[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題124]

平面上に n 本の直線があるとき，これら n 本の直線によって平面は最大何個の部分に分けられるか。この個数を n を用いて表せ。

n本の直線によって，最大a_n個の部分に分けられるとすると，

$a_1 = 2$，

であり，

さらに $n+1$ 本目の直線を加えることにより，最大 $n+1$ 個の部分が増える。

よって

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

$$\boxed{a_{n+1} - a_n = n+1}$$

$n=1$ $\quad \cancel{a_2} - a_1 = 2$

$n=2$ $\quad \cancel{a_3} - \cancel{a_2} = 3$

$n=3$ $\quad \cancel{a_4} - \cancel{a_3} = 4$

$\vdots$

$n=n-1$ $\quad a_n - \cancel{a_{n-1}} = n \quad +$ $\quad (n \geqq 2)$

$$a_n - a_1 = 2+3+4+\cdots+n$$

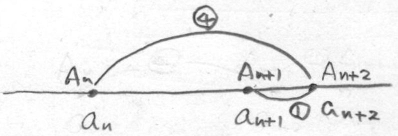
$$a_n - a_1 = \frac{(2+n)(n-1)}{2} \quad (n=1\text{でも成り立つ})$$

$$a_n - 2 = \frac{1}{2}(n^2+n-2)$$

$$\underline{\underline{a_n = \frac{1}{2}(n^2+n+2) \quad (n \geqq 1)}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 基本問題125]

数直線上に点 $A_1(0)$，$A_2(1)$ をとる。$n \geqq 1$ に対し，線分 A_nA_{n+1} を $4:1$ に外分する点を $A_{n+2}(a_{n+2})$ とするとき，a_n を n の式で表せ。ただし，$a_1=0$，$a_2=1$ とする。



$$\overrightarrow{OA_{n+2}} = \frac{-1\overrightarrow{OA_n}+4\overrightarrow{OA_{n+1}}}{4-1}$$

$$a_{n+2} = \frac{4}{3}a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$$

$$\left(\begin{array}{l} t^2 = \frac{4}{3}t - \frac{1}{3} \\ 3t^2-4t+1=0 \\ (3t-1)(t-1)=0 \\ t=\frac{1}{3},\ 1 \end{array}\right)$$

$$a_{n+2} = \left(\frac{1}{3}+1\right)a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$$

$$\begin{cases} a_{n+2}-\frac{1}{3}a_{n+1} = a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n & \text{―― ①} \\ a_{n+2}-a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1}-a_n) & \text{―― ②} \end{cases}$$

① より

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n = \left(a_2-\frac{1}{3}a_1\right)\times 1^{n-1}$$

$$a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n = 1 \quad \text{―― ①'}$$

② より

$$a_{n+1}-a_n = (a_2-a_1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_{n+1}-a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{―― ②'}$$

$$\begin{array}{rl} \text{①'} & a_{n+1}-\frac{1}{3}a_n = 1 \\ \text{②'} & a_{n+1}-a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad (- \\ \hline & \frac{2}{3}a_n = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{array}$$

$$a_n = \frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A381]

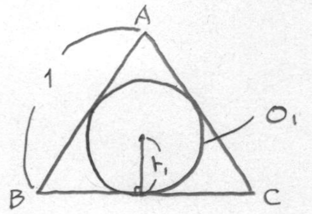
1辺の長さが1の正三角形ABCに内接する円をO_1とし，その半径をr_1とする。また，$n=1, 2, 3, \cdots\cdots$に対して，円O_nに外接し，2辺AB，ACに接する円をO_{n+1}，その半径をr_{n+1}とする。ただし$r_{n+1}<r_n$とする。

(1) r_1を求めよ。

(2) r_{n+1}をr_nを用いて表せ。

(3) 円O_1から円O_nまでのn個の円の面積の和S_nを，nを用いて表せ。　(2010 成蹊大)

(1)



$$S(\triangle ABC)=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

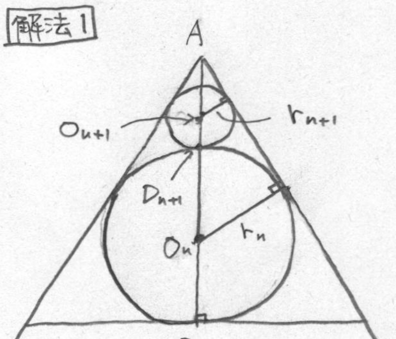
であり

$$r_1=\frac{2S(\triangle ABC)}{1+1+1}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

(2) 解法1



円O_nの中心をO_n

2円O_n, O_{n+1}の接点をD_n

とおくと.

正三角形の内心と重心は一致するので

$$\begin{cases}AO_n:O_nD_n=2:1\\ AO_{n+1}:O_{n+1}D_{n+1}=2:1\end{cases}$$

より

$$AO_{n+1}:AO_n=1:3$$

つまり

$$r_{n+1}:r_n=1:3$$

$$3r_{n+1}=r_n$$

よって

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$$

(3)

$$S_n=\pi r_1^2+\pi r_2^2+\pi r_3^2+\cdots\cdots+\pi r_n^2$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{n}r_k^2$$

ここで

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n \text{ より}$$

$$r_n=r_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$

$$=\frac{3}{4}\pi\left\{\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{3}{4}\pi\times\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{3}{4}\pi\times\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{3}{32}\pi\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}$$

(2) 解法2

$$\begin{cases}AO_{n+1}=2r_{n+1}\\ AO_n=2r_n\end{cases}$$

であり,

$$O_{n+1}O_n=AO_n-AO_{n+1} \text{ より}$$

$$r_{n+1}+r_n=2r_n-2r_{n+1}$$

$$3r_{n+1}=r_n$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}r_n$$

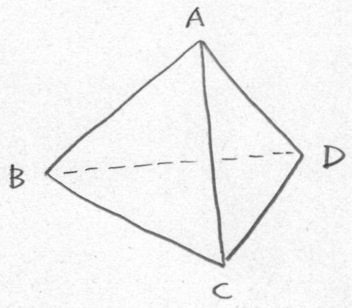
[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A382]

正四面体ABCDの頂点を移動する点Pがある。点Pは，1秒ごとに，隣の3頂点のいずれかに等しい確率 $\frac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ でとどまる。初め頂点Aにいた点Pが，n 秒後に頂点Aにいる確率を p_n とする。ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする。

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 確率 p_n を求めよ。

(2017 北海道大)



(1)

n秒後に頂点A,B,C,Dにある確率を

それぞれ

p_n, q_n, r_n, s_n とおくと

$$\begin{cases} p_0=1,\ q_0=r_0=s_0=0 \\ p_{n+1}=p_n(1-a)+q_n\cdot\frac{a}{3}+r_n\cdot\frac{a}{3}+s_n\cdot\frac{a}{3} \quad \text{—①} \\ q_{n+1}=p_n\cdot\frac{a}{3}+q_n(1-a)+r_n\cdot\frac{a}{3}+s_n\cdot\frac{a}{3} \\ r_{n+1}=p_n\cdot\frac{a}{3}+q_n\cdot\frac{a}{3}+r_n(1-a)+s_n\cdot\frac{a}{3} \\ s_{n+1}=p_n\cdot\frac{a}{3}+q_n\cdot\frac{a}{3}+r_n\cdot\frac{a}{3}+s_n(1-a) \end{cases}$$

①より

$$p_{n+1}=(1-a)p_n+\frac{a}{3}(q_n+r_n+s_n)$$

$$p_{n+1}=(1-a)p_n+\frac{a}{3}(1-p_n)$$

$$\underline{\underline{p_{n+1}=\left(1-\frac{4}{3}a\right)p_n+\frac{a}{3}}}$$

(2)

$$p_{n+1}=\left(1-\frac{4}{3}a\right)p_n+\frac{a}{3}$$

$$-)\ \frac{1}{4}=\left(1-\frac{4}{3}a\right)\cdot\frac{1}{4}+\frac{a}{3}$$

$\alpha=\left(1-\frac{4}{3}a\right)\alpha+\frac{a}{3}$

$\frac{4}{3}a\alpha=\frac{a}{3}$

$\alpha=\frac{1}{4}$

$$p_{n+1}-\frac{1}{4}=\left(1-\frac{4}{3}a\right)\left(p_n-\frac{1}{4}\right)$$

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(p_0-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{3}a\right)^n$$

$$p_n-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}a\right)^n$$

$$\underline{\underline{p_n=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}a\right)^n}}$$

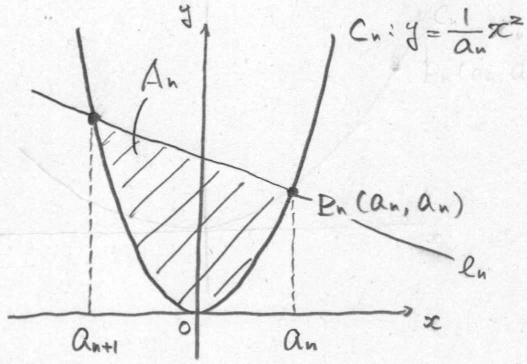
[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A383]

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。$a_1=1$ とし，自然数 n に対して a_n が定まったとき，曲線 $C_n: y=\dfrac{1}{a_n}x^2$ 上の点 P_n $(a_n,\ a_n)$ を通り，点 P_n における曲線 C_n の接線に垂直な直線を ℓ_n とし，C_n と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なる点の x 座標を a_{n+1} とする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) C_n と ℓ_n で囲まれた部分の面積を A_n とするとき，$\sum_{k=1}^{n} A_k$ を求めよ。

(2017 鳥取大)



(1)

接点 $P_n(a_n, a_n)$

$y'=\dfrac{2}{a_n}x$

$y'(x=a_n)=2$

(法線 ℓ_n の傾き) $=-\dfrac{1}{2}$

より

$\ell_n: y-a_n=-\dfrac{1}{2}(x-a_n)$

$y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}a_n$

$C_n: y=\dfrac{1}{a_n}x^2$ と連立して

$\dfrac{1}{a_n}x^2=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}a_n$

$2x^2+a_nx-3a_n^2=0$

$(2x+3a_n)(x-a_n)=0$

$x\neq a_n$ のとき

$x=-\dfrac{3}{2}a_n$

よって $a_{n+1}=-\dfrac{3}{2}a_n$

$a_n=a_1\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\underline{\underline{a_n=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}}}$

(2)

$$A_n=\left|\int_{a_{n+1}}^{a_n}\left\{\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}a_n\right)-\frac{1}{a_n}x^2\right\}dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{a_n}\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_n)(x-a_{n+1})dx\right|$$

$$=\left|\frac{1}{a_n}\left(-\frac{1}{6}\right)(a_n-a_{n+1})^3\right|$$

$$=\frac{2^{n-1}}{6\cdot 3^{n-1}}\left|\left(-\frac{3}{2}\right)^n-\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right|^3$$

$$=\frac{2^{n-1}}{6\cdot 3^{n-1}}\left|\left(-\frac{3}{2}-1\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right|^3$$

$$=\frac{2^{n-1}}{6\cdot 3^{n-1}}\times\left\{\frac{5}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right\}^3$$

$$=\frac{2^{n-1}}{6\cdot 3^{n-1}}\times\frac{125}{8}\times\frac{3^{3n-3}}{2^{3n-3}}$$

$$=\frac{125}{48}\times\frac{3^{2n-2}}{2^{2n-2}}$$

$$=\frac{125}{48}\times\frac{4}{9}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{2n}$$

$$=\frac{125}{108}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)^n$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}A_k=\frac{125}{108}\times\left\{\frac{9}{4}+\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^3+\cdots\cdots+\left(\frac{9}{4}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{125}{108}\times\frac{\frac{9}{4}\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^n-1\right\}}{\frac{9}{4}-1}$$

$$=\frac{125}{108}\times\frac{9}{5}\times\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^n-1\right\}$$

$$=\underline{\underline{\frac{25}{12}\left\{\left(\frac{9}{4}\right)^n-1\right\}}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A384]

(1) 6以上の整数nに対して不等式$2^n > n^2+7$が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式$p^q = q^p + 7$を満たす素数の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。

(2016 東北大)

(1) $\boxed{\text{証明}}$

[I] $n=6$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2^6 = 64$$

$$(\text{右辺}) = 6^2+7 = 43$$

となり 与不等式は成り立つ.

[II] $n=k$ $(k=6,7,8,\cdots)$ のとき

与不等式が成り立つと仮定する.

つまり

$$2^k > k^2+7$$

が成り立つ.

$n=k+1$ のとき

$$(\text{左辺})-(\text{右辺}) = 2^{k+1} - \{(k+1)^2+7\}$$

$$= 2\times 2^k - (k^2+2k+8)$$

$$> 2(k^2+7) - (k^2+2k+8)$$

$$= k^2-2k+6$$

$$= (k-1)^2+5 > 0$$

よって

$n=k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ.

[I], [II] より

6以上のすべての$n \in \mathbb{N}$ について

$$2^n > n^2+7$$

は成り立つ. ■

(2)

pは素数なので $p=2,3,5,7,\cdots$

(i) $p=2$ のとき.

$$2^q = q^2+7 \quad \text{——— ①}$$

(ア) $q=2$ のとき, ①は

$4=11$ となり不合理

(イ) $q=3$ のとき ①は

$8=16$ となり不合理

(ウ) $q=5$ のとき ①は

$32=32$ となり成り立つ.

(エ) $q \geqq 6$ のとき (1)より

$2^q > q^2+7$ となり 不合理

(ii) $p \geqq 3$ のとき.

pは奇素数なので.

与等式を成り立たせるためには

qが偶数であることが必要

つまり $q=2$ である.

$$p^2 = 2^p+7 \quad \text{——— ②}$$

(オ) $p=3$ のとき ②は

$9=16$ となり 不合理

(カ) $p=5$ のとき ②は

$25=39$ となり不合理.

(キ) $p \geqq 6$ のとき. (1)より

$2^p > p^2+7$

②を代入して.

$2^p > 2^p+7+7$.

これは不合理.

(i), (ii) より.

$$\underline{\underline{(p,q)=(2,5)}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 例題49]

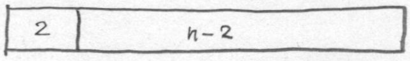
数直線上の原点Oを出発点とする。硬貨を投げ表が出たら2，裏が出たら1だけ正の方向へ進むものとする。点 n に到達する確率を p_n とする。

(1) 3以上の n について，p_n，p_{n-1}，p_{n-2} の関係式を求めよ。

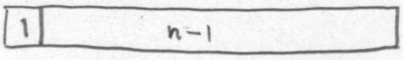
(2) 3以上の n について，p_n を求めよ。

(2015 横浜市立大)

(1) $\boxed{\text{解法1}}$ (最初の一手)



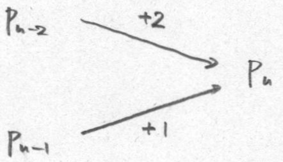
$\frac{1}{2} \times P_{n-2}$



$\frac{1}{2} \times P_{n-1}$

$$\underline{\underline{P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2}}}$$

$\boxed{\text{解法2}}$ (最後の一手)



$$P_n = P_{n-2} \times \frac{1}{2} + P_{n-1} \times \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2}}}$$

(2)

$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2}P_{n-2} \quad (n \geqq 3)$ より

$$P_{n+2} = \frac{1}{2}P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n \quad (n \geqq 1)$$

$$P_{n+2} - \frac{1}{2}P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0 \\ 2t^2 - t - 1 = 0 \\ (2t+1)(t-1) = 0 \\ t = -\frac{1}{2}, 1 \end{array}\right)$$

$$P_{n+2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)P_{n+1} - \frac{1}{2}P_n = 0$$

$$\begin{cases} P_{n+2} - P_{n+1} = -\frac{1}{2}(P_{n+1} - P_n) & \text{——①} \\ P_{n+2} + \frac{1}{2}P_{n+1} = P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n & \text{——②} \end{cases}$$

① より

$$P_{n+1} - P_n = (P_2 - P_1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ここで

$$\left(\begin{array}{l} P_1 = \frac{1}{2} \\ P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{array}\right) \text{より}$$

$$P_{n+1} - P_n = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$P_{n+1} - P_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ —— ①}'$$

② より

$$P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = \left(P_2 + \frac{1}{2}P_1\right)\cdot 1^{n-1}$$

$$P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = 1 \text{ —— ②}'$$

②′ $\quad P_{n+1} + \frac{1}{2}P_n = 1$

①′ $\quad P_{n+1} - P_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (−

$$\frac{3}{2}P_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって $\underline{\underline{P_n = \frac{2}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}}}$

[2018スタンダードＩⅡＡＢ受 問題B385]

Ａ と Ｂ の２人が，１個のさいころを次の手順により投げあう。

１回目はＡが投げる。

1，2，3の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4，5の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら，投げた人を勝ちとし，それ以降は投げない。

(1) n 回目にＡがさいころを投げる確率 a_n を求めよ。

(2) ちょうど n 回目のさいころ投げでＡが勝つ確率 p_n を求めよ。

(3) n 回以内のさいころ投げでＡが勝つ確率 q_n を求めよ。

(2011 一橋大)

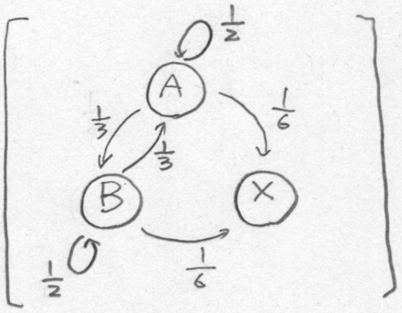
(1)

n 回目にＡがさいころを投げる確率 a_n

n 回目にＢが 〃 b_n

とおくと

$a_1=1$, $b_1=0$



$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n \quad \text{―①}$$
$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n \quad \text{―②}$$

①＋② より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n)$$
$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
$$a_n+b_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \quad \text{―③}$$

①－② より

$$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n)$$
$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$
$$a_n-b_n=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \quad \text{―④}$$

③＋④ より

$$2a_n=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

(2)

$$p_n=a_n\times\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)

$$q_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\}$$
$$=\frac{1}{12}\left\{\frac{1\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{6}}\right\}$$
$$=\frac{1}{12}\left(6\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)+\frac{6}{5}\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)$$
$$=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して $a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$ と定める。

(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(2017 東京大)

(1)

$\frac{1}{p}=\frac{1}{2+\sqrt{5}}=-2+\sqrt{5}$ なので

$p-\frac{1}{p}=(2+\sqrt{5})-(-2+\sqrt{5})=4$ より

$p^2+\frac{1}{p^2}=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2\cdot p\cdot\frac{1}{p}=18$

$a_1=p-\frac{1}{p}=4$

$a_2=p^2+\frac{1}{p^2}=18$

つまり，

$a_1=4,\ a_2=18$

(2)

$a_1a_n=\left(p-\frac{1}{p}\right)\left\{p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\}$

$=p^{n+1}+p\left(-\frac{1}{p}\right)^n-\frac{1}{p}p^n-\frac{1}{p}\left(-\frac{1}{p}\right)^n$

$=p^{n+1}+\left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1}-p^{n-1}-\left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$

$=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3) (証明)

[Ⅰ] $n=1, 2$ のとき

$a_1=4,\ a_2=18$ なので

$a_1, a_2\in\mathbb{N}$ である。

[Ⅱ] $n\leqq k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

$a_n\in\mathbb{N}$ であると仮定すると

(2) で $n=k$ として

$a_1a_k=a_{k+1}-a_{k-1}$ より

$a_{k+1}=a_1a_k+a_{k-1}\in\mathbb{N}$

よって

$n\leqq k$ のとき $a_n\in\mathbb{N}$ であると

$n=k+1$ のときも $a_n\in\mathbb{N}$ である。

[Ⅰ]，[Ⅱ] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ で

$a_n\in\mathbb{N}$ である。 ■

(4)

(2) より

$a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1}$

互除法の原理により

$(a_{n+1}, a_n)=(a_n, a_{n-1})$

(これを繰り返して)

$=(a_{n-1}, a_{n-2})$

$=\cdots$

$=(a_2, a_1)$

$=(18, 4)$

$=2$