[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題122]

任意の自然数nについて，等式$1^3+2^3+\cdots\cdots+n^3=\dfrac{n^2(1+n)^2}{4}$が成り立つことを，数学的帰納法により証明せよ。

$\boxed{\text{証明}}$

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=1^3=1$$

$$(\text{右辺})=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$$

となり．与等式は成り立つ．

[Ⅱ] $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

与等式が成り立つと仮定する．

つまり

$$1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3=\frac{k^2(1+k)^2}{4}$$

が成り立つ．

$n=k+1$ のとき

$$(\text{左辺})=1^3+2^3+\cdots\cdots+k^3+(k+1)^3$$

$$=\frac{k^2(1+k)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2}{4}\{k^2+4(k+1)\}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{4}(k^2+4k+4)$$

$$=\frac{(k+1)^2(2+k)^2}{4}=(\text{右辺})$$

となり

$n=k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ．

[Ⅰ],[Ⅱ] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

与等式は成り立つ． ■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題123]

n を自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$2^n \geqq n^2 - n + 2$$

証明

[I] $n=1$ のとき

$(左辺) = 2$

$(右辺) = 1^2 - 1 + 2 = 2$

となり，与不等式は成り立つ.

[II] $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

与不等式が成り立つと仮定する.

つまり

$$2^k \geqq k^2 - k + 2$$

が成り立つ.

$n=k+1$ のとき

$(左辺) - (右辺)$

$= 2^{k+1} - \{(k+1)^2 - (k+1) + 2\}$

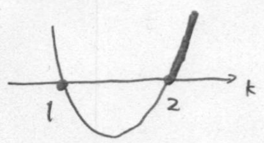
$= 2 \times 2^k - (k^2 + k + 2)$

$\geqq 2(k^2 - k + 2) - (k^2 + k + 2)$

$= k^2 - 3k + 2$

$= (k-1)(k-2) \geqq 0$

(∵ $k=1,2,\cdots$ のとき



)

よって.

$n=k$ のとき成り立つならば

$n=k+1$ のときも成り立つ

[I],[II] より

すべての $n \in \mathbb{N}$ について

与不等式は成り立つ. ■

nを自然数とするとき，

$$2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k(k-1)=(-1)^{n+1}n^2+\frac{(-1)^n-1}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(2010　山口大)

証明

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$$(\text{左辺})=2\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}k(k-1)$$
$$=2\cdot(-1)^2\cdot1\cdot0$$
$$=0$$

$$(\text{右辺})=(-1)^2\cdot1^2+\frac{-1-1}{2}$$
$$=1-1$$
$$=0$$

となり，与等式は成り立つ.

[Ⅱ] $n=\ell$ $(\ell=1,2,3,\cdots)$ のとき

与等式が成り立つと仮定する.

つまり

$$2\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k+1}k(k-1)=(-1)^{\ell+1}\ell^2+\frac{(-1)^\ell-1}{2}$$

が成り立つ.

$n=\ell+1$ のとき

$$(\text{左辺})=2\sum_{k=1}^{\ell+1}(-1)^{k+1}k(k-1)$$
$$=2\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{k+1}k(k-1)+2(-1)^{\ell+2}(\ell+1)\ell$$
$$=(-1)^{\ell+1}\ell^2+\frac{(-1)^\ell-1}{2}+2(-1)^{\ell+2}(\ell+1)\ell$$
$$=(-1)^{\ell+1}\ell^2+\frac{(-1)^\ell-1}{2}-2(-1)^{\ell+1}\ell^2-2(-1)^{\ell+1}\ell$$
$$=-(-1)^{\ell+1}\ell^2-2(-1)^{\ell+1}\ell+\frac{(-1)^\ell-1}{2}$$
$$=(-1)^{\ell+2}(\ell^2+2\ell)+\frac{(-1)^\ell-1}{2}$$
$$=(-1)^{\ell+2}\left\{(\ell+1)^2-1\right\}+\frac{(-1)^\ell-1}{2}$$
$$=(-1)^{\ell+2}(\ell+1)^2-(-1)^{\ell+2}+\frac{(-1)^\ell-1}{2}$$
$$=(-1)^{\ell+2}(\ell+1)^2-(-1)^\ell+\frac{(-1)^\ell-1}{2}$$
$$=(-1)^{\ell+2}(\ell+1)^2+\frac{-(-1)^\ell-1}{2}$$
$$=(-1)^{\ell+2}(\ell+1)^2+\frac{(-1)^{\ell+1}-1}{2}=(\text{右辺})$$

よって

$n=k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ.

[Ⅰ],[Ⅱ] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ について

与等式は成り立つ. ■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A374]

2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2つの解 α, β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について5の整数倍になることを示せ。

(2013 東京工業大)

証明

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=5$

[Ⅰ] $n=1,2$ のとき

$\alpha+\beta-3=0=5\times 0$

$\alpha^2+\beta^2-3^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-9$

$=9-10-9$

$=-10$

$=5\times(-2)$

となり，5の整数倍となる

[Ⅱ] $n=k, k+1$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

5の整数倍になると仮定する．

つまり

$$\begin{cases}\alpha^k+\beta^k-3^k=5a \\ \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-3^{k+1}=5b\end{cases}\ (a, b\in\mathbb{Z})$$

とでき，

$$\begin{cases}\alpha^k+\beta^k=3^k+5a \\ \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}=3^{k+1}+5b\end{cases}$$

$n=k+2$ のとき

$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}-3^{k+2}$

$=(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})(\alpha+\beta)-\alpha^{k+1}\beta-\alpha\beta^{k+1}-3^{k+2}$

$=(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)-3^{k+2}$

$=(3^{k+1}+5b)\times 3-5\times(3^k+5a)-3^{k+2}$

$=\cancel{3^{k+2}}+15b-5\times 3^k-25a-\cancel{3^{k+2}}$

$=5(-3^k-5a+3b)$

となり，

$n=k, k+1$ のとき成り立てば

$n=k+2$ のときも成り立つ．

[Ⅰ],[Ⅱ] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ について

$\alpha^n+\beta^n-3^n$ は5の整数倍になる．■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A375]

正の数 a, b, x, y を考える。$a+b=1$ ならば，すべての自然数 n に対して不等式 $(ax+by)^n \leqq ax^n+by^n$ が成立することを証明せよ。

(2008 慶応義塾大)

証明

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$(\text{左辺}) = ax+by$

$(\text{右辺}) = ax+by$

となり，与不等式は成り立つ.

[Ⅱ] $n=k\ (k=1,2,3,\cdots)$ のとき

与不等式が成り立つと仮定する.

つまり

$$(ax+by)^k \leqq ax^k+by^k$$

が成り立つ.

$n=k+1$ のとき

$(\text{右辺})-(\text{左辺})$

$$= ax^{k+1}+by^{k+1}-(ax+by)^{k+1}$$

$$= ax^{k+1}+by^{k+1}-(ax+by)(ax+by)^k$$

$$\geqq ax^{k+1}+by^{k+1}-(ax+by)(ax^k+by^k)$$

$$= ax^{k+1}+by^{k+1}$$
$$\quad -(a^2x^{k+1}+abxy^k+abx^ky+b^2y^{k+1})$$

$$= a\underbrace{(1-a)}_{b}x^{k+1}-abxy^k-abx^ky+b\underbrace{(1-b)}_{a}y^{k+1}$$

$$= ab\left(x^{k+1}-xy^k-x^ky+y^{k+1}\right)$$

$$= ab\left\{x^k(x-y)-y^k(x-y)\right\}$$

$$= ab(x-y)(x^k-y^k)$$

ここで

$x>0$, $y>0$ なので

$$\begin{cases} x<y \text{ のとき } x^k<y^k \\ x=y \text{ のとき } x^k=y^k \\ x>y \text{ のとき } x^k>y^k \end{cases}$$

となり

$x-y$ と x^k-y^k の符号は一致する.

よって

$$(\text{右辺})-(\text{左辺}) \geqq 0$$

つまり

$n=k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ.

[Ⅰ],[Ⅱ] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ について

$a+b=1$ のとき

与不等式は成り立つ. ■

数列$\{a_n\}$が，$a_1=\sin^2\theta$，$a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) で定められている。 (2013 宮崎大)

(1) a_2とa_3を，θを用いて表せ。

(2) a_nがθとnを用いてどのように表されるのか予想し，それが正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)

$n=1$ として

$$a_2=4a_1(1-a_1)$$
$$=4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$=4\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$=4\left(\frac{1}{2}\sin2\theta\right)^2$$
$$=\underline{\underline{\sin^2 2\theta}}$$

$n=2$ として

$$a_3=4a_2(1-a_2)$$
$$=4\sin^2 2\theta(1-\sin^2 2\theta)$$
$$=4\sin^2 2\theta\cos^2 2\theta$$
$$=4\left(\frac{1}{2}\sin4\theta\right)^2$$
$$=\underline{\underline{\sin^2 4\theta}}$$

(2)

$$a_n=\sin^2 2^{n-1}\theta$$

と予想できる。

これを数学的帰納法によって示す。

$\boxed{\text{証明}}$

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$$a_1=\sin^2\theta$$

となり 成り立つ。

[Ⅱ] $n=k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$) のとき

成り立つと仮定する。

つまり

$$a_k=\sin^2 2^{k-1}\theta$$

が成り立つ。

このとき，与漸化式で $n=k$ として

$$a_{k+1}=4a_k(1-a_k)$$
$$=4\sin^2 2^{k-1}\theta(1-\sin^2 2^{k-1}\theta)$$
$$=4\sin^2 2^{k-1}\theta\cos^2 2^{k-1}\theta$$
$$=4\left(\frac{1}{2}\sin 2^k\theta\right)^2$$
$$=\sin^2 2^k\theta$$

となり，

$n=k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ。

[Ⅰ]，[Ⅱ] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ について

$$a_n=\sin^2 2^{n-1}\theta$$

が成り立つ。■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A377]

数列$\{a_n\}$は$a_1=a_2=-1$, $a_{n+2}-(n+2)a_{n+1}+na_n=(n^2+n+1)(n+1)!$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) を満たすとする。

(1) 数学的帰納法を用いて, $a_{n+1}-na_n=(n-1)(n+1)!$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) が成り立つことを示せ。

(2) $b_n=\dfrac{a_n}{(n-1)!}$ とおくとき, (1)を用いて数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2014 宮城教育大)

(1) 証明

[I] $n=1$ のとき

$$a_{n+1}-na_n=(n-1)(n+1)! \quad \text{——①}$$

は

$$a_2-a_1=0$$

$$a_2=a_1$$

これは $a_1=a_2=-1$ より成り立つ。

[II] $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

①が成り立つと仮定する。

つまり

$$a_{k+1}-ka_k=(k-1)(k+1)!$$

が成り立つ。

与漸化式で $n=k$ として

$$a_{k+2}-(k+2)a_{k+1}+ka_k=(k^2+k+1)(k+1)!$$

$$+)\quad a_{k+1}-ka_k=(k-1)(k+1)!$$

$$a_{k+2}+(-k-1)a_{k+1}=(k^2+2k)(k+1)!$$

$$a_{k+2}-(k+1)a_{k+1}=k(k+2)!$$

よって ①は

$n=k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ。

[I], [II] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ について

$$a_{n+1}-na_n=(n-1)(n+1)!$$

は成り立つ。■

(2)

①で、両辺を $n!$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n!}-\frac{a_n}{(n-1)!}=(n-1)(n+1)$$

$$\boxed{b_{n+1}-b_n=n^2-1}$$

$(n=1)$ $\cancel{b_2}-b_1=1^2-1$

$(n=2)$ $\cancel{b_3}-\cancel{b_2}=2^2-1$

$(n=3)$ $\cancel{b_4}-\cancel{b_3}=3^2-1$

⋮

$(n=n-1)$ $b_n-\cancel{b_{n-1}}=(n-1)^2-1$ (+ $(n\geqq 2)$

$$b_n-b_1=(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2)-(n-1)$$

$$b_n-b_1=\sum_{k=1}^{n-1}k^2-(n-1)$$

$$b_n-b_1=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-(n-1)$$

(これは $n=1$ でも成り立つ)

(ここで $b_1=\dfrac{a_1}{0!}=-1$ より)

$$b_n+1=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n)-(n-1)$$

$$b_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n)-n$$

$$b_n=\frac{1}{6}(2n^3-3n^2-5n)$$

$$b_n=\frac{1}{6}n(2n^2-3n-5)$$

$$b_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n-5) \quad (n\geqq 1)$$

(3)

$b_n=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n-5)$ より

$$\frac{a_n}{(n-1)!}=\frac{1}{6}n(n+1)(2n-5)$$

$$a_n=\frac{1}{6}(2n-5)(n+1)!$$

$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおけば $x^n+\dfrac{1}{x^n}$ は t の n 次式になることを，数学的帰納法により証明せよ。ただし，n は自然数とする。

（　東京都立大）

$\boxed{\text{証明}}$

[I] $n=1, 2$ のとき

$$x^1+\frac{1}{x^1}=t$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\times\frac{1}{x}$$
$$=t^2-2$$

となり，t の n 次式になる．

[II] $n=k, k+1$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

$x^n+\dfrac{1}{x^n}$ が t の n 次式になる

と仮定する．

つまり $f(t)$：$k-1$ 次式，$g(t)$：k 次式 として．

$$\begin{cases} x^k+\dfrac{1}{x^k}=t^k+f(t) \\ x^{k+1}+\dfrac{1}{x^{k+1}}=t^{k+1}+g(t) \end{cases}$$

とできる．

このとき

$$x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}$$
$$=\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)$$
$$=\left(t^{k+1}+g(t)\right)t-\left(t^k+f(t)\right)$$
$$=t^{k+2}+\underbrace{tg(t)}_{k+1\text{ 次}}-t^k-\underbrace{f(t)}_{k-1\text{ 次}}$$

となり

$n=k, k+1$ のとき t の n 次式 ならば

$n=k+2$ のときも t の n 次式 となる．

[I], [II] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ について

$x^n+\dfrac{1}{x^n}$ は t の n 次式 である． ■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B378]

(1) $p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$ (p, q, r, s は整数) が成り立つならば，$p=r$ かつ $q=s$ となることを示せ。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることは使ってよい。

(2) 自然数 n に対し，$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ を満たす整数 a_n，b_n が存在することを数学的帰納法により示せ。

(3) a_n，b_n を(2)のものとする。このとき，すべての自然数 n について $(x,\ y)=(a_n,\ b_n)$ は方程式 $x^2-2y^2=1$ の解であることを数学的帰納法により示せ。

(2010 三重大)

(1) (証明) (背理法)

$q \neq s$ と仮定する

$p+q\sqrt{2}=r+s\sqrt{2}$ ——① より

$(q-s)\sqrt{2}=r-p$

$q-s \neq 0$ より

$\sqrt{2}=\dfrac{r-p}{q-s}$

$p, q, r, s \in \mathbb{Z}$ なので

$\dfrac{r-p}{q-s}$ は有理数

一方，$\sqrt{2}$ は無理数 であるので

これは

(無理数)$\neq$(有理数)

であることに矛盾

よって $q=s$ である。

このとき，① は

$p+q\sqrt{2}=r+q\sqrt{2}$

よって $p=r$

つまり，

$p=r$ かつ $q=s$ が成り立つ。■

(2) (証明)

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$3+2\sqrt{2}=a_1+b_1\sqrt{2}$

(1) より

$a_1=3,\ b_1=2$

[Ⅱ] $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

等式を満たす $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$ が存在すると仮定すると

$(3+2\sqrt{2})^k=a_k+b_k\sqrt{2}$

を満たす $a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ が存在する。

このとき

$(3+2\sqrt{2})^{k+1}=(3+2\sqrt{2})^k(3+2\sqrt{2})$

$=(a_k+b_k\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$

$=(3a_k+4b_k)+(2a_k+3b_k)\sqrt{2}$

よって

$\begin{cases} a_{k+1}=3a_k+4b_k \\ b_{k+1}=2a_k+3b_k \end{cases}$

とおくと，

$a_k, b_k \in \mathbb{Z}$ なので

$a_{k+1}, b_{k+1} \in \mathbb{Z}$

つまり

$n=k$ のとき存在すれば

$n=k+1$ のときも存在する

[Ⅰ]，[Ⅱ] より

すべての $n \in \mathbb{N}$ で

$(3+2\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$

を満たす $a_n, b_n \in \mathbb{Z}$

は存在する。

(3) (証明)

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$a_1=3,\ b_1=2$ であり，

$3^2-2\times 2^2=1$ が成り立つので

$(x, y)=(a_1, b_1)$ は

$x^2-2y^2=1$ の解である。

[Ⅱ] $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

$(x, y)=(a_k, b_k)$ が $x^2-2y^2=1$

の解であると仮定すると

$a_k^2-2b_k^2=1$ ——②

が成り立つ。

このとき

$a_{k+1}^2-2b_{k+1}^2=(3a_k+4b_k)^2-2(2a_k+3b_k)^2$

$=9a_k^2+24a_kb_k+16b_k^2$

$\quad -8a_k^2-24a_kb_k-18b_k^2$

$=a_k^2-2b_k^2$

$=1$ ($\because$ ② より)

(裏に続く)

よって

$(x, y) = (a_k, b_k)$ が $x^2 - 2y^2 = 1$

の解 であるならば

$(x, y) = (a_{k+1}, b_{k+1})$ も解である。

[I], [II] より

すべての $n \in \mathbb{N}$ で

$(x, y) = (a_n, b_n)$ は

$x^2 - 2y^2 = 1$ の解である。 ■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B379]

$a_1=1$，$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots\cdots+a_na_1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを証明せよ。　　　　(大阪市立大)

与漸化式で

(n=1) $a_1a_2=2(a_1a_1)$

$a_2=2$

(n=2) $a_1a_2+a_2a_3=2(a_1a_2+a_2a_1)$

$2+2a_3=2(2+2)$

$2+2a_3=8$

$2a_3=6$

$a_3=3$

(n=3) $a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4=2(a_1a_3+a_2a_2+a_3a_1)$

$2+6+3a_4=2(3+4+3)$

$8+3a_4=20$

$3a_4=12$

$a_4=4$

$\{a_n\}:1,2,3,4,\cdots$

$a_n=n$ と推測できる。

これを数学的帰納法により証明する。

(証明)

[I] $n=1$ のとき

$a_1=1$ となり成り立つ。

[II] $n\leqq k$ $(k=1,2,3,\cdots)$

のときの成立を仮定すると

$a_\ell=\ell$ $(\ell=1,2,3,\cdots,k)$ が成り立つ。

与漸化式で $n=k$ として

$a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_{k-1}a_k+a_ka_{k+1}$

$=2(a_1a_k+a_2a_{k-1}+\cdots\cdots+a_ka_1)$

$1\cdot2+2\cdot3+\cdots\cdots+(k-1)k+ka_{k+1}$

$=2(1\cdot k+2(k-1)+\cdots\cdots+k\cdot1)$

$$\sum_{\ell=1}^{k-1}\ell(\ell+1)+ka_{k+1}=\sum_{\ell=1}^{k}\ell(k-\ell+1)$$

ここで

$$\sum_{\ell=1}^{k-1}\ell(\ell+1)=\sum_{\ell=1}^{k-1}\{\ell(\ell+1)(\ell+2)-(\ell-1)\ell(\ell+1)\}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\{\cancel{1\cdot2\cdot3}-0\cdot1\cdot2+\cancel{2\cdot3\cdot4}-\cancel{1\cdot2\cdot3}+\cancel{3\cdot4\cdot5}-\cancel{2\cdot3\cdot4}+\cdots+(k-1)k(k+1)-\cancel{(k-2)(k-1)k}\}$$

$$=\frac{1}{3}(k-1)k(k+1)$$

$$\sum_{\ell=1}^{k}\ell(k-\ell+1)=\sum_{\ell=1}^{k}(-\ell^2+(k+1)\ell)$$

$$=-\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)\times\frac{1}{2}k(k+1)$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)\{-(2k+1)+3(k+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$$

よって

$$\frac{1}{3}(k-1)k(k+1)+ka_{k+1}=2\times\frac{1}{6}k(k+1)(k+2)$$

$$ka_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}$$

$k\neq0$ なので

$a_{k+1}=k+1$

よって

$n\leqq k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ。

[I], [II] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ で

$a_n=n$ は成り立つ。■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B380]

> θを実数とし，数列$\{a_n\}$を$a_1=1$，$a_2=\cos\theta$，$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n$ ($n=1$, 2, 3, ……)により定める。すべてのnについて$a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ。
>
> (2016　一橋大)

$\boxed{\text{解法1}}$

$n=1$ として

$$a_3=\frac{3}{2}a_2-a_1$$

$$\cos 2\theta=\frac{3}{2}\cos\theta-1$$

$$2\cos^2\theta-1=\frac{3}{2}\cos\theta-1$$

$$4\cos^2\theta-3\cos\theta=0$$

$$\cos\theta(4\cos\theta-3)=0$$

$$\cos\theta=0,\ \frac{3}{4}$$

$n=2$ として

$$a_4=\frac{3}{2}a_3-a_2$$

$$\cos 3\theta=\frac{3}{2}\cos 2\theta-\cos\theta$$

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=\frac{3}{2}(2\cos^2\theta-1)-\cos\theta$$

$$4\cos^3\theta-3\cos^2\theta-2\cos\theta+\frac{3}{2}=0$$

$$8\cos^3\theta-6\cos^2\theta-4\cos\theta+3=0$$

$$f(\cos\theta)=8\cos^3\theta-6\cos^2\theta-4\cos\theta+3$$

とおくと

$$\begin{cases} f(0)=3\neq 0 \\ f\left(\frac{3}{4}\right)=8\times\frac{27}{64}-6\times\frac{9}{16}-4\times\frac{3}{4}+3 \\ \qquad=\frac{27}{8}-\frac{27}{8}-3+3 \\ \qquad=0 \end{cases}$$

よって

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ であることが必要. ―― $\circledast$

このとき

$$\begin{aligned} a_{n+2}&=\cos(n+1)\theta \\ &=\cos(n\theta+\theta) \\ &=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta \\ &=\frac{3}{4}\cos n\theta-\sin n\theta\sin\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}a_{n+1}-a_n&=\frac{3}{2}\cos n\theta-\cos(n-1)\theta \\ &=\frac{3}{2}\cos n\theta-\cos(n\theta-\theta) \\ &=\frac{3}{2}\cos n\theta-\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta \\ &=\frac{3}{2}\cos n\theta-\frac{3}{4}\cos n\theta-\sin n\theta\sin\theta \\ &=\frac{3}{4}\cos n\theta-\sin n\theta\sin\theta \end{aligned}$$

なので

$$\begin{cases} a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n \\ a_n=\cos(n-1)\theta \end{cases}$$

を満たしている。

よって　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

$\boxed{\text{解法2}}$ ($\circledast$以降の部分)

$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，すべての $n\in\mathbb{N}$ で

$a_n=\cos(n-1)\theta$ ―― ①

が成り立つことを示す.

[I] $n=1$ のとき

① で $a_1=\cos 0=1$

$n=2$ のとき

① で $a_2=\cos\theta$

となるので ① は成り立つ.

[II] $n=k,\ k+1$ ($k=1,2,3,\cdots$) のとき

① が成り立つと仮定する.

つまり $\begin{cases} a_k=\cos(k-1)\theta \\ a_{k+1}=\cos k\theta \end{cases}$

が成り立つ.

このとき 与漸化式 で $n=k$ として

$$\begin{aligned} a_{k+2}&=\frac{3}{2}a_{k+1}-a_k \\ &=\frac{3}{2}\cos k\theta-\cos(k-1)\theta \\ &=2\times\frac{3}{4}\cos k\theta-\cos(k-1)\theta \\ &=2\cos\theta\cos k\theta-\cos(k-1)\theta \\ &=2\cos k\theta\cos\theta-(\cos k\theta\cos\theta+\sin k\theta\sin\theta) \\ &=\cos k\theta\cos\theta-\sin k\theta\sin\theta \\ &=\cos(k+1)\theta \end{aligned}$$

よって $n=k,\ k+1$ のとき ① が成り立てば

$n=k+2$ のときも ① は成り立つ.

[I], [II] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ で $a_n=\cos(n-1)\theta$

は成り立つ.

よって $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ で十分.