[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B406]

$x>0$，$y>0$，$z>0$ とする。$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=\dfrac{1}{4}$ のとき，$x+2y+3z$ の最小値を求めよ。

(2011　神奈川大)

$\boxed{\text{解法1}}$

$(x+2y+3z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}\right)$

$=1+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{3x}{z}+\dfrac{2y}{x}+4+\dfrac{6y}{z}+\dfrac{3z}{x}+\dfrac{6z}{y}+9$

なので

$\dfrac{1}{4}(x+2y+3z)=\dfrac{2x}{y}+\dfrac{3x}{z}+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{6y}{z}+\dfrac{3z}{x}+\dfrac{6z}{y}+14$

$x+2y+3z=4\left\{\left(\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}\right)+\left(\dfrac{3x}{z}+\dfrac{3z}{x}\right)+\left(\dfrac{6y}{z}+\dfrac{6z}{y}\right)+14\right\}$

ここで

$x>0$，$y>0$，$z>0$　なので

(相加)≧(相乗)

$$\begin{cases}\dfrac{2x}{y}+\dfrac{2y}{x}\geqq 2\sqrt{\dfrac{2x}{y}\times\dfrac{2y}{x}}=4\\[2mm] \dfrac{3x}{z}+\dfrac{3z}{x}\geqq 2\sqrt{\dfrac{3x}{z}\times\dfrac{3z}{x}}=6\\[2mm] \dfrac{6y}{z}+\dfrac{6z}{y}\geqq 2\sqrt{\dfrac{6y}{z}\times\dfrac{6z}{y}}=12\end{cases}$$

$x+2y+3z\geqq 4(4+6+12+14)$

$x+2y+3z\geqq 144$

等号成立は

$\dfrac{2x}{y}=\dfrac{2y}{x}$　かつ　$\dfrac{3x}{z}=\dfrac{3z}{x}$　かつ　$\dfrac{6y}{z}=\dfrac{6z}{y}$

かつ　$x+2y+3z=144$

つまり

$x=y=z=24$　のとき

よって

$\underline{\underline{\min(x+2y+3z)=144}}$

$\boxed{\text{解法2}}$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

が成り立つので

$\vec{a}=(\sqrt{x},\sqrt{2y},\sqrt{3z})$，$\vec{b}=\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}},\sqrt{\dfrac{2}{y}},\sqrt{\dfrac{3}{z}}\right)$

とおくと

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=1+2+3=6\\ |\vec{a}|=\sqrt{x+2y+3z}\\ |\vec{b}|=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

なので

$|6|\leqq\sqrt{x+2y+3z}\times\dfrac{1}{2}$

$\sqrt{x+2y+3z}\geqq 12$

両辺ともに正なので2乗してよく

$x+2y+3z\geqq 144$

等号成立は

$\sqrt{x}:\sqrt{2y}:\sqrt{3z}=\sqrt{\dfrac{1}{x}}:\sqrt{\dfrac{2}{y}}:\sqrt{\dfrac{3}{z}}$

かつ　$x+2y+3z=144$.

つまり

$x=y=z=6$　のとき.

よって

$\underline{\underline{\min(x+2y+3z)=144}}$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B407]

0以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式 $x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ の解のとる値の範囲を求めよ。

(2005 東京大)

解法1

$s+t=u$ とおくと

$u^2=s^2+2st+t^2$

$u^2=1+2st$

$st=\dfrac{u^2-1}{2}$ であり

$(s-t)^2=s^2-2st+t^2$

$=1-2\times\dfrac{u^2-1}{2}$

$=2-u^2$

$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$

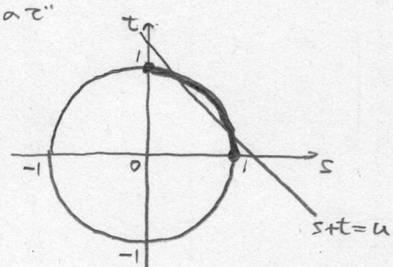
$x^4-2ux^2+2-u^2=0$

$u^2+2x^2u-x^4-2=0$

ここで

$s+t=u$, $s^2+t^2=1$ $(s\geqq 0, t\geqq 0)$

なので



$1\leqq u\leqq\sqrt{2}$ を満たす.

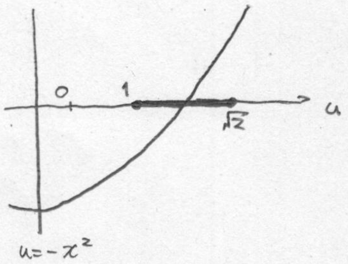
$f(u)=u^2+2x^2u-x^4-2$

とおくと.

$f(u)=0$ が $1\leqq u\leqq\sqrt{2}$ で

解をもつとよい.

軸：$u=-x^2<0$ に注意して.



$\begin{cases} f(1)\leqq 0 \\ f(\sqrt{2})\geqq 0 \end{cases}$

となるとよい.

$f(1)=1+2x^2-x^4-2$

$=-x^4+2x^2-1$

$=-(x^2-1)^2\leqq 0$

となり，常に成り立つ.

$f(\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}x^2-x^4-2$

$=-x^4+2\sqrt{2}x^2$

$=-x^2(x^2+2\sqrt{2})\geqq 0$

$x^2(x^2-2\sqrt{2})\leqq 0$

$0\leqq x^2\leqq 2\sqrt{2}$

よって

$\underline{\underline{-\sqrt[4]{8}\leqq x\leqq\sqrt[4]{8}}}$

解法2

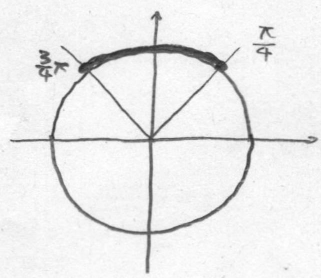
$s=\cos\theta$, $t=\sin\theta$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

とでき

$s+t=\cos\theta+\sin\theta$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\theta+\dfrac{\pi}{4}$ の図!! $\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{3}{4}\pi\right)$



$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

$1\leqq\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$

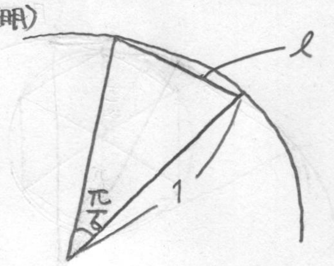
$1\leqq s+t\leqq\sqrt{2}$

(他は同様)

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B408]

円周率が3.05より大きいことを証明せよ。 (2003 東京大)

(証明)



半径1の円に内接する正十二角形の

周の長さと円周を比較する.

1辺の長さ l として,

余弦Th より

$$l^2 = 1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{6}$$

$$l^2 = 2-\sqrt{3}$$

$l>0$ より

$$l = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

ここで

$6 > 2.44^2$, $2 < 1.42^2$ より

$$\sqrt{6} > 2.44,\ \sqrt{2} < 1.42$$

$$\sqrt{6}-\sqrt{2} > 2.44-1.42 = 1.02$$

$$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} > 0.51$$

$$l > 0.51$$

よって

$$2\pi > 12l$$

$$\pi > 6\times0.51 = 3.06$$

つまり

$$\pi > 3.05$$

■

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B409]

$\tan 1^\circ$ は有理数か。 (2006 京都大)

＜背理法＞

$\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定する.

このとき

$$\tan 2^\circ = \frac{2\tan 1^\circ}{1-\tan^2 1^\circ} \quad \text{より}$$

$\tan 2^\circ$ も有理数である.

同様に

$\tan 4^\circ$, $\tan 8^\circ$, $\tan 16^\circ$, $\tan 32^\circ$, $\tan 64^\circ$

もすべて有理数である.

このとき

$$\tan 60^\circ = \tan(64^\circ - 4^\circ)$$

$$\sqrt{3} = \frac{\tan 64^\circ - \tan 4^\circ}{1+\tan 64^\circ \tan 4^\circ}$$

ここで

$\sqrt{3}$ は無理数であるが

右辺は有理数であるので

矛盾する.

つまり

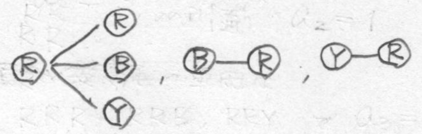
$\tan 1^\circ$ は無理数である. ■

（2005　京都大）

$n \geqq 2$ とする。先頭車両から順に1から n までの番号がついた n 両編成の列車がある。各車両を赤色，青色，黄色のいずれか1色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りあるか。

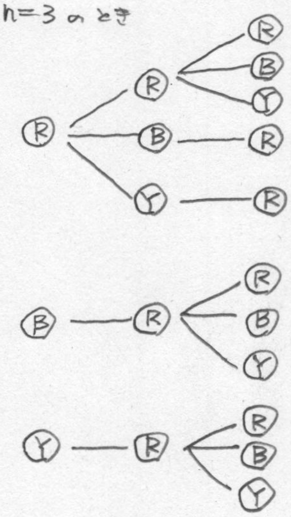
題意を満たす n 両編成の列車の塗り方を a_n（通り）と表すこととする。

$n=2$ のとき

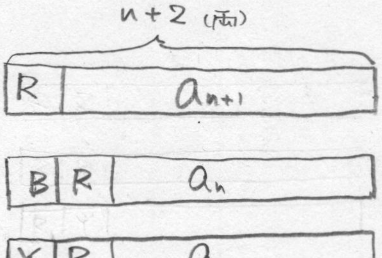


$a_2 = 5$

$n=3$ のとき



$a_3 = 11$



$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$a_{n+2} + (-2+1)a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_{n+1} - 2a_n = 0$$

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) & \text{—①} \\ a_{n+2} + a_{n+1} = 2(a_{n+1} + a_n) & \text{—②} \end{cases}$$

① より

$$a_{n+1} - 2a_n = (a_3 - 2a_2)(-1)^{n-2}$$

$$a_{n+1} - 2a_n = (-1)^{n-2} \quad \text{—①'}$$

② より

$$a_{n+1} + a_n = (a_3 + a_2)\cdot 2^{n-2}$$

$$a_{n+1} + a_n = 16\cdot 2^{n-2}$$

$$a_{n+1} + a_n = 2^{n+2} \quad \text{—②'}$$

②' − ①' より

$$3a_n = 2^{n+2} - (-1)^{n-2}$$

$$a_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3}$$

[2018スタンダードⅠⅡAB受 問題B411]

nを自然数とする。n個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$の5種類のカードがそれぞれ1枚ずつ計5枚入っている。おのおのの箱から1枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べてn桁の数Xを作る。このとき，Xが3で割り切れる確率を求めよ。

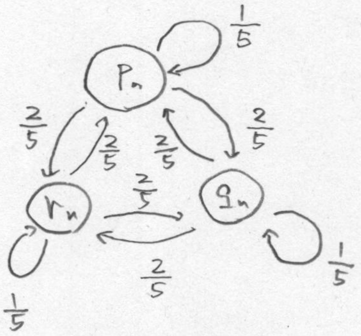
(2017　京都大)

n桁の数 X が

$\begin{cases} 3で割り切れる確率 & p_n \\ 3で割って余りが1となる確率 & q_n \\ 3で割って余りが2となる確率 & r_n \end{cases}$

とおくと，

$\begin{cases} p_n+q_n+r_n=1 \\ p_1=\frac{1}{5},\ q_1=\frac{2}{5},\ r_1=\frac{2}{5} \end{cases}$



$\begin{cases} p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}q_n+\frac{2}{5}r_n & ―①\\ q_{n+1}=\frac{2}{5}p_n+\frac{1}{5}q_n+\frac{2}{5}r_n & ―②\\ r_{n+1}=\frac{2}{5}p_n+\frac{2}{5}q_n+\frac{1}{5}r_n & ―③ \end{cases}$

②＋③

$q_{n+1}+r_{n+1}=\frac{4}{5}p_n+\frac{3}{5}q_n+\frac{3}{5}r_n$

$q_{n+1}+r_{n+1}=\frac{4}{5}p_n+\frac{3}{5}(q_n+r_n)$

$1-p_{n+1}=\frac{4}{5}p_n+\frac{3}{5}(1-p_n)$

$1-p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{3}{5}$

$p_{n+1}=-\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}$

$-)\quad \alpha=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5}$

$p_{n+1}-\alpha=-\frac{1}{5}(p_n-\alpha)$

$\alpha=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5}$

$\frac{6}{5}\alpha=\frac{2}{5}$

$\alpha=\frac{1}{3}$

$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$

$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$p_n-\frac{1}{3}=-\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

$\underline{\underline{p_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n}}$

n を2以上の自然数とする。

(1) 変量 x のデータの値が x_1, x_2, ……, x_n であるとし，$f(a)=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は x_1, x_2, ……, x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1, x_2, ……, x_n の分散であることを示せ。

(2) c を定数として，変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\quad(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n),\qquad z_k=ck\quad(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

であるとする。このとき，y_1, y_2, ……, y_n の分散が z_1, z_2, ……, z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3) 変量 x のデータの値が x_1, x_2, ……, x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする。x_1, x_2, ……, x_n, x_{n+1} の平均値を x_{n+1}, $\overline{x}$ および n を用いて表せ。

(4) 次の40個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど40, 670, 35であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が40であった。このとき，41個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ。ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第1位を四捨五入せよ。

(2016 広島大)

(1) (証明)

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-2x_k a+a^2)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\frac{2a}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+\frac{a^2}{n}\sum_{k=1}^{n}$$
$$=a^2-2\overline{x}a+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2$$
$$=(a-\overline{x})^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\overline{x}^2$$

よって

$f(a)$ を最小とする a は $a=\overline{x}$

このとき

$$\min f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2-\overline{x}^2$$
$$=(x\text{ の分散})$$

■

(2)

y, z の分散 をそれぞれ S_y^2, S_z^2 で表すこととする。

$$S_y^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k^2-\overline{y}^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k\right)^2$$

$$S_y^2=\frac{1}{n}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$=\frac{1}{12}(n+1)\{2(2n+1)-3(n+1)\}$$
$$=\frac{1}{12}(n+1)(n-1)$$

$$S_z^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k^2-\overline{z}^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}c^2k^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ck\right)^2$$
$$=\frac{c^2}{n}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{c^2}{n^2}\times\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$
$$=\frac{c^2}{12}(n+1)(n-1)$$

$S_y^2>S_z^2$ より

$$\frac{1}{12}(n+1)(n-1)>\frac{c^2}{12}(n+1)(n-1)$$

$n\geqq 2$ より

$$1>c^2$$

よって

$$\underline{\underline{-1<c<1}}$$

(3)

$$\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$ なので

$$x_1+x_2+\cdots+x_n = n\overline{x}$$

求める平均値は

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{n\overline{x}+x_{n+1}}{n+1}$$

(4)

元の平均値 $= 40$ であり

新しく入ったデータも 40 なので

新しい平均値 $= 40$

別 (3) より

$$\frac{40\times40+40}{40+1} = \frac{40\times41}{41} = 40$$

元の平均値と新しい平均値が

変わらないことに注意すると

(新しい分散)

$$= \frac{670\times40}{41}$$

$$= \frac{26800}{41}$$

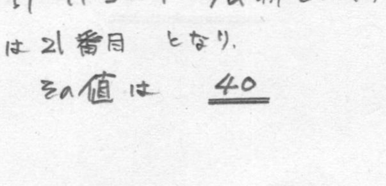
$$\fallingdotseq 653.66$$

$$\fallingdotseq 654$$

元のデータを小さい順に並べると

… 30　30　40　40 …

となっており，元の中央値 $=35$ なので



この中に40なるデータが入ると

計41コのデータの新しい中央値

は21番目となり，

その値は　40