[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題120]

数列 a_1, a_2, ……, a_n は $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n+8$ ($n=1$, 2, 3, ……) を満たす。

(1) 一般項 a_n を n で表せ。

(2) 初項から第 n 項までの和 S_n を n で表せ。

(1)

$$a_{n+1}=3a_n+8$$
$$-)\ -4=3(-4)+8$$
$$a_{n+1}+4=3(a_n+4)$$

$\alpha=3\alpha+8$

$-2\alpha=8$

$\alpha=-4$

$$a_n+4=(a_1+4)\times 3^{n-1}$$
$$a_n+4=6\times 3^{n-1}$$
$$a_n=2\times 3^n-4$$

(2)

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{n}(2\times 3^k-4)$$
$$=(2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+2\cdot 3^n)-4n$$
$$=\frac{2\cdot 3(3^n-1)}{3-1}-4n$$
$$=3(3^n-1)-4n$$
$$=3^{n+1}-4n-3$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題121]

次の関係式を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(1) $a_1=\frac{1}{4}$, $a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

(1)

帰納的に $a_n \neq 0$ であり

両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3a_n+1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+3$$

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\times 3$$

$$\frac{1}{a_n}=4+3n-3$$

$$\frac{1}{a_n}=3n+1$$

よって, $a_n=\frac{1}{3n+1}$

(2) 解法1

両辺を 3^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}$$

$$-)\quad 1=\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{3}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}-1=\frac{2}{3}\left(\frac{a_n}{3^n}-1\right)$$

$\alpha=\frac{2}{3}\alpha+\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}\alpha=\frac{1}{3}$

$\alpha=1$

$$\frac{a_n}{3^n}-1=\left(\frac{a_1}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{3^n}-1=-\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\frac{a_n}{3^n}-1=-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{a_n}{3^n}=1-\frac{2^n}{3^n}$$

$$a_n=3^n-2^n$$

解法2

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n}$$

$n=1$ $\quad \frac{a_2}{2^2}-\frac{a_1}{2^1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}$

$n=2$ $\quad \frac{a_3}{2^3}-\frac{a_2}{2^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$n=3$ $\quad \frac{a_4}{2^4}-\frac{a_3}{2^3}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\vdots$

$n=n-1$ $\quad \frac{a_n}{2^n}-\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (+ $(n\geqq 2)$

$$\frac{a_n}{2^n}-\frac{a_1}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}$$ ($n=1$でも成り立つ)

$$\frac{a_n}{2^n}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$$

$$\frac{a_n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n-1$$

$$a_n=3^n-2^n \quad (n\geqq 1)$$

(裏に続く)

解法3

$a_{n+1} = 2a_n + 3^n$ ——① で

$a_n = k\cdot 3^n$ とおくと

$k\cdot 3^{n+1} = 2k\cdot 3^n + 3^n$

$3^n(3k-2k-1)=0$

$3^n(k-1)=0$

よって $k=1$

つまり $a_n = 3^n$ は ① を満たす.

$$
\begin{array}{rl}
 & a_{n+1} = 2a_n + 3^n \\
-) & 3^{n+1} = 2\cdot 3^n + 3^n \\
\hline
 & a_{n+1} - 3^{n+1} = 2(a_n - 3^n)
\end{array}
$$

$a_n - 3^n = (a_1 - 3^1)\cdot 2^{n-1}$

$a_n - 3^n = -2\cdot 2^{n-1}$

$\underline{\underline{a_n = 3^n - 2^n}}$

数列$\{a_n\}$が$a_1=4$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n+3}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められている。

(1) $b_n=\dfrac{a_n-3}{a_n+1}$ とおくとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2015 南山大)

(1)

$$a_{n+1}=\frac{4a_n+3}{a_n+2}$$ より

$$a_{n+1}+1=\frac{4a_n+3}{a_n+2}+1$$

$$a_{n+1}+1=\frac{5a_n+5}{a_n+2}$$

$a_1>0$ なので 帰納的に $a_n>0$ であり.

両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n+2}{5a_n+5} \quad \text{①}$$

また.

$$a_{n+1}-3=\frac{4a_n+3}{a_n+2}-3$$

$$a_{n+1}-3=\frac{a_n-3}{a_n+2} \quad \text{②}$$

①,② の辺々をかけて.

$$\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\frac{a_n-3}{5(a_n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}-3}{a_{n+1}+1}=\frac{1}{5}\times\frac{a_n-3}{a_n+1}$$

よって

$$b_{n+1}=\frac{1}{5}b_n$$

$$\left(\begin{aligned} b_n&=\frac{a_n-3}{a_n+1} \quad \text{より} \\ b_1&=\frac{a_1-3}{a_1+1}=\frac{1}{5}\end{aligned}\right)$$

$b_{n+1}=\frac{1}{5}b_n$ より

$$b_n=b_1\times\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$\underline{\underline{b_n=\left(\frac{1}{5}\right)^n}}$$

(2)

$$\frac{a_n-3}{a_n+1}=\frac{1}{5^n}$$

$$5^n(a_n-3)=a_n+1$$

$$(5^n-1)a_n=3\cdot5^n$$

$n\geqq1$ で $5^n-1\neq0$ より

$$\underline{\underline{a_n=\frac{3\cdot5^n+1}{5^n-1}}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A367]

次の条件で定められる数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) 次が成立するように，実数s，t $(s>t)$を定めよ。

$$\begin{cases} a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n) \\ a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n) \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(2) 一般項a_nを求めよ。

(2014 北海道大)

(1)

$$a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}-3a_n=0$$

$$x^2-x-3=0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$$

2つの解 α,β $(\alpha>\beta)$ とおく

つまり

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{13}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

とおくと

$$a_{n+2}-(\alpha+\beta)a_{n+1}+\alpha\beta a_n=0$$

とでき.

$$\begin{cases} a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n) \\ a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n) \end{cases}$$

とできるので

$$s=\alpha,\ t=\beta$$

つまり.

$$s=\frac{1+\sqrt{13}}{2},\ t=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

(2)

(1)より

$$\begin{cases} a_{n+1}-sa_n=(a_2-sa_1)\cdot t^{n-1} \\ a_{n+1}-ta_n=(a_2-ta_1)s^{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1}-sa_n=(1-s)t^{n-1} \\ -) & a_{n+1}-ta_n=(1-t)s^{n-1} \\ \hline & (-s+t)a_n=(1-s)t^{n-1}-(1-t)s^{n-1} \end{array}$$

(ここで

$$1-s=\frac{1-\sqrt{13}}{2}=t$$

$$1-t=\frac{1+\sqrt{13}}{2}=s$$

$$-s+t=-\sqrt{13}$$ より)

$$-\sqrt{13}\,a_n=t^n-s^n$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{13}}(s^n-t^n)$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A368]

$a_1=3$, $\sum_{k=1}^{n+1} a_k=4a_n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列$\{a_n\}$がある。

(1) nを2以上の自然数とするとき，a_{n+1}をa_n，a_{n-1}で表せ。

(2) $a_{n+1}-2a_n$をnの式で表せ。

(3) a_nをnの式で表せ。

(2017 大分大)

(1)

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくと

$\sum_{k=1}^{n+1} a_k = 4a_n+1$ より

$$S_{n+1} = 4a_n+1 \quad (n\geqq 1)$$

$$-)\ S_n = 4a_{n-1}+1 \quad (n\geqq 2)$$

$$S_{n+1}-S_n = 4a_n-4a_{n-1} \quad (n\geqq 2)$$

よって $\underline{\underline{a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}}}$

(2)

$a_{n+1}=4a_n-4a_{n-1}$ より

$$a_{n+1}-2a_n=2a_n-4a_{n-1}$$

$$a_{n+1}-2a_n=2(a_n-2a_{n-1})$$

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)\times 2^{n-1}$$

ここで
与漸化式で $n=1$ として

$$\sum_{k=1}^{2} a_k=4a_1+1$$

$$a_1+a_2=4a_1+1$$

$$a_2=3a_1+1$$

$$=10$$

$$a_{n+1}-2a_n=4\times 2^{n-1}$$

よって

$\underline{\underline{a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}}}$

(3)

$$a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}$$

$$a_{n+1}=2a_n+2^{n+1}$$

両辺を 2^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+1$$

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2^1}+(n-1)\times 1$$

$$\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{2}+n-1$$

$$\frac{a_n}{2^n}=n+\frac{1}{2}$$

$\underline{\underline{a_n=(2n+1)\cdot 2^{n-1}}}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A369]

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=8a_n^{\,2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $b_n=\log_2 a_n$ とおく。b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $P_n=a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$ とおく。数列$\{P_n\}$の一般項を求めよ。

(4) $P_n>10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2017 大阪大)

(1)

$a_1>0$ より

帰納的に $a_n>0$

$a_{n+1}=8a_n^{2}$ より

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8a_n^{2}$

$\log_2 a_{n+1}=\log_2 8+\log_2 a_n^{2}$

$\log_2 a_{n+1}=2\log_2 a_n+3$

よって

$\underline{\underline{b_{n+1}=2b_n+3}}$

(2)

$$\begin{array}{rl} & b_{n+1}=2b_n+3 \\ -) & -3=2\times(-3)+3 \\ \hline & b_{n+1}+3=2(b_n+3) \end{array}$$

$\alpha=2\alpha+3$
$-\alpha=3$
$\alpha=-3$

$b_n+3=(b_1+3)\times 2^{n-1}$

(ここで
$b_1=\log_2 a_1=1$ より)

$b_n+3=4\times 2^{n-1}$

$\underline{\underline{b_n=2^{n+1}-3}}$

(3)

$\log_2 P_n=\log_2 a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$

$=\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots\cdots+\log_2 a_n$

$=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$

$=\sum_{k=1}^{n} b_k$

$=\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-3)$

$=2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots+2^{n+1}-3n$

$=\dfrac{2^2(2^n-1)}{2-1}-3n$

$=2^{n+2}-3n-4$

$\log_2 P_n=2^{n+2}-3n-4$ より

$\underline{\underline{P_n=2^{2^{n+2}-3n-4}}}$

(4) $\boxed{解法1}$

$P_n>10^{100}$ より

$2^{2^{n+2}-3n-4}>10^{100}$

$n=6$ のとき

$(左辺)=2^{2^8-18-4}$

$=2^{234}$

$=(2^9)^{26}$

$<(10^3)^{26}=10^{78}$

$n=7$ のとき

$(左辺)=2^{2^9-21-4}$

$=2^{487}$

$=(2^{10})^{48}\times 2^7$

$>(10^3)^{48}\times 128=10^{144}\times 128$

であり、

$2^{n+2}-3n-4$ は増加関数なので

$\underline{\underline{\min n=7}}$

(裏に続く)

(4) $\boxed{\text{解法2}}$

$P_n > 10^{100}$ より

$\log_2 P_n > 100 \log_2 10$ ——— ①

ここで

$\log_2 P_{n+1} - \log_2 P_n$

$= \{2^{n+3} - 3(n+1) - 4\} - \{2^{n+2} - 3n - 4\}$

$= 2^{n+3} - 2^{n+2} - 3$

$= 2^{n+2} - 3 > 0 \quad (\because n \geqq 1)$

よって

$\log_2 P_{n+1} > \log_2 P_n$ となり.

$\log_2 P_n$ は増加関数であるので

① を満たす $\min n$ を考えるとよい.

ここで

$\log_2 8 < \log_2 10 < \log_2 16$ より

$3 < \log_2 10 < 4$

$300 < 100 \log_2 10 < 400$.

であり

$$\begin{cases} \log_2 P_6 = 2^8 - 3 \times 6 - 4 = 234 \\ \log_2 P_7 = 2^9 - 3 \times 7 - 4 = 487 \end{cases}$$

であるので

$\underline{\underline{\min n = 7.}}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題47]

数列$\{a_n\}$が次の条件を満たしている。

$$\begin{cases} a_1=99900 \\ n\geqq 2 \text{ のとき，} a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=n^2a_n \end{cases}$$

このとき，a_{999}を求めよ。

(2007 早稲田大)

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおくと.

$$S_n=n^2a_n \quad (n\geqq 2)$$
$$-)\ S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1} \quad (n\geqq 3)$$

$$S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1} \quad (n\geqq 3)$$

$$a_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$$

$$(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$$

$n\neq 1$ より

$$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1}$$

$$n(n+1)a_n=(n-1)na_{n-1} \quad (n\geqq 3)$$

$\{n(n+1)a_n\}$ は定数数列 であり.

$$n(n+1)a_n=2\cdot 3\cdot a_2$$

ここで

$S_2=2^2a_2$ より.

$$a_1+a_2=4a_2$$
$$3a_2=a_1$$
$$a_2=\frac{1}{3}a_1$$
$$=33300$$

$$a_n=\frac{2\times 3\times 33300}{n(n+1)}$$

よって

$$a_{999}=\frac{2\times 3\times 33300}{999\times 1000}$$
$$=\frac{1}{5}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B370]

数列$\{a_n\}$を$a_1=1$，$n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}=n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を$b_n=a_1a_2\cdots\cdots a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定める。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項と，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$とおくとき，S_nを求めよ。

(2013 愛知教育大)

(1)

$$\boxed{n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}=n}$$

$n=2$　$\cancel{2^2a_2}-1^2a_1=2$

$n=3$　$\cancel{3^2a_3}-\cancel{2^2a_2}=3$

$n=4$　$\cancel{4^2a_4}-\cancel{3^2a_3}=4$

⋮

$n=n$　$n^2a_n-\cancel{(n-1)^2a_{n-1}}=n$　(+

$n^2a_n-a_1=2+3+4+\cdots+n$ $(n\geqq2)$

$n^2a_n=1+2+3+\cdots+n$

$n^2a_n=\frac{1}{2}n(n+1)$　($n=1$でも成り立つ)

よって　$a_n=\frac{n+1}{2n}$

$b_n=a_1a_2\cdots\cdots a_n$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}\right)\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\right)\times\cdots\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\frac{1}{2^n}\times\left(\cancel{\frac{2}{1}}\times\cancel{\frac{3}{2}}\times\cancel{\frac{4}{3}}\times\cdots\times\cancel{\frac{n+1}{n}}\right)$

$=\frac{n+1}{2^n}$

(2)

$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$

$S_n=2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2^2}+4\times\frac{1}{2^3}+\cdots+(n+1)\times\frac{1}{2^n}$

$-)\ \frac{1}{2}S_n=\qquad 2\times\frac{1}{2^2}+3\times\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\cdots+(n+1)\times\frac{1}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{2}S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$

$S_n=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^n}$

$=2+\dfrac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^n}$

$=2+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{n+1}{2^n}$

$=3-\frac{2+n+1}{2^n}$

$=3-\frac{n+3}{2^n}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B371]

自然数 n に対して，有理数 a_n，b_n を $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n=\dfrac{a_n+b_n\sqrt{3}}{2}$ で定める。

(1) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ。

(2) $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるような実数 k の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2013 昭和薬科大)

(1)

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n=\dfrac{a_n+b_n\sqrt{3}}{2}$ ―― ① なので

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}}{2}$ より

$$\frac{a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}}{2}=\frac{a_n+b_n\sqrt{3}}{2}\times\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$2a_{n+1}+2b_{n+1}\sqrt{3}=(a_n+3b_n)+(a_n+b_n)\sqrt{3}$$

$a_n,\ b_n\in\mathbb{Q}$ なので

$$\begin{cases}2a_{n+1}=a_n+3b_n\\ 2b_{n+1}=a_n+b_n\end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{3}{2}b_n\\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}b_n\end{cases}$$

(2)

$$a_{n+1}+kb_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2}b_n+\frac{k}{2}a_n+\frac{k}{2}b_n$$

$$=\frac{k+1}{2}a_n+\frac{k+3}{2}b_n$$

$k=-1$ とすると

$a_{n+1}-b_{n+1}=b_n$

となり，等比数列 とは いえない

$k\neq-1$ より

$$a_{n+1}+kb_{n+1}=\frac{k+1}{2}\left(a_n+\frac{k+3}{k+1}b_n\right)$$

等比数列 となるには

$$k=\frac{k+3}{k+1}$$

$$k^2+k=k+3$$

$$k^2=3$$

$$\underline{k=\pm\sqrt{3}}$$

(3)

① で $n=1$ として

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}=\frac{a_1+b_1\sqrt{3}}{2}$$

$$a_1+b_1\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$$

$a_1,\ b_1\in\mathbb{Q}$ なので

$a_1=1,\ b_1=1$

$k=\sqrt{3}$ のとき

$$a_{n+1}+\sqrt{3}b_{n+1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}(a_n+\sqrt{3}b_n)$$

$$a_n+\sqrt{3}b_n=(a_1+\sqrt{3}b_1)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n+\sqrt{3}b_n=2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^n \text{ ―― ②}$$

$k=-\sqrt{3}$ のとき

$$a_{n+1}-\sqrt{3}b_{n+1}=\frac{-\sqrt{3}+1}{2}(a_n-\sqrt{3}b_n)$$

$$a_n-\sqrt{3}b_n=(a_1-\sqrt{3}b_1)\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n-\sqrt{3}b_n=2\left(\frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)^n \text{ ―― ③}$$

② ＋ ③ より

$$2a_n=2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n+2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

よって

$$\underline{a_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B372]

1以上 n 以下の自然数の中から異なる3個を選び，その中の最大数から最小数を引いた値を考える。すべての選び方について，その値を合計したものを s_n とする。ただし，$n \geqq 3$ とする。

(1) s_3，s_4，s_5 を求めよ。

(2) $s_{k+1}-s_k$ $(k \geqq 3)$ を k を用いて表せ。

(3) s_n を n を用いて表せ。

(2011 前橋工科大)

(1)

$n=3$ のとき

$\{1,2,3\}$ $\quad S_3=2$

$n=4$ のとき

$\{1,2,3,4\}$

$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$

$$S_4=2+3+3+2=10$$

$n=5$ のとき

$\{1,2,3,4,5\}$

$\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$,
$\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$,
$\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$,
$\{3,4,5\}$

$$\begin{aligned} S_5 &= 2+3+4+3+4+4 \\ &\quad +2+3+3+2 \\ &= 2\times3+3\times4+4\times3 \\ &= 6+12+12 \\ &= 30 \end{aligned}$$

よって

$$\underline{\underline{S_3=2,\ S_4=10,\ S_5=30}}$$

(2)

$\{1,2,3,\cdots,k-1,k\}$ の要素だけを用いたものの和は S_k なので

$S_{k+1}-S_k$ とは

$\{1,2,3,\cdots,k-1,k\}$ の要素から2個と $k+1$ を用いたものの和を意味する．

最大数	最小数	差	もう1つ
$k+1$	1	k	$k-1$ コ
$k+1$	2	$k-1$	$k-2$ コ
$k+1$	3	$k-2$	$k-3$ コ
⋮	⋮	⋮	⋮
$k+1$	$k-1$	2	1 コ

よって

$$\begin{aligned} S_{k+1}-S_k &= k(k-1)+(k-1)(k-2)+(k-2)(k-3) \\ &\quad +\cdots+2\times1 \\ &= \sum_{l=1}^{k-1} l(l+1) \\ &= \sum_{l=1}^{k-1}\{l(l+1)(l+2)-(l-1)l(l+1)\}\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\{1\cdot2\cdot3-0\cdot1\cdot2 \\ &\qquad +2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3 \\ &\qquad +3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4 \\ &\qquad +\cdots \\ &\qquad +(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}(k-1)k(k+1)}} \end{aligned}$$

(3)

$$\boxed{S_{k+1}-S_k=\frac{1}{3}(k-1)k(k+1)}$$

$k=3$ $\quad S_4-S_3=\frac{1}{3}\cdot2\cdot3\cdot4$

$k=4$ $\quad S_5-S_4=\frac{1}{3}\cdot3\cdot4\cdot5$

$k=5$ $\quad S_6-S_5=\frac{1}{3}\cdot4\cdot5\cdot6$

⋮

$k=n-1$ $\quad S_n-S_{n-1}=\frac{1}{3}(n-2)(n-1)n$

(+

$$S_n-S_3=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-3}(k+1)(k+2)(k+3) \quad (n\geqq4)$$

$$\begin{aligned} S_n-2 &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-3}\{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \\ &\qquad -k(k+1)(k+2)(k+3)\}\times\frac{1}{4} \\ S_n &= 2+\frac{1}{12}\{2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4 \\ &\qquad +3\cdot4\cdot5\cdot6-2\cdot3\cdot4\cdot5 \\ &\qquad +4\cdot5\cdot6\cdot7-3\cdot4\cdot5\cdot6 \\ &\qquad +\cdots \\ &\qquad +(n-2)(n-1)n(n+1)-(n-3)(n-2)(n-1)n\} \\ &= 2+\frac{1}{12}(n-2)(n-1)n(n+1)-2 \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{12}(n-2)(n-1)n(n+1)}} \end{aligned}$$

($n=3$ でも成り立つ)