

次の一般項で定義される数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $a_k = 3k^2 - 2k - \frac{5}{2}$

(2) $a_k = \frac{2}{4k^2 - 1}$

(3) $a_k = k \cdot 2^{k+2}$

(4) $a_k = \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$

(1)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(3k^2 - 2k - \frac{5}{2} \right) \\
 &= 3 \times \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) - 2 \times \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{5}{2} n \\
 &= \frac{1}{2} n \{ (n+1)(2n+1) - 2(n+1) - 5 \} \\
 &= \frac{1}{2} n (2n^2 + 3n + 1 - 2n - 2 - 5) \\
 &= \frac{1}{2} n (2n^2 + n - 6) \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{2} n(n+2)(2n-3)}}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)(2k-1)} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right. \\
 &\quad + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \underline{\underline{\frac{n}{2n+1}}}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{とおく} \\
 S_n &= 1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 + \dots + n \cdot 2^{n+2} \\
 \rightarrow 2S_n &= 1 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^6 + \dots + n \cdot 2^{n+3} \\
 -S_n &= \underbrace{2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{n+2}}_{\text{① } 2^3 \quad \text{② } 2 \quad \text{③ } n} - n \cdot 2^{n+3} \\
 -S_n &= \frac{8(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+3} \\
 -S_n &= 2^{n+3} - 8 - n \cdot 2^{n+3} \\
 -S_n &= (1 - n) \cdot 2^{n+3} - 8 \\
 \underline{\underline{S_n}} &= \underline{\underline{(n-1) \cdot 2^{n+3} + 8}}
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - (k+1)} \\
 &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) \\
 &\quad + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \\
 &\quad + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= \underline{\underline{\sqrt{n+1} - 1}}
 \end{aligned}$$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2 + 1$ で表されるとする。

(1) $a_{10} + a_{11} + \dots + a_{20}$ を求めよ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。

(1)

$$\begin{aligned}
 & a_{10} + a_{11} + \dots + a_{20} \\
 &= (a_1 + a_2 + \dots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_9) \\
 &= S_{20} - S_9 \\
 &= 401 - 82 \\
 &= \underline{\underline{319}}
 \end{aligned}$$

(2)

(i) $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= (n^2 + 1) - ((n-1)^2 + 1) \\
 &= n^2 - (n-1)^2 \\
 &= n^2 - (n^2 - 2n + 1) \\
 &= 2n - 1 \quad \text{--- ①}
 \end{aligned}$$

① で $n=1$ のとき

$$a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1 \quad \text{--- ②}$$

(ii) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}
 a_1 &= S_1 \\
 &= 1^2 + 1 \\
 &= 2 \quad \text{--- ③}
 \end{aligned}$$

② と ③ は一致しないので

$$\underline{\underline{a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ 2n-1 & (n \geq 2) \end{cases}}}$$

n を $n \geq 2$ である自然数とすると、次の和を求めよ。

$$1 \cdot (n-1)^2 + 2 \cdot (n-2)^2 + 3 \cdot (n-3)^2 + \cdots + (n-2) \cdot 2^2 + (n-1) \cdot 1^2$$

(2016 近畿大)

$$1 \cdot (n-1)^2 + 2(n-2)^2 + 3(n-3)^2 + \cdots + (n-2) \cdot 2^2 + (n-1) \cdot 1^2.$$

$$= 1^2(n-1) + 2^2(n-2) + \cdots + (n-3)^2 \cdot 3 + (n-2)^2 \cdot 2 + (n-1)^2 \cdot 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (-k^3 + nk^2)$$

$$= - \left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2 + n \times \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1)$$

$$= - \frac{1}{4} n^2(n-1)^2 + \frac{1}{6} n^2(n-1)(2n-1)$$

$$= \frac{1}{12} n^2(n-1) \{ -3(n-1) + 2(2n-1) \}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{12} n^2(n-1)(n+1)}}$$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ で表されるとする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = 4n(n+1)(n+2)$ であることを示せ。

(2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定まる数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を n の式で表せ。

(2015 大分大)

(1)

証明

$$S_n = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

$$= n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6)$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -1 & -5 & -6 \\ \hline & & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array} \right)$$

$$= n(n+1)(n^2 + 5n + 6)$$

$$= n(n+1)(n+2)(n+3)$$

∴ あり。

(i) $n \geq 2$ $n \geq 1$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n(n+1)(n+2)(n+3) - (n-1)n(n+1)(n+2)$$

$$= n(n+1)(n+2)((n+3) - (n-1))$$

$$= 4n(n+1)(n+2) \quad \text{--- ①}$$

① ∴ $n=1$ と $n=2$

$$a_1 = 4 \times 1 \times 2 \times 3 = 24 \quad \text{--- ①'}$$

(ii) $n=1$ $n \geq 1$

$$a_1 = S_1 = 1^4 + 6 \times 1^3 + 11 \times 1^2 + 6 \times 1$$

$$= 1 + 6 + 11 + 6$$

$$= 24 \quad \text{--- ②}$$

①' と ② は一致する。

よ、∴

$$a_n = 4n(n+1)(n+2)$$

(2)

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

$$= \frac{1}{4n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) \right.$$

$$+ \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right)$$

$$+ \dots + \left. \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{8} \times \frac{n^2 + 3n}{2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+3)}{16(n+1)(n+2)}$$

数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \dots$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{37}{50}$ は第何項になるか。
 (2) 第1000項の数を求めよ。
 (3) 初項から第1000項までの和を求めよ。

(2007 中大)

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & & \textcircled{48} & & \textcircled{49} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}, \frac{2}{3} & \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} & \dots & \frac{1}{49}, \dots, \frac{48}{49} & \frac{1}{50}, \frac{2}{50}, \dots, \frac{37}{50}, \dots \end{array}$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 48 \quad \dots$

分母が k の項を k 群 と定めると

$\frac{37}{50}$ は第49群の37項目 であり。

$$(1+2+3+\dots+48)+37$$

$$= \frac{1}{2} \times 48 \times 49 + 37$$

$$= 1176 + 37$$

$$= \underline{\underline{1213 \text{ (項)}}}$$

(2)

第1000項が第 n 群 にあるとすると

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & & \textcircled{n-1} & & \textcircled{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}, \frac{2}{3} & \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} & \dots & \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} & \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots, \bigcirc, \dots \end{array}$$

$1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad n-1 \quad \dots \quad n$

$$1+2+3+\dots+(n-1) < 1000 \leq 1+2+3+\dots+n$$

$$\frac{1}{2}(n-1)n < 1000 \leq \frac{1}{2}n(n+1)$$

を満足しており

$$\begin{cases} (n-1)n < 2000 \\ n(n+1) \geq 2000 \end{cases}$$

これを満たす $n \in \mathbb{N}$ は

$$n = 45$$

よって、第1000項は第45群に存在し

それまでに

$$\frac{1}{2} \times 44 \times 45 = 990 \text{ (項)} \text{ が並んだ "bar"$$

第1000項は第45群の10項目

$$\text{つまり } \underline{\underline{\frac{10}{46}}}$$

(裏に続く)

(3)

第 k 群 は

$$\left(\frac{1}{k+1}, \frac{2}{k+1}, \dots, \frac{k}{k+1} \right)$$

となり、その和 $G(k)$ は

$$\begin{aligned} G(k) &= \frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+1} + \dots + \frac{k}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} (1+2+\dots+k) \\ &= \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{2} k(k+1) \\ &= \frac{1}{2} k \end{aligned}$$

よって、

初項から第 1000 項までの和 S は

$$\begin{aligned} S &= G(1) + G(2) + \dots + G(44) \\ &\quad + \frac{1}{46} + \frac{2}{46} + \dots + \frac{10}{46} \\ &= \sum_{k=1}^{99} G(k) + \frac{1}{46} (1+2+\dots+10) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{44} k + \frac{1}{46} \times \frac{1}{2} \times 10 \times 11 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 44 \times 45 + \frac{55}{46} \\ &= 495 + \frac{55}{46} \\ &= \frac{22825}{46} \end{aligned}$$

自然数の列 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, …… から 3 の倍数と 5 の倍数を除いて得られる数列を $\{a_n\}$ とおく。

- (1) a_5, a_{10} を求めよ。
 (2) k が自然数のとき, $a_{k+8} - a_k$ を求めよ。
 (3) $\sum_{n=1}^m a_n > 2000$ を満たす最小の自然数 m を求めよ。

(1)

① ② ✕ ④ ✕ ✕ ⑦ ⑧ ✕ ✕
 ⑪ ✕ ⑬ ⑭ ⑮ ⑯ ⑰ ✕ ⑲ ✕

$$\underline{a_5 = 8, a_{10} = 17}$$

(2)

$l \in \mathbb{Z}$ とし
 $15l+1, 15l+2, \dots, 15l+14$ の中で
 3 の倍数と 5 の倍数を除いて得られる数列は

$$15l+r \quad (r=1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14)$$

8 を周期として $\{a_n\}$ は $15l+r$ の形
 で与えられるから

$$\begin{aligned} a_{k+8} - a_k &= \{15(l+1)+r\} - \{15l+r\} \\ &= \underline{15} \end{aligned}$$

(3)

$\{a_n\}$ を 8 個ずつに群に分けると。

第 k 群は

$$15(k-1)+1, 15(k-1)+2, 15(k-1)+4, \\ \dots, 15(k-1)+14$$

で構成される。

第 k 群の和 $G(k)$ は

$$\begin{aligned} G(k) &= 15(k-1) \times 8 + (1+2+4+7+8+11+13+14) \\ &= 120(k-1) + 60 \\ &= 120k - 60 \end{aligned}$$

a_m が第 N 群にあるとて

$$\sum_{k=1}^{N-1} G(k) \leq 2000 < \sum_{k=1}^N G(k)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N G(k) &= \sum_{k=1}^N 60(2k-1) \\ &= 60 \times \frac{(1+2N-1)N}{2} \\ &= 60N^2 \end{aligned}$$

$$60(N-1)^2 \leq 2000 < 60N^2$$

$$(N-1)^2 \leq 33 + \frac{2}{6} < N^2$$

これを満たす $N \in \mathbb{N}$ は

$$N = 6$$

よて

a_m は第 6 群に存在し。

それまでの和は

$$60 \times 5^2 = 1500$$

であり。

第 6 群は

$$\textcircled{76}, \textcircled{77}, \textcircled{79}, \textcircled{82}, \textcircled{83}, \textcircled{86}, \textcircled{88}, \textcircled{89}$$

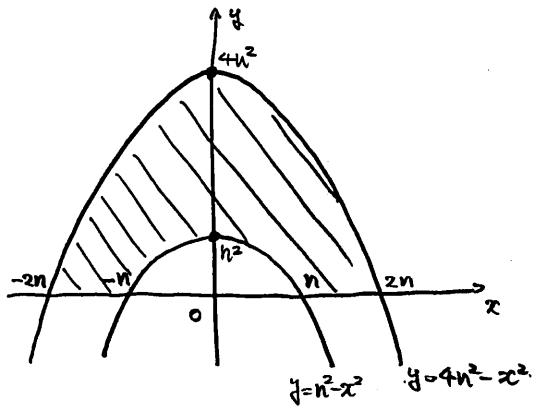
であり。

$$\begin{aligned} 1500 + 76 + 77 + 79 + 82 + 83 + 86 &= 1983 \\ 1983 + 88 &= 2071 \end{aligned}$$

なので

$$\underline{m = 47}$$

自然数 n について、2 曲線 $y = n^2 - x^2$ と $y = 4n^2 - x^2$ 、および x 軸の 3 つで囲まれた図形(周囲を含む)上にある格子点の個数を求めよ。ここで、格子点とは、 x 座標、 y 座標がともに整数である点である。



$x = 0$ のとき

格子点 は $y = n^2, n^2+1, n^2+2, \dots, 4n^2$

∴

$$4n^2 - (n^2 - 1) = 3n^2 + 1 \text{ (個)}$$

$x = k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) のとき

格子点 は $y = n^2 - k^2, n^2 - k^2 + 1, n^2 - k^2 + 2, \dots, 4n^2 - k^2$

∴

$$(4n^2 - k^2) - (n^2 - k^2 - 1) = 3n^2 + 1 \text{ (個)}$$

$x = k$ ($k = n+1, n+2, n+3, \dots, 2n$) のとき

格子点 は $y = 0, 1, 2, \dots, 4n^2 - k^2$

∴

$$4n^2 - k^2 + 1 \text{ (個)}$$

y 軸に関して対称な ∴

求める格子点の個数は

$$(3n^2 + 1) + (3n^2 + 1) \times n + \sum_{k=n+1}^{2n} (4n^2 - k^2 + 1)$$

$$= (3n^2 + 1)(n+1) + (4n^2 + 1) \times n - \sum_{k=n+1}^{2n} k^2$$

∴

$$\sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+3)^2 + \dots + (2n)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (n+k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2nk + n^2)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 2n \times \frac{1}{2} n(n+1) + n^3$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + n^2(n+1) + n^3$$

$$= \frac{1}{6} (2n^3 + 3n^2 + n) + 2n^3 + n^2$$

$$= \frac{1}{6} (14n^3 + 9n^2 + n)$$

$$= 3n^3 + 3n^2 + n + 1 + 4n^3 + n - \frac{1}{6} (14n^3 + 9n^2 + n)$$

$$= 7n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

$$- \frac{1}{6} (14n^3 + 9n^2 + n)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6} (28n^3 + 9n^2 + 11n + 6)}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題46]

(1) 数列 $1, 2, 3, \dots, n$ において, 隣接する2数の積の総和を求めよ。

(2) 数列 $1, 2, 3, \dots, n$ において, 互いに相異なり, かつ隣接しない2数の積の総和を求めよ。

(1)

求める和 S は

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + (n-1)n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) \left((k+2) - (k-1) \right) \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n-1} \left(k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1) \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\begin{aligned} & \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} - 0 \cdot 1 \cdot 2 \\ & + \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4} - \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \\ & + \cancel{3 \cdot 4 \cdot 5} - \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ & + \dots \\ & + (n-1)n(n+1) - (n-2)(n-1)n \end{aligned} \right)$$

$$= \frac{1}{3} (n-1)n(n+1) \quad (n \geq 2)$$

(2)

x	1	2	3	...	n
1	X	X			
2	X	X	X		
3		X	X		
...					
n					X

求める和 T は

$$(1+2+3+\dots+n)^2 = 2T + 2S + (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)$$

$$\left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 = 2T + \frac{2}{3} (n-1)n(n+1) + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$2T = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2 - \frac{2}{3} (n-1)n(n+1) - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$2T = \frac{1}{12} n(n+1) \{ 3n(n+1) - 8(n-1) - 2(2n+1) \}$$

$$T = \frac{1}{24} n(n+1) (3n^2 - 9n + 6)$$

$$= \frac{1}{8} n(n+1) (n^2 - 3n + 2)$$

$$= \frac{1}{8} (n-2)(n-1)n(n+1) \quad (n \geq 3)$$

異なる n 個のものから r 個を取る組合せの総数を ${}_nC_r$ で表す。(1) 2以上の自然数 k について, ${}_{k+3}C_4 = {}_{k+4}C_5 - {}_{k+3}C_5$ を証明せよ。(2) 和 $\sum_{k=1}^n {}_{k+3}C_4$ を求めよ。(3) 和 $\sum_{k=1}^n (k^4 + 6k^3)$ を求めよ。

(2016 静岡大)

(1) (証明)

$$\begin{aligned}
 {}_{k+4}C_5 - {}_{k+3}C_5 &= \frac{(k+4)!}{5!(k-1)!} - \frac{(k+3)!}{5!(k-2)!} \\
 &= \frac{(k+4)!}{5!(k-1)!} - \frac{(k-1)(k+3)!}{5!(k-1)!} \\
 &= \frac{\{(k+4) - (k-1)\}(k+3)!}{5!(k-1)!} \\
 &= \frac{5(k+3)!}{5!(k-1)!} \\
 &= \frac{(k+3)!}{4!(k-1)!} \\
 &= {}_{k+3}C_4
 \end{aligned}$$

よって

等式は成り立つ。 ■

(2) ($n \geq 2$ のとき)

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n {}_{k+3}C_4 &= {}_4C_4 + \sum_{k=2}^n {}_{k+3}C_4 \\
 &= 1 + \sum_{k=2}^n ({}_{k+4}C_5 - {}_{k+3}C_5) \\
 &= 1 + (\cancel{{}_6C_5} - {}_5C_5) \\
 &\quad + (\cancel{{}_7C_5} - \cancel{{}_6C_5}) \\
 &\quad + (\cancel{{}_8C_5} - \cancel{{}_7C_5}) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + (\cancel{{}_{n+4}C_5} - \cancel{{}_{n+3}C_5}) \\
 &= 1 + {}_{n+4}C_5 - {}_5C_5 \\
 &= {}_{n+4}C_5 \\
 &= \frac{{}_{n+4}P_5}{5!} \\
 &= \frac{1}{120} (n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n \quad (n=1 \text{ でも成り立つ})
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 {}_{k+3}C_4 &= \frac{{}_{k+3}P_4}{4!} \\
 &= \frac{1}{24} (k+3)(k+2)(k+1)k \\
 &= \frac{1}{24} (k^2+3k)(k^2+3k+2) \\
 &= \frac{1}{24} \{(k^2+3k)^2 + 2(k^2+3k)\} \\
 &= \frac{1}{24} (k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k)
 \end{aligned}$$

より

$$k^4 + 6k^3 = 24 {}_{k+3}C_4 - 11k^2 - 6k$$

$$\sum_{k=1}^n (k^4 + 6k^3) = 24 \sum_{k=1}^n {}_{k+3}C_4 - \sum_{k=1}^n (11k^2 + 6k)$$

$$\begin{aligned}
 &= 24 \left(\sum_{k=1}^n (11k^2 + 6k) \right) \\
 &= 11 \times \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 6 \times \frac{1}{2} n(n+1) \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1) \{ 11(2n+1) + 18 \} \\
 &= \frac{1}{6} n(n+1) (22n+29) \\
 &= \frac{1}{5} n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\
 &\quad - \frac{1}{6} n(n+1)(22n+29) \\
 &= \frac{1}{30} n(n+1) \{ 6(n+2)(n+3)(n+4) - 5(22n+29) \} \\
 &= \frac{1}{30} n(n+1) \{ 6n^3 + 54n^2 + 156n + 144 - (110n + 145) \} \\
 &= \frac{1}{30} n(n+1) (6n^3 + 54n^2 + 46n - 1)
 \end{aligned}$$

自然数 n について、 a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとする。

(1) a_1, a_2, a_3, a_4 の値を求めよ。

(2) 自然数 m について、 $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{m^2}$ を m を用いて表せ。

(2011 宮崎大)

(1) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2$

(2)

	a_n	個数
$a_1 \cdots a_3$	1	3
$a_4 \cdots a_8$	2	5
$a_9 \cdots a_{15}$	3	7
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{k^2} \cdots a_{(k+1)^2-1}$	k	$(k+1)^2 - 1 - (k^2 - 1)$ $= 2k + 1$

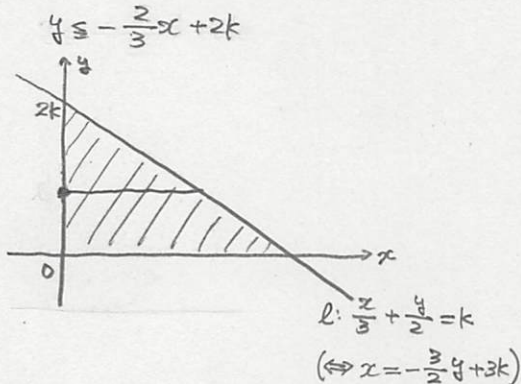
$$\begin{aligned}
 S &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{m^2} \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} k(2k+1) + m \\
 &= \sum_{k=1}^{m-1} (2k^2 + k) + m \\
 &= 2 \times \frac{1}{6} (m-1)m(2m-1) + \frac{1}{2} (m-1)m + m \\
 &= \frac{1}{6} m \{ 2(m-1)(2m-1) + 3(m-1) + 6 \} \\
 &= \frac{1}{6} m (4m^2 - 6m + 2 + 3m - 3 + 6) \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{6} m (4m^2 - 3m + 5)}}
 \end{aligned}$$

- (1) k を0以上の整数とすると、 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq k$ を満たす0以上の整数 x, y の組 (x, y) の個数を a_k とする。 a_k を k の式で表せ。
- (2) n を0以上の整数とすると、 $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z \leq n$ を満たす0以上の整数 x, y, z の組 (x, y, z) の個数を b_n とする。 b_n を n の式で表せ。

(2012 横浜国立大)

(1)

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq k \quad \text{より}$$



$y = m$ における格子点の個数を C_m とおく。

$y = 2m$ のとき

l 上の点 $x = -3m + 3k$

なので

格子点 は

$$x = 0, 1, 2, \dots, -3m + 3k \quad \text{より}$$

$$C_{2m} = -3m + 3k + 1$$

$y = 2m - 1$ のとき

l 上の点 $x = -\frac{3}{2}(2m-1) + 3k$

$$= -3m + \frac{3}{2} + 3k$$

$$= -3m + 3k + 1 + \frac{1}{2}$$

なので

格子点 は

$$x = 0, 1, 2, \dots, -3m + 3k + 1 \quad \text{より}$$

$$C_{2m-1} = -3m + 3k + 2 \quad \text{(b)}$$

よって

$$a_k = C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \dots + C_{2k}$$

$$= C_0 + \sum_{m=1}^k (C_{2m-1} + C_{2m})$$

$$= 3k+1 + \sum_{m=1}^k (-6m + 6k + 3)$$

$$= 3k+1 + (6k-3) + (6k-9) + (6k-15) + \dots + 3$$

$$= 3k+1 + \frac{(3+(6k-3))k}{2}$$

$$= 3k+1 + 3k^2$$

$$= \underline{\underline{3k^2 + 3k + 1}}$$

(2)

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z \leq n \quad \text{より}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq n - z$$

$$n - z = k \quad \text{とおくと}$$

平面 $z = n - k$ における格子点の個数は

$$a_k = 3k^2 + 3k + 1$$

$$\left(\begin{array}{l} k \geq 0, n-k \geq 0 \quad \text{より} \\ 0 \leq k \leq n \quad \text{のもとで考えて} \end{array} \right)$$

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3k + 1)$$

$$= 1 + 3 \sum_{k=1}^n k(k+1) + n$$

$$= 1 + 3 \sum_{k=1}^n \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\} \times \frac{1}{3} + n$$

$$= 1 + \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} - \cancel{0 \cdot 1 \cdot 2}$$

$$+ \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4} - \cancel{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$+ \cancel{3 \cdot 4 \cdot 5} - \cancel{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$+ \dots$$

$$+ n(n+1)(n+2) - \cancel{(n-1)n(n+1)} + n$$

$$= n+1 + n(n+1)(n+2)$$

$$= (n+1)(1+n(n+2))$$

$$= (n+1)(n^2+2n+1)$$

$$= \underline{\underline{(n+1)^3}}$$