[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A387]

次の式で定義される整式の列 $\{f_n(x)\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を考える。

$$f_1(x)=\frac{1}{2}x+2,$$

$$x^2f_{n+1}(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_n(t)\,dt \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ。

(2) 数学的帰納法を用いて，$f_n(x)$ は x の1次式であることを示せ。

(3) $f_n(x)$ を求めよ。

(2015 鳥取大)

(1)

$$x^2f_{n+1}(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_n(t)\,dt \quad \text{―― ※}$$

で $n=1$ として

$$x^2f_2(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_1(t)\,dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x\left(\frac{1}{2}t^2+2t\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\left[\frac{1}{6}t^3+t^2\right]_0^x$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+x^2$$

$$=\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2$$

よって

$$f_2(x)=\frac{5}{6}x+\frac{5}{2}$$

※ で $n=2$ として

$$x^2f_3(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_2(t)\,dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x\left(\frac{5}{6}t^2+\frac{5}{2}t\right)dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\left[\frac{5}{18}t^3+\frac{5}{4}t^2\right]_0^x$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{18}x^3+\frac{5}{4}x^2$$

$$=\frac{17}{18}x^3+\frac{11}{4}x^2$$

よって

$$f_3(x)=\frac{17}{18}x+\frac{11}{4}$$

(2)

証明

[I] $n=1$ のとき

$$f_1(x)=\frac{1}{2}x+2$$

は x の1次式である。

[II] $n=k$ のとき

$f_n(x)$ が x の1次式であると仮定する。

つまり

$$f_k(x)=a_kx+b_k$$

とできる。

与漸化式で $n=k$ として

$$x^2f_{k+1}(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_k(t)\,dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x(a_kt^2+b_kt)\,dt$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\left[\frac{a_k}{3}t^3+\frac{b_k}{2}t^2\right]_0^x$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{a_k}{3}x^3+\frac{b_k}{2}x^2$$

$$=\frac{a_k+2}{3}x^3+\frac{b_k+3}{2}x^2$$

よって

$$f_{k+1}(x)=\frac{a_k+2}{3}x+\frac{b_k+3}{2}$$

となり

$n=k$ のとき x の1次式であれば

$n=k+1$ のときも x の1次式である。

[I], [II] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ で

$f_n(x)$ は x の1次式である。■

(裏に続く)

(3)

$f_n(x) = a_n x + b_n$ とおくと

(2) より $a_1 = \frac{1}{2}$, $b_1 = 2$

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3} & \text{——①} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2} & \text{——②} \end{cases}$$

① より

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3} \\ -) & 1 = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{2}{3} \\ \hline & a_{n+1} - 1 = \frac{1}{3}(a_n - 1) \end{array}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3}\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = 1$$

$$a_n - 1 = (a_1 - 1)\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n - 1 = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_n = 1 - \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$$

② より

$$\begin{array}{rl} & b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{3}{2} \\ -) & 3 = \frac{1}{2}\times 3 + \frac{3}{2} \\ \hline & b_{n+1} - 3 = \frac{1}{2}(b_n - 3) \end{array}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}\beta = \frac{3}{2}$$

$$\beta = 3$$

$$b_n - 3 = (b_1 - 3)\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$b_n - 3 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

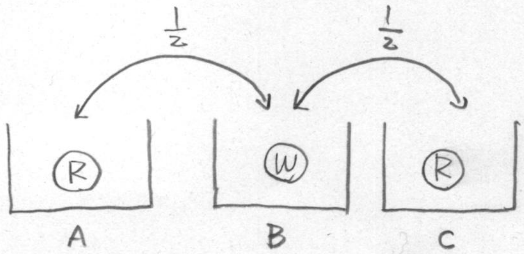
$$b_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

よって

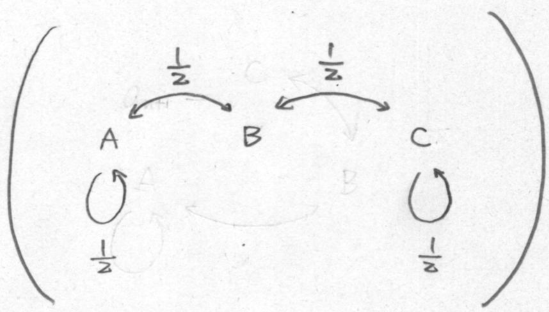
$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}\right)x + \left(3 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A388]

3個の箱A，B，Cがあり，ボールが1個ずつ入っている。コインを投げて表が出れば箱Aのボールと箱Bのボールを交換し，裏が出れば箱Bのボールと箱Cのボールを交換する試行を繰り返す。最初に，箱Aには赤いボールが，箱Bには白いボールが，箱Cには赤いボールが入っているものとして，この試行をn回繰り返したとき，白いボールが箱Aに入っている確率a_n，箱Bに入っている確率b_n，箱Cに入っている確率c_nをそれぞれ求めよ。（2017 津田塾大）



$a_0=0,\ b_0=1,\ c_0=0$



$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n & \text{―― ①} \\ b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n & \text{―― ②} \\ c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n & \text{―― ③} \end{cases}$$

② より

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+c_n)$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)$$

$$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}$$

$$-)\quad \frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$$

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

$\alpha=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}\alpha=\frac{1}{2}$

$\alpha=\frac{1}{3}$

$$b_n-\frac{1}{3}=\left(b_0-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$b_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$b_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

①－③ より

$$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n)$$

$$a_n-c_n=(a_0-c_0)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

よって $a_n=c_n$

ここで

$a_n+b_n+c_n=1$ より

$$2a_n=1-b_n$$

$$a_n=\frac{1}{2}\left\{1-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

よって

$$\begin{cases} a_n=c_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\} \\ b_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \end{cases}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題A389]

nは自然数とする。3次方程式$x^3-3x^2-27x-27=0$の3つの解a, b, cについて，$p_n=a^n+b^n+c^n$とおく。

(1) a, b, cは3つの異なる実数であることを示せ。

(2) p_1, p_2, p_3の値を求めよ。

(3) p_{n+3}をp_n, p_{n+1}およびp_{n+2}を用いて表せ。

(4) p_nは3^nの倍数であることを示せ。

(2012 福島県立医科大)

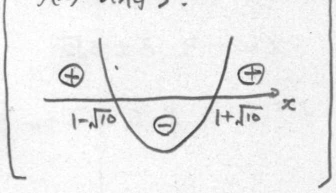
(1) 証明

$f(x)=x^3-3x^2-27x-27$ とおくと

$f'(x)=3x^2-6x-27$

$=3(x^2-2x-9)$

$f'(x)$ の符号!



$f(0)=-27<0$

$f(-2)=-8-12+54-27$

$=7>0$

なので

x	$\cdots$	$1-\sqrt{10}$	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	$1+\sqrt{10}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘	⊕	↘	⊖	↘		↗

増減表より

$f(1-\sqrt{10})>0$ かつ $f(1+\sqrt{10})<0$

となるので

$f(x)=0$ は 3つの異なる実数解 a, b, c をもつ。■

(2) 解法1

解と係数の関係より

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ ab+bc+ca=-27 \\ abc=27 \end{cases}$$

このとき

$P_1=a+b+c=3$

$P_2=a^2+b^2+c^2$

$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=9+54$

$=63$.

$P_3=a^3+b^3+c^3$

$=(a^3+b^3+c^3-3abc)+3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=3\times(63+27)+3\times 27$

$=270+81$

$=351$

よって

$\underline{P_1=3,\ P_2=63,\ P_3=351}$

解法2 (P_3の求め方)

a, b, c は $f(x)=0$ の解なので

$x^3-3x^2-27x-27=0$

つまり $x^3=3x^2+27x+27$

を満たす。

よって

$a^3=3a^2+27a+27$

$b^3=3b^2+27b+27$

$+)\ c^3=3c^2+27c+27$

$a^3+b^3+c^3=3(a^2+b^2+c^2)+27(a+b+c)+81$

$P_3=3\times 63+27\times 3+81$

$=189+81+81$

$=\underline{\underline{351}}$

(裏に続く)

(3)

a, b, c は $f(x)=0$ の解なので

$$x^3-3x^2-27x-27=0$$

つまり $x^3=3x^2+27x+27$

の解 である.

両辺に x^n をかけて

$$x^{n+3}=3x^{n+2}+27x^{n+1}+27x^n$$

を満たすので

$$a^{n+3}=3a^{n+2}+27a^{n+1}+27a^n$$

$$b^{n+3}=3b^{n+2}+27b^{n+1}+27b^n$$

$$+)\ c^{n+3}=3c^{n+2}+27c^{n+1}+27c^n$$

$$\underline{\underline{P_{n+3}=3P_{n+2}+27P_{n+1}+27P_n}}$$

(4) $\boxed{\text{証明}}$

[I] $n=1,2,3$ のとき

$$\begin{cases} P_1=3 \\ P_2=63=3^2\times 7 \\ P_3=351=3^3\times 13 \end{cases}$$

となり P_n は 3^n の倍数 である.

[II] $n=k, k+1, k+2$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

P_n が 3^n の倍数 であると仮定する.

つまり

$$P_k=3^k l,\ P_{k+1}=3^{k+1}m,\ P_{k+2}=3^{k+2}n$$

$$(l, m, n\in\mathbb{Z})$$

とできる.

このとき, (3) で得られた漸化式で $n=k$ として

$$P_{k+3}=3P_{k+2}+27P_{k+1}+27P_k$$

$$=3^{k+3}n+3^{k+4}m+3^{k+3}l$$

$$=3^{k+3}(n+3m+l)$$

となり

$n=k, k+1, k+2$ のとき 3^n の倍数 であれば

$n=k+3$ のときも 3^n の倍数 である.

[I], [II] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ で

P_n は 3^n の倍数 である. ■

(1) $\boxed{\text{証明2}}$

$$x^3-3x^2-27x-27=0$$

$$\left(\begin{array}{r|rrrr} -3 & 1 & -3 & -27 & -27 \\ & & -3 & 18 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & -9 & \boxed{0} \end{array}\right)$$

$$(x+3)(x^2-6x-9)=0$$

$$x=-3,\ 3\pm3\sqrt{2}$$

よって a, b, c は3つの異なる実数解である. ■

pを素数とする。

(1) 自然数kが$1 \leqq k \leqq p-1$を満たすとき，${}_p\mathrm{C}_k$はpで割り切れることを示せ。ただし，${}_p\mathrm{C}_k$はp個のものからk個取った組合せの総数である。

(2) nを自然数とするとき，nに関する数学的帰納法を用いて，$n^p - n$はpで割り切れることを示せ。

(3) nがpの倍数でないとき，$n^{p-1}-1$はpで割り切れることを示せ。 (2014 富山大)

(1) $\boxed{証明1}$

$${}_p\mathrm{C}_k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

$$= p \times \frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$$

$$= \frac{p}{k} \times \frac{(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!}$$

$$= \frac{p}{k} \times {}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

$$k \cdot {}_p\mathrm{C}_k = p \cdot {}_{p-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

ここで p:素数 かつ $1 \leqq k \leqq p-1$ より

kとp は互いに素 なので

${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる. ■

(2) $\boxed{証明}$

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$1^p - 1 = 0$

となり $n^p - n$ は p で割り切れる.

[Ⅱ] $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

$n^p - n$ が p で割り切れると仮定する.

つまり

$$k^p - k = pa \quad (a \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow k^p = k + pa$$

とできる.

$n=k+1$ のとき

$$(k+1)^p - (k+1)$$

$$= {}_p\mathrm{C}_0 k^p + {}_p\mathrm{C}_1 k^{p-1} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} k + {}_p\mathrm{C}_p - k - 1$$

$$= k^p + ({}_p\mathrm{C}_1 k^{p-1} + \cdots + {}_p\mathrm{C}_{p-1} k) - k$$

$$= (k+pa) + (p\text{の倍数}) - k \quad (\because (1) \text{より})$$

$$= pa + (p\text{の倍数})$$

となり

$n=k$ のとき $n^p - n$ が p で割り切れるならば

$n=k+1$ のときも $n^p - n$ は p で割り切れる.

[Ⅰ],[Ⅱ] より

すべての $n \in \mathbb{N}$ について

$n^p - n$ は p で割り切れる. ■

(3) $\boxed{証明}$

(2) より.

$$n^p - n = p\ell \quad (\ell \in \mathbb{Z})$$

とできる.

$$n(n^{p-1} - 1) = p\ell.$$

ここで

n と p は互いに素 なので

$n^{p-1} - 1$ は p で割り切れる. ■

(1) $\boxed{証明2}$

$${}_p\mathrm{C}_k = \frac{p!}{k!(p-k)!} \quad より$$

$$k!\,{}_p\mathrm{C}_k = p(p-1)\cdots(p-k+1)$$

ここで

$1 \leqq k \leqq p-1$ より.

$k!$ と p は互いに素

つまり ${}_p\mathrm{C}_k$ は p で割り切れる. ■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B391]

nを自然数とする。n個の実数a_1, a_2, ……, a_nが$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n \geqq 0$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$を満たすとき, $1 \leqq l \leqq n$であるすべての自然数lに対して$\frac{l}{n} \leqq \sum_{k=1}^{l} a_k \leqq 1$が成り立つことを示せ。

(2006 山形大)

証明1

$1 \leqq l \leqq n$ で $a_l \geqq 0$ なので

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \leqq \sum_{k=1}^{n} a_k = 1$$

より

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \leqq 1$$

ある $l \in \mathbb{N}$ $(1 \leqq l \leqq n-1)$ について

$$\sum_{k=1}^{l} a_k < \frac{l}{n} \quad \text{——①} \quad \text{と仮定すると.}$$

$$\sum_{k=l+1}^{n} a_k = 1 - \sum_{k=1}^{l} a_k > 1 - \frac{l}{n} = \frac{n-l}{n}$$

より

$$\sum_{k=l+1}^{n} a_k > \frac{n-l}{n} \quad \text{——②}$$

一方

$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_l$ より.

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \geqq l a_l \quad \text{——③}$$

①, ③ より

$$l a_l < \frac{l}{n}$$

$$a_l < \frac{1}{n}$$

よって.

$l+1 \leqq k \leqq n$ で $a_k < \frac{1}{n}$ なので

$$\sum_{k=l+1}^{n} a_k < \frac{n-l}{n} \quad \text{——④}$$

② と ④ は矛盾する.

ゆえに

すべての $l \in \mathbb{N}$ について.

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \geqq \frac{l}{n}$$

以上により

$$\frac{l}{n} \leqq \sum_{k=1}^{l} a_k \leqq 1 \quad \text{が成り立つ.}$$

■

証明2 $\left(\frac{l}{n} \leqq \sum_{k=1}^{l} a_k \text{ の証明}\right)$

$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n \geqq 0$ であることと

$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_l = 1 - (a_{l+1} + \cdots\cdots + a_n)$ より

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_l \geqq 1 - (n-l) a_1$$

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_l \geqq 1 - (n-l) a_2$$

$$\vdots$$

$$a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_l \geqq 1 - (n-l) a_l \quad (+$$

$$l \sum_{k=1}^{l} a_k \geqq l - (n-l) \sum_{k=1}^{l} a_k$$

よって

$$n \sum_{k=1}^{l} a_k \geqq l$$

つまり

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \geqq \frac{l}{n}$$

■

証明3

$\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$ より $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{n}$

つまり.

$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n \text{ の平均値}) = \frac{1}{n}$

$a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_n$ より.

$1 \leqq l \leqq n$ であるすべての $l \in \mathbb{N}$ について.

$(a_1, a_2, \cdots, a_l \text{ の平均値}) \geqq \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} a_k \geqq \frac{1}{n}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{l} a_k \geqq \frac{l}{n}$$

■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B392]

3種類の記号 a，b，c から重複を許して n 個を選び，それらを1列に並べて得られる長さ n の記号列を考える。このような記号列の中で，a がちょうど偶数個含まれるようなものの総数を $g(n)$ とする。ただし，0個の場合も偶数個とみなす。たとえば，$g(1)=2$，$g(2)=5$ である。

(1)　自然数 $n \geqq 1$ に対して $g(n+1)=g(n)+3^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　$g(n)$ を求めよ。

(3)　一般に，a を含む m 種類の記号から重複を許して n 個を選び，それらを1列に並べて得られる長さ n の記号列を考える。ただし，$m \geqq 2$ とする。このような記号列の中で，a がちょうど奇数個含まれるようなものの総数を $k_m(n)$ とする。自然数 $n \geqq 1$ に対して，$k_m(n)$ を求めよ。

(2015　早稲田大)

(1) 証明1

長さ n のとき　　長さ $n+1$ のとき

a が偶数個 $g(n)$ $\xrightarrow{b\ \text{or}\ c}$ a が偶数個 $g(n)\times 2+(3^n-g(n))$

a が奇数個 $3^n-g(n)$ $\xrightarrow{a}$

$$g(n+1)=2g(n)+(3^n-g(n))$$

よって

$$g(n+1)=g(n)+3^n$$

■

証明2

長さ n

$\boxed{a \mid 奇数個\ (3^n-g(n))}$

$\boxed{b \mid 偶数個\ (g(n))}$

$\boxed{c \mid 偶数個\ (g(n))}$

$$g(n+1)=3^n-g(n)+g(n)+g(n)$$

$$g(n+1)=g(n)+3^n$$

■

(2)

$g(n+1)=g(n)+3^n$ より

$$\boxed{g(n+1)-g(n)=3^n}$$

$n=1$　$g(2)-g(1)=3$

$n=2$　$g(3)-g(2)=3^2$

$n=3$　$g(4)-g(3)=3^3$

⋮

$n=n-1$　$g(n)-g(n-1)=3^{n-1}$　$(n\geqq 2)$　(+

$$g(n)-g(1)=3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}$$

($n=1$ でも成り立つ)

$$g(n)-2=\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}$$

$$g(n)=\frac{3^n-3+4}{2}$$

$$\underline{\underline{g(n)=\frac{3^n+1}{2}}}$$

(3)

長さ n

$\boxed{a \mid 偶数個\ (m^n-k_m(n))}$

$\boxed{a以外 \mid 奇数個\ (k_m(n))}$

$$k_m(n+1)=m^n-k_m(n)+k_m(n)\times(m-1)$$

$$k_m(n+1)=(m-2)k_m(n)+m^n$$

$$\frac{k_m(n+1)}{m^{n+1}}=\frac{m-2}{m}\cdot\frac{k_m(n)}{m^n}+\frac{1}{m}$$

$$-)\quad \alpha=\frac{m-2}{m}\alpha+\frac{1}{m}$$

$$\frac{k_m(n+1)}{m^{n+1}}-\alpha=\frac{m-2}{m}\left(\frac{k_m(n)}{m^n}-\alpha\right)$$

$\alpha=\frac{1}{2}$

$$\frac{k_m(n+1)}{m^{n+1}}-\frac{1}{2}=\frac{m-2}{m}\left(\frac{k_m(n)}{m^n}-\frac{1}{2}\right)$$

よって

$$\frac{k_m(n)}{m^n}-\frac{1}{2}=\left(\frac{k_m(1)}{m}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)^{n-1}$$

(ここで $k_m(1)=1$ なので)

$$\frac{k_m(n)}{m^n}-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)^{n-1}$$

$$\frac{k_m(n)}{m^n}-\frac{1}{2}=-\frac{m-2}{2m}\left(\frac{m-2}{m}\right)^{n-1}$$

$$\frac{k_m(n)}{m^n}=-\frac{1}{2}\left(\frac{m-2}{m}\right)^n+\frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{k_m(n)=\frac{m^n-(m-2)^n}{2}}}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B393]

(1) nを自然数とする。三角関数の加法定理を用いて，次の等式を導け。

$$\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos\theta\cos(n+1)\theta$$

(2) $\cos 2\theta=T_2(\cos\theta)$，$\cos 3\theta=T_3(\cos\theta)$ を満たす整式$T_2(x)$，$T_3(x)$をそれぞれ求めよ。 チェビシェフ多項式

(3) すべての自然数nに対し，$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ を満たす整数係数のn次の整式$T_n(x)$が存在することを示せ。

(4) すべての自然数kに対し，$\cos\frac{\pi}{4k}$ は無理数であることを示せ。ただし，$\sqrt{2}$が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(2017 埼玉大)

(1) (証明)

$\cos((n+1)\theta+\theta)=\cos(n+1)\theta\cos\theta-\sin(n+1)\theta\sin\theta$

$+)\ \cos((n+1)\theta-\theta)=\cos(n+1)\theta\cos\theta+\sin(n+1)\theta\sin\theta$

$\cos(n+2)\theta+\cos n\theta=2\cos\theta\cos(n+1)\theta$

■

(2)

$\cos 2\theta=\cos(\theta+\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$=2\cos^2\theta-1=T_2(\cos\theta)$

よって $\underline{\underline{T_2(x)=2x^2-1}}$

$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)$

$=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta$

$=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta$

$=2\cos^3\theta-\cos\theta-2(1-\cos^2\theta)\cos\theta$

$=4\cos^3\theta-3\cos\theta=T_3(\cos\theta)$

よって $\underline{\underline{T_3(x)=4x^3-3x}}$

(3)

[Ⅰ] $n=1, 2$ のとき

$T_1(\cos\theta)=\cos\theta$ なので

$T_1(x)=x$

(2)より $T_2(x)=2x^2-1$

よって

$n=1, 2$ のとき

$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$

を満たす整数係数のn次の整式$T_n(x)$は存在する。

[Ⅱ] $n=k, k+1$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ を満たす整数係数のn次の整式$T_n(x)$が存在すると仮定

つまり，

$\begin{cases}\cos k\theta=T_k(\cos\theta)\\ \cos(k+1)\theta=T_{k+1}(\cos\theta)\end{cases}$

を満たす整数係数の整式$T_k(x)$, $T_{k+1}(x)$が存在する。

(1)で示した等式で$n=k$とすると

$\cos(k+2)\theta+\cos k\theta=2\cos\theta\cos(k+1)\theta$

より

$\cos(k+2)\theta=2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta$

$=2T_1(\cos\theta)T_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta)$

となり

$\cos(k+2)\theta=T_{k+2}(\cos\theta)$ とおくと

$T_{k+2}(x)$は整数係数のk+2次の整式といえる。

よって

$n=k, k+1$ のとき存在すれば

$n=k+2$ のときも存在する。

[Ⅰ],[Ⅱ]より

すべての$n\in\mathbb{N}$で

$\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ を満たす整数係数のn次の整式$T_n(x)$が存在する。

■

(裏に続く)

(4) (背理法)

ある自然数 k で $\cos\frac{\pi}{4k}$ が有理数になると仮定し、その $k = k_1$ とする

つまり $\cos\frac{\pi}{4k_1} = \cos\theta$ は有理数である。

(3) で すべての $n \in \mathbb{N}$ で

$\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$ を満たす。

整数係数の n 次の整式 $T_n(x)$ が存在するので

$\cos k_1\theta$ は 整数係数の $\cos\theta$ での整式で表される

つまり

$\cos k_1\theta$ は有理数である。

しかし

$\cos k_1\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、

無理数である。

これは 有理数 $\neq$ 無理数 に矛盾

よって、

すべての $k \in \mathbb{N}$ で

$\cos\frac{\pi}{4k}$ は無理数である。■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B394]

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は $\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$ を満たすことを示せ。

(2) すべての n に対し，a_n, b_n はともに正の整数で，互いに素であることを示せ。

(2002　東京大)

(1) (証明)

x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商 $Q_n(x)$

とおくと

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n$$

$$x^{n+2}=(x^2-x-1)xQ_n(x)+a_nx^2+b_nx$$

$$\begin{array}{r}
xQ_n(x) \qquad\qquad +a_n \\
x^2-x-1 \,\overline{)\, (x^2-x-1)xQ_n(x)+a_nx^2+b_nx} \\
\underline{(x^2-x-1)xQ_n(x) \qquad\qquad\qquad} \\
a_nx^2+b_nx \\
\underline{a_nx^2-a_nx-a_n} \\
(a_n+b_n)x+a_n
\end{array}$$

x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余り は

$$a_{n+1}x+b_{n+1}=(a_n+b_n)x+a_n$$

となり，x についての恒等式なので

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \\ b_{n+1}=a_n \end{cases}$$

■

(2) $\boxed{\text{解法1}}$

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{array}{r}
1 \\
x^2-x-1 \,\overline{)\, x^2} \\
\underline{x^2-x-1} \\
x+1
\end{array} \\[2em]
\begin{array}{r}
x+1 \\
x^2-x-1 \,\overline{)\, x^3} \\
\underline{x^3-x^2-x} \\
x^2+x \\
\underline{x^2-x-1} \\
2x+1
\end{array}
\end{array}\right]$$

$$\begin{cases} a_1=1,\ b_1=1 \\ a_2=2,\ b_2=1 \end{cases}$$

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$$(a_1, b_1)=(1, 1)$$

なので

a_1 と b_1 は ともに

正の整数で，互いに素である。

[Ⅱ] $n=k$ のとき

ともに正の整数で，互いに素

であると仮定する。

このとき

$$\begin{cases} a_{k+1}=a_k+b_k>0 \\ b_{k+1}=a_k>0 \end{cases}$$

なので

$n=k+1$ のときも ともに正の整数

である。

ここで

a_{k+1} と b_{k+1} が互いに素

でないと仮定すると

$$\begin{cases} a_{k+1}=ga \\ b_{k+1}=gb \end{cases}$$

(a, b は互いに素，$g\neq1$，$g\in\mathbb{N}$)

$$a_{k+1}-b_{k+1}=g(a-b)$$

$$(a_k+b_k)-a_k=g(a-b)$$

$$b_k=g(a-b) \quad\text{——①}$$

$a_{k+1}=a_k+b_k$ より

$$ga=a_k+g(a-b)$$

$$a_k=gb \quad\text{——②}$$

①，② より

a_k と b_k は g を公約数に

もつが，

これは a_k と b_k が互いに素

であることに矛盾

よって

a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素である。

つまり

$n=k$ のとき成り立てば

$n=k+1$ のときも成り立つ。

[Ⅰ]，[Ⅱ] より

すべての $n\in\mathbb{N}$ で

a_n と b_n はともに正の整数で，

互いに素である。

■

(裏に続く)

$\boxed{\text{解法2}}$

[II] $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき

$(a_k, b_k)=1$ であると仮定する.

$n=k+1$ のとき (1) より

$$
\begin{aligned}
(a_{k+1}, b_{k+1}) &= (a_k+b_k, a_k) \\
&= (b_k, a_k) \quad \text{———— } (*) \text{ 互助法} \\
&= (a_k, b_k) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(あとは省略)

$(*)$ $(a, b)=(a-kb, b)$ の証明

$(a, b)=d$ とおくと

a', b' を互いに素な自然数 として

$$
\begin{cases} a=a'd \\ b=b'd \end{cases}
$$

とできる.

このとき

$$
\begin{aligned}
a-kb &= a'd-kb'd \\
&= (a'-kb')d
\end{aligned}
$$

$a-kb>0$, $d>0$ のとき

$a'-kb'$ は 自然数 である.

ここで

b' と $a'-kb'$ が互いに素でない

自然数 であると仮定すると

$$
\begin{cases} b'=md' \\ a'-kb'=nd' \end{cases}
$$

となる $m, n \in \mathbb{N}$ と 2以上の $d' \in \mathbb{N}$

が存在する.

これらより

$$
\begin{cases} a'=(km+n)d' \\ b'=md' \end{cases}
$$

となり, $km+n, m \in \mathbb{N}$ であり,

d' は 2以上の 自然数 であることから,

a' と b' が互いに素であることに矛盾.

よって

b' と $a'-kb'$ は互いに素

つまり

$(a, b)=(a-kb, b)$ ■