[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B401]

(1) 多項式 $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの余りを，a，$f(a)$，$f'(a)$ を使って表せ。	(2007 早稲田大)
(2) x^{100} を $(x-1)^3$ で割ったとき，余りである多項式の最高次の項の係数を求めよ。	(2013 関西大)

(1)

$f(x)$ を $(x-a)^2$ で割った商 $Q(x)$，

余り $px+q$ とおくと

$$f(x)=(x-a)^2Q(x)+px+q \quad \text{——— ①}$$

$$f(a)=pa+q \quad \text{——— ②}$$

① の両辺を x で微分して

$$f'(x)=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p$$

$$f'(a)=p \quad \text{——— ③}$$

②，③ より

$$p=f'(a)\ ,\ q=f(a)-af'(a)$$

よって

余り $f'(a)x+f(a)-af'(a)$

(2) $\boxed{解法1}$

x^{100} を $(x-1)^3$ で割った商 $Q(x)$，

余り ax^2+bx+c とおくと

$$x^{100}=(x-1)^3Q(x)+ax^2+bx+c$$

両辺を x で微分して

$$100x^{99}=3(x-1)^2Q(x)+(x-1)^3Q'(x)+2ax+b$$

さらに両辺を x で微分して

$$9900x^{98}=6(x-1)Q(x)+3(x-1)^2Q'(x)+3(x-1)^2Q'(x)+(x-1)^3Q''(x)+2a$$

$x=1$ を代入して

$$9900=2a$$

よって $a=4950$

(2) $\boxed{解法2}$

$x-1=t$ とおくと

$$x=t+1$$

$$x^{100}=(t+1)^{100}$$

$$={}_{100}C_0t^{100}\cdot1^0+{}_{100}C_1t^{99}\cdot1^{99}+\cdots+{}_{100}C_{97}t^3\cdot1^{97}+{}_{100}C_{98}t^2\cdot1^{98}+{}_{100}C_{99}t\cdot1^{99}+{}_{100}C_{100}t^0\cdot1^{100}$$

$$=\underline{{}_{100}C_0t^{100}+{}_{100}C_1t^{99}+\cdots+{}_{100}C_{97}t^3}+{}_{100}C_{98}t^2+{}_{100}C_{99}t+{}_{100}C_{100}$$

〰 部分は $t^3=(x-1)^3$ で割り切れるので

$${}_{100}C_{98}t^2+{}_{100}C_{99}t+{}_{100}C_{100}$$

$$={}_{100}C_{98}(x-1)^2+{}_{100}C_{99}(x-1)+{}_{100}C_{100}$$

の最高次の係数を調べるとよく

$${}_{100}C_{98}={}_{100}C_2=\frac{100\times99}{2}=4950$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B402]

$Q(x)$ を2次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき，2次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。　（2006　京都大）

証明1

$P(x)$ を 2次式 $Q(x)$ で割ったときの

商 $q(x)$，余り $ax+b$ とおくと

$P(x)=Q(x)q(x)+ax+b$

$\{P(x)\}^2=\{Q(x)q(x)+ax+b\}^2$

$=\{Q(x)\}^2\{q(x)\}^2+2Q(x)q(x)(ax+b)+(ax+b)^2$

これが $Q(x)$ で割り切れるので

$(ax+b)^2=Q(x)\times k$　$(k\in\mathbb{R})$

$k\neq0$ なので

$Q(x)=\frac{1}{k}(ax+b)^2$

つまり

$Q(x)=0$ は

$x=-\frac{b}{a}$ なる重解をもつ.

■

証明2

$Q(x)=0$ の2解を $x=\alpha,\beta$ とおくと

$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

とできる.

ここで $\alpha\neq\beta$ と仮定すると.

$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるから

$\{P(x)\}^2=a(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$

なる $g(x)$ が存在する.

$\{P(\alpha)\}^2=0$，$\{P(\beta)\}^2=0$ より

$P(\alpha)=0$，$P(\beta)=0$

よって

$\alpha\neq\beta$ のとき

$P(x)$ は $(x-\alpha)(x-\beta)$ を因数にもち.

$P(x)$ が $Q(x)$ で割り切れることとなり

矛盾する.

つまり

$\alpha=\beta$

よって. $Q(x)=0$ は重解をもつ.

■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B403]　　(2017　弘前大)

多項式 x^3+3x^2+2x+7 を割り切り，かつすべての項の係数が正の実数であるような2次式は存在するか。

条件を満たす2次式 ax^2+bx+c
$(a>0,\ b>0,\ c>0)$ が存在するとして，
最高次の項と定数項に着目すると

$$x^3+3x^2+2x+7=(ax^2+bx+c)\left(\frac{1}{a}x+\frac{7}{c}\right)$$

とでき，

$$(\text{右辺})=x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{7a}{c}x^2+\frac{7b}{c}x+7$$
$$=x^3+\left(\frac{b}{a}+\frac{7a}{c}\right)x^2+\left(\frac{c}{a}+\frac{7b}{c}\right)x+7$$

x についての恒等式なので

$$\begin{cases}\dfrac{b}{a}+\dfrac{7a}{c}=3\\[2mm]\dfrac{c}{a}+\dfrac{7b}{c}=2\end{cases}$$

ここで

$$x^3+3x^2+2x+7=\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\left(x+\frac{7a}{c}\right)$$

とでき，
$x^3+3x^2+2x+7=0$ の解の1つは

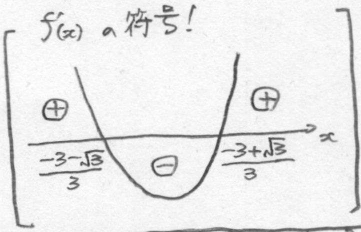
$$x=-\frac{7a}{c}=-\left(3-\frac{b}{a}\right)$$
$$=\frac{b}{a}-3>-3 \quad \text{——— ①}$$

$f(x)=x^3+3x^2+2x+7$ とおくと
$f'(x)=3x^2+6x+2$

$f'(x)=0$ とおくと

$$\left(\begin{aligned}&3x^2+6x+2=0\\&x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}\end{aligned}\right)$$

$f'(x)$ の符号!



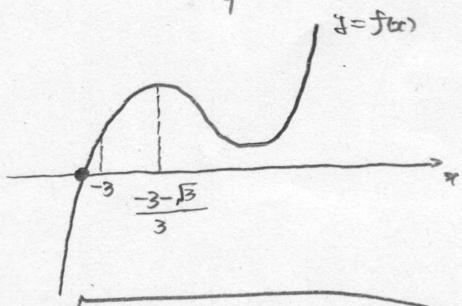
x	$\cdots$	$\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} & & & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \hline 3 & 6 & 2 & 1 & 3 & 2 & 7\\ & & & 1 & 2 & \frac{2}{3} & \\ \hline & & & & 1 & \frac{4}{3} & 7\\ & & & & 1 & 2 & \frac{2}{3}\\ \hline & & & & & -\frac{2}{3} & \frac{19}{3}\end{array}\right)$$

$$f(x)=(3x^2+6x+2)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}x+\frac{19}{3}$$

$$f\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2}{3}\times\frac{-3-\sqrt{3}}{3}+\frac{19}{3}$$
$$=\frac{63+2\sqrt{3}}{9}>0$$

$$f\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{2}{3}\times\frac{-3+\sqrt{3}}{3}+\frac{19}{3}$$
$$=\frac{63-2\sqrt{3}}{9}>0$$



$f(-3)=-27+27-6+7=1>0$

$f(x)=0$ の実数解はただ1つ存在し，
その解は $x<-3$ である。
これは ① に矛盾する。

よって，
条件を満たす2次式は存在しない。

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B404]

実数の定数 a，b $(b>0)$ に対し，2次方程式 $x^2-2ax-b=0$ と3次方程式 $x^3-(2a^2+b)x-4ab=0$ を考える。この2次方程式の解のうちの1つだけが，この3次方程式の解になるための必要十分条件を a と b の関係式で表せ。また，その共通解を a で表せ。

(2000 大阪市立大)

$$\begin{cases} x^2-2ax-b=0 & \text{——①} \\ x^3-(2a^2+b)x-4ab & \text{——②} \end{cases}$$

①×x　$x^3-2ax^2-bx=0$

②　$x^3-(2a^2+b)x-4ab=0$ (−

$-2ax^2+2a^2x+4ab=0$

$a(x^2-ax-2b)=0$

$a=0$ or $x^2-ax-2b=0$

$a=0$ とすると

① $x^2-b=0$

$x=\pm\sqrt{b}$

② $x^3-bx=0$

$x(x^2-b)=0$

$x=0,\ \pm\sqrt{b}$

よって 共通解が2つとなり不適

つまり $a\neq0$ としてよい.

$x^2-ax-2b=0$ ——③ として.

① $x^2-2ax-b=0$

③ $x^2-ax-2b=0$ (−

$-ax+b=0$

$x=\dfrac{b}{a}$　($\because a\neq0$)

このとき

① は

$\dfrac{b^2}{a^2}-2b-b=0$

$\dfrac{b^2}{a^2}=3b$

$b^2=3a^2b$

$b\neq0$ より

$b=3a^2$

逆にこのとき

① $x^2-2ax-3a^2=0$

$(x-3a)(x+a)=0$

$x=3a,\ -a$

② $x^3-5a^2x-12a^3=0$

$$\left(\begin{array}{c|cccc} 3a & 1 & 0 & -5a^2 & -12a^3 \\ & & 3a & 9a^2 & 12a^3 \\ \hline & 1 & 3a & 4a^2 & \boxed{0} \end{array}\right)$$

$(x-3a)(x^2+3ax+4a^2)=0$

$x=3a$, or $x^2+3ax+4a^2=0$

$x=-a$ は解にならないので

$x=3a$ のみが共通解といえる.

よって

$b=3a^2$，共通解 $x=3a$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B405]

(1) 任意の実数 a に対して，不等式 $a^4+b^3 \geqq a^3+ab^3$ が成り立つように実数 b の値を定めよ。

(2) 任意の整数 a に対して，不等式 $a^4+b^3 \geqq a^3+ab^3$ が成り立つように整数 b の値を定めよ。 (2002 甲南大)

(1)

$$f(a)=(a^4+b^3)-(a^3+ab^3)$$
$$=a^4-a^3-b^3a+b^3$$
$$=a(a^3-b^3)-(a^3-b^3)$$
$$=(a-1)(a^3-b^3)$$
$$=(a-1)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

とおくと.

$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqq 0$$

であり.

等号成立は

$a=-\frac{1}{2}b$ かつ $\frac{3}{4}b^2=0$

つまり $b=0$ かつ $a=0$ のとき.

ここで

$b=0$ のとき

$f(a)=(a-1)a^3=(a-1)a\times a^2$ であり

$0<a<1$ のとき $f(a)<0$

となり不適

よって $b\neq 0$ であり

$a^2+ab+b^2>0$ が成り立つので

任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して $f(a)\geqq 0$

が成り立つには

$(a-1)(a-b)\geqq 0$

が成り立つとよい.

よって $\underline{\underline{b=1}}$

(2)

(1)と同様にして.

$b=0$ のとき 任意の $a\in\mathbb{Z}$ に対して

$f(a)=(a-1)a^3=(a-1)a\times a^2\geqq 0$

が成り立つ.

$b\neq 0$ のとき.

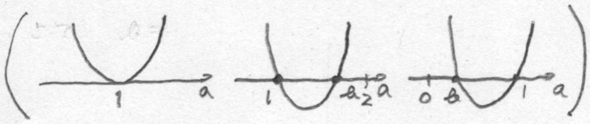
$a^2+ab+b^2>0$ が成り立つので

任意の $a\in\mathbb{Z}$ に対して $f(a)\geqq 0$

が成り立つには

$(a-1)(a-b)\geqq 0$

が成り立つとよい.



$b=1$ or $1<b\leqq 2$ or $0<b<1$

つまり

$0<b\leqq 2$

$b\in\mathbb{Z}$ より

$b=1,2$

以上により

$\underline{\underline{b=0,1,2}}$