) \times 18}{2}$$

$$= 53 \times 9$$

$$= \underline{\underline{477}}$$

第10項が6、第15項が192の等比数列がある。その公比は であり、第9項から第16項までの和は

である。

$$a_n = ar^{n-1} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{cases} a_{10} = 6 \\ a_{15} = 192 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ar^9 = 6 & \text{--- ①} \\ ar^{14} = 192 & \text{--- ②} \end{cases}$$

$$a \neq 0, r \neq 0 \text{ より}$$

$$\text{②} \div \text{①} \text{ とし、}$$

$$\frac{ar^{14}}{ar^9} = \frac{192}{6}$$

$$r^5 = 32$$

$$r = 2$$

$$\text{つまり、公比 } \underline{\underline{2}}$$

このとき

$$a_{10} = 2a_9 \text{ より、}$$

$$6 = 2a_9$$

$$a_9 = 3$$

よって

第9項から第16項までの和 S は

$$S = \frac{3(2^8 - 1)}{2 - 1}$$

$$= 3 \times 255$$

$$= \underline{\underline{765}}$$

3つの数 $1, a, b$ がこの順に等差数列をなし、また $b^2, a, 1$ の3数がこの順に等比数列をなすとき、 a, b の値を求めよ。

$1, a, b$ がこの順に等差数列をなすので

$$a-1=b-a$$

$$b=2a-1 \quad \text{--- ①}$$

$b^2, a, 1$ がこの順に等比数列をなすので

$$\frac{a}{b^2} = \frac{1}{a}$$

$$a^2 = b^2 \quad \text{--- ②}$$

① と ② を連立して

$$a^2 = (2a-1)^2$$

$$a^2 = 4a^2 - 4a + 1$$

$$3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$(3a-1)(a-1) = 0$$

$$a = \frac{1}{3}, 1$$

①より

$$\underline{\underline{(a, b) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right), (1, 1)}}$$

数列 $\{a_n\}$ を初項 1, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列とすると, 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = 2^{a_n}$ で定義する。

(1) $P_n = b_1 \times b_2 \times b_3 \times \dots \times b_n$ とするとき, $P_n \geq 2^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2) $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ とするとき, $S_n \geq 2^{100} S_2$ となる最小の自然数 n を求めよ。 (2008 岩手大)

(1)

$$\begin{aligned} P_n &= b_1 \times b_2 \times b_3 \times \dots \times b_n \\ &= 2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} \times \dots \times 2^{a_n} \\ &= 2^{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここから} \\ a_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \quad \text{だから} \\ \sum_{k=1}^n a_k = \frac{(1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}) \times n}{2} \\ = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2} \right) \\ = \frac{n(n+3)}{4} \end{array} \right)$$

$$P_n = 2^{\frac{n(n+3)}{4}} \geq 2^{100} \quad \text{より}$$

$$\frac{n(n+3)}{4} \geq 100$$

$$n(n+3) \geq 400$$

$n(n+3)$ は $n > 0$ で増加関数であり,

$$\left(\begin{array}{ll} n=18 & \text{あたり} \quad 18 \times 21 = 378 < 400 \\ n=19 & \text{あたり} \quad 19 \times 22 = 418 > 400 \end{array} \right)$$

$$\therefore \underline{\underline{\min n = 19}}$$

(2)

$$\begin{aligned} b_n &= 2^{a_n} \\ &= 2^{\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}} \\ &= (\sqrt{2})^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n \\ &= (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^4 + \dots + (\sqrt{2})^{n+1} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 (\sqrt{2}^n - 1)}{\sqrt{2} - 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2} - 1} (\sqrt{2}^n - 1) \geq 2^{100} S_2$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} - 1} (\sqrt{2}^n - 1) \geq 2^{100} (2 + 2\sqrt{2})$$

$$\sqrt{2} - 1 > 0 \quad \text{より}$$

$$\sqrt{2}^n - 1 \geq 2^{100} (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$$

$$\sqrt{2}^n - 1 \geq 2^{100}$$

$$2^{\frac{n}{2}} \geq 2^{100} + 1$$

より

$$\frac{n}{2} > 100$$

$$n > 200$$

つまり

$$\underline{\underline{\min n = 201}}$$

1 から 200 までの自然数のうち、4 で割ると 1 余る数の集合を A 、7 で割ると 2 余る数の集合を B とする。共通部分 $A \cap B$ の要素について、小さい数から順に $a_1, a_2, a_3, \dots$ とするとき、数列 $\{a_n\}$ の項数と、数列 $\{a_n\}$ の項をすべて加えた和を求めよ。

(2011 立命館大)

$$1 \leq n \leq 200 \quad \text{と}$$

$$\begin{cases} n = 4k + 1 \\ n = 7l + 2 \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

とでき、

$$4k + 1 = 7l + 2 \quad \text{より}$$

$$4k - 7l = 1$$

$$\rightarrow 4 \times 2 - 7 \times 1 = 1$$

$$4(k-2) - 7(l-1) = 0$$

$$l-1 = \frac{4}{7}(k-2)$$

$$\begin{cases} k-2 = 7m \\ l-1 = 4m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

とでき、

$$\begin{cases} k = 7m + 2 \\ l = 4m + 1 \end{cases}$$

ととき

$$n = 4(7m + 2) + 1$$

$$= 28m + 9$$

$$1 \leq n \leq 200 \quad \text{より}$$

$$1 \leq 28m + 9 \leq 200$$

$$-8 \leq 28m \leq 191$$

$$-\frac{8}{28} \leq m \leq \frac{191}{28}$$

$$m \in \mathbb{Z} \quad \text{より}$$

$$m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

となり、項数 7

$$\begin{cases} m=0 \text{ とき} & n=9 \\ m=6 \text{ とき} & n=177 \end{cases}$$

よ、

$$\frac{(9+177) \times 7}{2}$$

$$= 93 \times 7$$

$$= \underline{\underline{651}}$$

a, b, c は相異なる実数で, $abc = -27$ を満たしている。さらに, a, b, c はこの順で等比数列であり, a, b, c の順序を適当に変えると等差数列になる。このとき, a, b, c を求めよ。 (2012 宮城教育大)

a, b, c はこの順で等比数列なので

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \quad \text{より}$$

$$b^2 = ac$$

ここで

$$abc = -27 \quad \text{より}$$

$$ac \times b = -27.$$

$$b^3 = -27.$$

$$\text{よって } b = -3.$$

$$\text{このとき } ac = 9 \quad \text{--- ①}$$

(i) $c, -3, a$ が順に等差数列になるとき

$$-3 - c = a + 3$$

$$a + c = -6 \quad \text{--- ②}$$

a と c を解にもつ2次方程式は

①, ② より

$$t^2 + 6t + 9 = 0$$

$$(t+3)^2 = 0$$

$$t = -3.$$

$a \neq c$ より 不適.

(ii) $-3, a, c$ または $c, a, -3$ が順に

等差数列になるとき.

$$a + 3 = c - a$$

$$c = 2a + 3 \quad \text{--- ③}$$

① と ③ を連立して.

$$a(2a+3) = 9.$$

$$2a^2 + 3a - 9 = 0$$

$$(2a-3)(a+3) = 0$$

$$a = \frac{3}{2}, -3.$$

③ より

$$(a, c) = \left(\frac{3}{2}, 6\right), (-3, -3)$$

$$a \neq c \quad \text{より}$$

$$(a, c) = \left(\frac{3}{2}, 6\right)$$

(iii) $-3, c, a$ または $a, c, -3$ が順に.

等差数列になるとき.

a と c の対称性から

(ii) と同様に.

$$(a, c) = \left(6, \frac{3}{2}\right)$$

(i) ~ (iii) より

$$(a, b, c) = \left(\frac{3}{2}, -3, 6\right), \left(6, -3, \frac{3}{2}\right)$$

数列 $\{a_n\}$ に対して, $b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ とおく。

(1) $\{a_n\}$ が等差数列ならば, $\{b_n\}$ も等差数列であることを示せ。

(2) $\{b_n\}$ が等差数列ならば, $\{a_n\}$ も等差数列であることを示せ。

(2017 福島大)

(1) 証明

$\{a_n\}$ が等差数列 a とし。

$$a_n = an + b \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

とでき

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$= \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$= \frac{(a+b+an+b)n}{2}$$

$$= \left(\frac{a}{2}n + \frac{a+b}{2}\right)n$$

であり

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$= \frac{a}{2}n + \frac{a+b}{2}$$

と 1 次式 で 与えられるので

$\{b_n\}$ も等差数列 である。

よって

$$a_n = 2cn - c + d \quad (n \geq 1)$$

と 1 次式 で 与えられるので

$\{a_n\}$ も等差数列 である。

(2) 証明

$\{b_n\}$ が等差数列 a とし

$$b_n = cn + d \quad (c, d \in \mathbb{R})$$

とでき

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = cn + d$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = cn^2 + dn = S_n \quad \text{--- ①}$$

とすると $n \geq 2$ において

$$S_n - S_{n-1} = (cn^2 + dn) - \{c(n-1)^2 + d(n-1)\}$$

$$a_n = (cn^2 + dn) - (c(n-1)^2 + d(n-1))$$

$$= 2cn - c + d \quad \text{--- ②}$$

② で $n=1$ とすると

$$a_1 = 2c - c + d = c + d$$

① で $n=1$ とすると

$$a_1 = c + d$$

[2018スタンダードⅡⅡAB受 例題45]

k を自然数とする。等差数列 $\{a_n\}$ において、初めの k 項の和を T_1 、次の k 項の和を T_2 、その次の k 項の和を T_3 とし、以下同様に $T_4, T_5, \dots$ を定めるとき、 $\{T_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。 (2014 群馬大)

証明

$\{a_n\}$ の初項 a 、公差 d とし、

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$T_n = a_{(n-1)k+1} + a_{(n-1)k+2} + \dots + a_{nk}$$

として与えられ、

$$\begin{cases} a_{(n-1)k+1} = a + (n-1)kd \\ a_{nk} = a + (nk-1)d \end{cases} \quad (*)$$

$$T_n = \frac{\{a + (n-1)kd + a + (nk-1)d\}k}{2}$$

$$= \frac{\{2a + (2nk - k - 1)d\}k}{2}$$

$$= dk^2n + \left(a - \frac{k+1}{2}d\right)k$$

∴ n の1次式で与えられるので

$\{T_n\}$ は等差数列である。 ■

a と d を整数とする。数列 $\{a_n\}$ を初項 a 、公差 d の等差数列とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 $n \leq 34$ のとき $S_n \leq 0$ 、 $n \geq 35$ のとき $S_n > 0$ であるとする。

(1) S_n が最小となる n の値を求めよ。

(2) S_n の最小値が -289 のとき、 a と d の値をそれぞれ求めよ。

(2016 奈良女子大)

(1)

$$S_n = \frac{(a + \{a + (n-1)d\})n}{2}$$

$$= \frac{\{2a + (n-1)d\}n}{2}$$

$$S_{34} = 17(2a + 33d) \leq 0$$

$$2a + 33d \leq 0 \quad \text{--- ①}$$

$$S_{35} = \frac{35(2a + 34d)}{2} > 0$$

$$a + 17d > 0 \quad \text{--- ②}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{①} \quad 2a + 33d \leq 0 \\ \text{②} \times (-1) \quad -2a - 34d < 0 \quad (+) \\ \hline -d < 0 \\ d > 0 \quad \text{--- ③} \end{array} \right)$$

①, ② より

$$\left(\begin{array}{l} a + \frac{33}{2}d \leq 0 \\ a + 17d > 0 \quad \text{--- ④} \end{array} \right)$$

③ とあわせて

$$a + 16d < 0 \quad \text{--- ⑤}$$

④, ⑤ より

$$a_{18} > 0, a_{17} < 0$$

$$\{a_n\}: a_1, a_2, \dots, a_{17}, a_{18}, a_{19}, \dots$$

$$\ominus \quad \ominus \quad \quad \quad \ominus \quad \oplus \quad \oplus$$

よって

$$S_n \text{ が最小となる } n \text{ は } \underline{\underline{n=17}}$$

(2)

(1) より

$$S_{17} = -289$$

$$\frac{(2a + 16d)17}{2} = -289$$

$$a + 8d = -17$$

$$a = -17 - 8d \quad \text{--- ⑥}$$

④, ⑤ より

$$-17d < a < -16d$$

$$-17d < -17 - 8d < -16d$$

$$\begin{cases} -9d < -17 \\ 8d < 17 \end{cases}$$

よって

$$\frac{17}{9} < d < \frac{17}{8}$$

これを満たす $d \in \mathbb{Z}$ は

$$d = 2 \quad (>0)$$

⑥ より

$$a = -17 - 16 = -33$$

よって

$$\underline{\underline{a = -33, d = 2}}$$

次の3つの条件をすべて満たす三角形の3辺の長さを求めよ。

- (i) 最大角と最小角の差は 90° である。
 (ii) 3辺の長さを大きさの順に並べたものは等差数列である。
 (iii) 3辺の長さの和は3である。

(2011 学習院大)

解法1

(i) より、鈍角三角形 であり

最大辺の長さを a とおくと。

(ii) より 3辺の長さは

 $a, a-d, a-2d$ とおける。

(iii) より

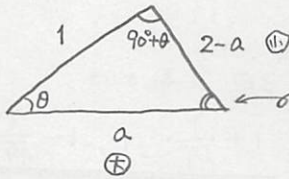
$$a + (a-d) + (a-2d) = 3$$

$$3a - 3d = 3$$

$$a - d = 1$$

このとき、3辺の長さは、

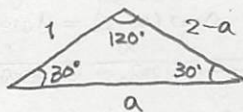
$$a, 1, 2-a \quad \left(\begin{array}{l} a \geq 1 \geq 2-a > 0 \text{ より} \\ 1 \leq a < 2. \end{array} \right)$$



$$\theta \leq 90^\circ - 2\theta \leq 90^\circ + \theta \quad \text{であり}$$

$$0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$$

よって

 $\theta = 0^\circ$ のとき、三角形 成 っ て け な い。 $\theta = 30^\circ$ のとき

$$2-a = 1 \quad \text{となり}$$

$$a = 1$$

これは 正三角形 となり 不合理

よって

$$0^\circ < \theta < 30^\circ \quad \text{かつ} \quad 1 < a < 2$$

面積に着目して

$$\frac{1}{2} a \sin \theta = \frac{1}{2} a(2-a) \sin(90^\circ - 2\theta) = \frac{1}{2} (2-a) \sin(90^\circ + \theta)$$

$$a \sin \theta = a(2-a) \cos 2\theta = (2-a) \cos \theta$$

$$a \neq 0, 2 \quad \text{と} \quad a \neq 1$$

$$\begin{cases} \sin \theta = (2-a) \cos 2\theta & \text{--- ①} \\ a \cos 2\theta = \cos \theta & \text{--- ②} \end{cases}$$

①, ② より a を消去して

$$\sin \theta = 2 \cos 2\theta - \cos \theta$$

$$\sin \theta + \cos \theta = 2 \cos 2\theta \quad \text{--- ③}$$

$$\left(\begin{array}{l} 0^\circ < \theta < 30^\circ \quad \text{のとき 両辺 と も に 正 であり} \\ 2 \text{乗して} \end{array} \right)$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = 4 \cos^2 2\theta$$

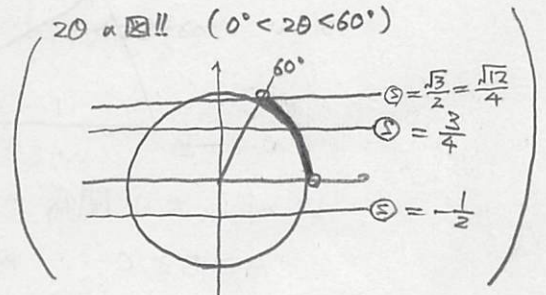
$$1 + \sin 2\theta = 4(1 - \sin^2 2\theta)$$

$$4 \sin^2 2\theta + \sin 2\theta - 3 = 0$$

$$(4 \sin 2\theta - 3)(\sin 2\theta + 1) = 0$$

$$\sin 2\theta = \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$$

$$2\theta \text{ の範囲!! } (0^\circ < 2\theta < 60^\circ)$$



$$\text{よって} \quad \sin 2\theta = \frac{3}{4} \quad \text{--- ④}$$

$$\cos 2\theta = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \text{であり}$$

$$\begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2} & \text{(③ ④ より)} \\ \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8} & \text{(③ ④ より)} \end{cases}$$

 $\sin \theta$ と $\cos \theta$ は 解 に ち づ け

2次方程式は

$$t^2 - \frac{\sqrt{7}}{2} t + \frac{3}{8} = 0$$

$$8t^2 - 4\sqrt{7}t + 3 = 0$$

$$t = \frac{2\sqrt{7} \pm 2}{8} = \frac{\sqrt{7} \pm 1}{4}$$

$$0^\circ < \theta < 30^\circ \quad \text{より}$$

$$\cos \theta > \sin \theta \quad \text{と} \quad a \neq 1$$

(裏に続く)

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{7}+1}{4}, \sin \theta = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$$

② ㍻)

$$\frac{\sqrt{7}}{4}a = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$$

$$a = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}} = \frac{7+\sqrt{7}}{7}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{よって} \\ 2-a = 2 - \frac{7+\sqrt{7}}{7} = \frac{7-\sqrt{7}}{7} \end{array} \right)$$

よ、 τ

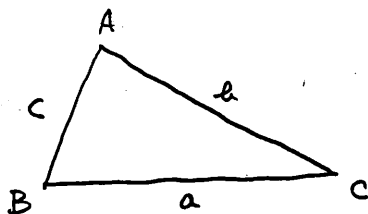
3辺の長さは

$$\underline{\underline{\frac{7+\sqrt{7}}{7}, 1, \frac{7-\sqrt{7}}{7}}}$$

解法2

3辺の長さ a, b, c ($a \geq b \geq c$)

とし、図のような $\triangle ABC$ を定める。



辺と角の大小関係から

$$A \geq B \geq C \quad \text{が成り立つ。}$$

$$(i) \text{ よ) } A = C + 90^\circ$$

$$(ii) \text{ よ) } \text{公差 } d (> 0) \text{ とし。}$$

$$a = b + d, \quad c = b - d$$

(iii) よ)

$$(b+d) + b + (b-d) = 3$$

$$3b = 3$$

$$b = 1$$

よって

$$a = 1+d, \quad c = 1-d$$

余弦定理より

$$\cos(C+90^\circ) = \frac{1^2 + (1-d)^2 - (1+d)^2}{2 \times 1 \times (1-d)}$$

$$-\sin C = \frac{1 + 1 - 2d + d^2 - 1 - 2d - d^2}{2(1-d)}$$

$$\sin C = \frac{-1+4d}{2(1-d)}$$

再度余弦定理より

$$\cos C = \frac{(1+d)^2 + 1 - (1-d)^2}{2(1+d) \times 1}$$

$$= \frac{1+2d+d^2+1-1+2d-d^2}{2(1+d)}$$

$$= \frac{1+4d}{2(1+d)}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \quad \text{より}$$

$$\frac{(1+4d)^2}{4(1+d)^2} + \frac{(1+4d)^2}{4(1+d)^2} = 1$$

$$(4d-1)^2(d+1)^2 + (4d+1)^2(d-1)^2 = 4(d-1)^2(d+1)^2$$

整理して

$$14d^4 + 5d^2 - 1 = 0$$

$$(2d^2+1)(7d^2-1) = 0$$

$$d^2 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$$

$$d^2 > 0 \text{ よ) } d^2 = \frac{1}{7}$$

$$d > 0 \text{ よ) } d = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

よ、 τ

3辺の長さは

$$\underline{\underline{1 + \frac{1}{\sqrt{7}}, 1, 1 - \frac{1}{\sqrt{7}}}}$$

初項 $a_1 = 1$, 公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ を考える。(1) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち, 7 の倍数である項の個数を求めよ。(2) $\{a_n\}$ の初項から第 600 項のうち, 7^2 の倍数である項の個数を求めよ。(3) 初項から第 n 項までの積 $a_1 a_2 \cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。 (2017 九州大)

(1)

$$a_n = 1 + (n-1) \times 4$$

$$= 4n - 3 = 7k_1 \quad (k_1 \in \mathbb{Z})$$

とおくと,

$$4n - 7k_1 = 3$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 4 \times (-1) - 7 \times (-1) = 3 \\ 4(n+1) - 7(k_1+1) = 0 \end{array}$$

$$n+1 = \frac{7}{4}(k_1+1)$$

よ, 2

$$\begin{cases} k_1+1 = 4l_1 \\ n+1 = 7l_1 \end{cases} \quad (l_1 \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 4l_1 - 1 \\ n = 7l_1 - 1 \end{cases} \quad (l_1 \in \mathbb{Z})$$

$$1 \leq n \leq 600 \quad \text{より}$$

$$1 \leq 7l_1 - 1 \leq 600$$

$$2 \leq 7l_1 \leq 601$$

$$\frac{2}{7} \leq l_1 \leq 85 + \frac{6}{7}$$

$$l_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{より}$$

$$l_1 = 1, 2, 3, \dots, 85$$

$$\text{よ, 2} \quad \underline{\underline{85 \text{ 個}}}$$

(2)

$$4n - 3 = 7^2 k_2 \quad (k_2 \in \mathbb{Z})$$

とおくと,

$$4n - 49k_2 = 3$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 4 \times 13 - 49 \times 1 = 3 \\ 4(n-13) - 49(k_2-1) = 0 \end{array}$$

$$n-13 = \frac{49}{4}(k_2-1)$$

よ, 2

$$\begin{cases} k_2-1 = 4l_2 \\ n-13 = 49l_2 \end{cases} \quad (l_2 \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = 4l_2 + 1 \\ n = 49l_2 + 13 \end{cases} \quad (l_2 \in \mathbb{Z})$$

$$1 \leq n \leq 600 \quad \text{より}$$

$$1 \leq 49l_2 + 13 \leq 600$$

$$-12 \leq 49l_2 \leq 587$$

$$-\frac{12}{49} \leq l_2 \leq 11 + \frac{48}{49}$$

$$l_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{より}$$

$$l_2 = 0, 1, 2, \dots, 11$$

$$\text{よ, 2} \quad \underline{\underline{12 \text{ 個}}}$$

(3)

$$l_1 = 35 \text{ のとき } n = 244$$

$$1 \leq 49l_2 + 13 \leq 244 \quad \text{より}$$

$$-12 \leq 49l_2 \leq 4 + \frac{48}{49}$$

$$l_2 \in \mathbb{Z} \quad \text{よ, 2} \quad l_2 = 0, 1, 2, 3, 4$$

また,

$$4n - 3 = 7^3 \quad \text{とおくと}$$

$$4n = 346$$

$$n = 86 + \frac{1}{2}$$

$$4n - 3 = 7^3 \times 2 \quad \text{とおくと}$$

$$4n = 689$$

$$n = 172 + \frac{1}{4}$$

$$4n - 3 = 7^3 \times 3 \quad \text{とおくと}$$

$$4n = 1032$$

$$n = 258$$

$$4n - 3 = 7^3 \times 4 \quad \text{とおくと}$$

$$4n = 1375$$

$$n = 343 + \frac{3}{4}$$

以上により

$$1 \leq n \leq 343 \quad \text{において } a_{233} \text{ のとき } 1^*$$

73 の倍数 である。

よ, 2

$$n = 244 \text{ のとき}$$

$$35 + 5 + 1 = 41 \text{ (5)}$$

7 は素因数 として持つ。

(裏に続く)

$$l_1 = 37 \text{ とき } n = 258$$

$$1 \leq 49l_2 + 13 \leq 258 \quad \text{より}$$

$$-12 \leq 49l_2 \leq 245$$

$$-\frac{12}{49} \leq l_2 \leq 5$$

$$l_2 \in \mathbb{Z} \text{ より } l_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

よ、こ

$$n = 258 \text{ とき}$$

$$37 + 6 + 1 = 44 \text{ (個)}$$

7 は素因数 としてもつ。

$$l_1 = 38 \text{ とき } n = 265$$

$$1 \leq 49l_2 + 13 \leq 265$$

$$-12 \leq 49l_2 \leq 252$$

$$-\frac{12}{49} \leq l_2 \leq 5 + \frac{7}{49}$$

$$l_2 \in \mathbb{Z} \text{ より } l_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

よ、こ

$$n = 265 \text{ とき}$$

$$38 + 6 + 1 = 45 \text{ (個)}$$

7 は素因数 としてもつ。

$$n = 264 \text{ ときは } 44 \text{ (個) となるが}$$

$$\underline{\underline{\min n = 265}}$$