2019　IA

第1問

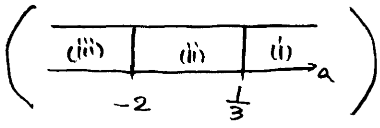
〔1〕 $9a^2-6a+1=(\underbrace{3}_{ア}a-\underbrace{1}_{イ})^2$

であり、

$A=\sqrt{9a^2-6a+1}+|a+2|$

$=\sqrt{(3a-1)^2}+|a+2|$

$=|3a-1|+|a+2|$



(i) $\frac{1}{3}<a$ のとき

$A=|\underset{\oplus}{3a-1}|+|\underset{\oplus}{a+2}|$

$=3a-1+a+2$

$=\underbrace{4}_{ウ}a+\underbrace{1}_{エ}$

(ii) $-2\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき

$A=|\underset{\ominus}{3a-1}|+|\underset{\oplus}{a+2}|$

$=-3a+1+a+2$

$=\underbrace{-2}_{オカ}a+\underbrace{3}_{キ}$

(iii) $a<-2$ のとき

$A=|\underset{\ominus}{3a-1}|+|\underset{\ominus}{a+2}|$

$=-4a-1$

$A=2a+13$ となるaは

(i) $\frac{1}{3}<a$ のとき

$4a+1=2a+13$

$2a=12$

$a=6$

(これは $a>\frac{1}{3}$ を満たす.)

(ii) $-2\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき

$-2a+3=2a+13$

$-4a=10$

$a=-\frac{5}{2}$

(これは $-2\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ に不合理)

(iii) $a<-2$ のとき

$-4a-1=2a+13$

$-6a=14$

$a=-\frac{7}{3}$

(これは $a<-2$ を満たす.)

(i)〜(iii) より

$a=\underbrace{6}_{ク},\ \underbrace{\frac{-7}{3}}_{ケコサ}$

〔2〕

(1)

p: mは奇数 かつ nは奇数

なので

$\bar{p}$: mは偶数 または nは偶数

(m とnの少なくとも一方は偶数)

よって

mが奇数 ならば nは $\underbrace{⓪}_{シ}$偶数

mが偶数 ならば nは $\underbrace{②}_{ス}$ どちらでもよい

q: 3mn は奇数である.

⇔ mは奇数 かつ nは奇数

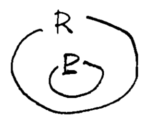
よって $p\Leftrightarrow q$

つまり, pは qであるための $\underbrace{⓪}_{セ}$ 必要十分条件

r: m+5n は偶数.

ぐ　ぐ

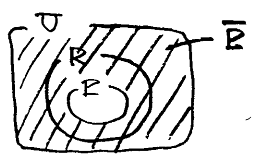
き　き



$P\subset R$ より

$p\Rightarrow r$ なので

pは rであるための $\underbrace{②}_{ソ}$ 十分条件



$\bar{P}\supset R$ でも $\bar{P}\subset R$ でも

ないので

$\bar{p}$は rであるための $\underbrace{③}_{タ}$ なんでもない

[3]

$G : y = x^2 + (2a-b)x + a^2+1$

$= \left(x + \frac{2a-b}{2}\right)^2 - \left(\frac{2a-b}{2}\right)^2 + a^2+1$

$= \left(x + \frac{2a-b}{2}\right)^2 - \frac{4a^2-4ab+b^2}{4} + a^2+1$

$= \left(x + \frac{2a-b}{2}\right)^2 - a^2 + ab - \frac{1}{4}b^2 + a^2+1$

$= \left(x - \frac{b}{2} + a\right)^2 - \frac{b^2}{4} + ab + 1$

(1) 頂点 $\left(\underbrace{\frac{b}{2}}_{イ} - a ,\ -\underbrace{\frac{b^2}{4}}_{ツ} + ab + \underbrace{1}_{テ}\right)$

(2) Gが点 $(-1, 6)$ を通るとき

$6 = 1 - 2a + b + a^2 + 1$

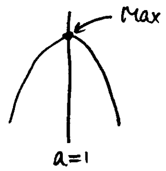
$b = -a^2 + 2a + 4$

$= -\{a^2 - 2a\} + 4$

$= -\{(a-1)^2 - 1\} + 4$

$= -(a-1)^2 + 5$

$\begin{cases} \text{頂点 } (1, 5) \\ \text{軸}: a = 1, \text{ 上に凸} \end{cases}$



$Max = \underbrace{5}_{ト} \quad (a = \underbrace{1}_{ナ})$

このとき

Gの頂点 $\left(\frac{5}{2} - 1, -\frac{25}{4} + 5 + 1\right)$

$= \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

なので

$y = x^2$ の頂点 $(0, 0)$ を

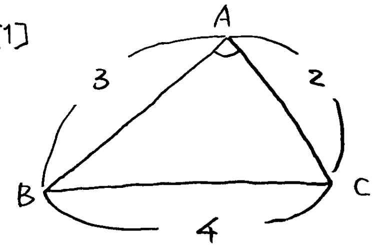
x軸方向に $\underbrace{\frac{3}{2}}_{ニヌ}$

y軸方向に $\underbrace{\frac{-1}{4}}_{ネノハ}$ だけ

平行移動したものである.

第2問

[1]



余弦Th より

$4^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times3\times2\times\cos\angle BAC$

$16 = 9 + 4 - 12\cos\angle BAC$

$12\cos\angle BAC = -3$

$\cos\angle BAC = \underline{\dfrac{-1}{4}}$ アイウ

$\cos\angle BAC < 0$ なので

$\angle BAC$ は $\underline{②}$ 鈍角 である。 エ

このとき

$\sin^2\angle BAC + \cos^2\angle BAC = 1$ より

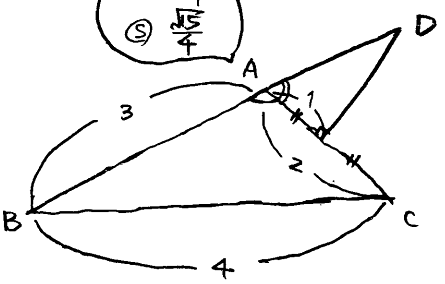
$\sin^2\angle BAC = 1 - \dfrac{1}{16}$

$\sin^2\angle BAC = \dfrac{15}{16}$

$\sin\angle BAC > 0$ なので

$\sin\angle BAC = \underline{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$ オカキ

ⓒ $-\frac{1}{4}$
ⓢ $\frac{\sqrt{15}}{4}$



$\cos\angle CAD = \cos(180° - \angle BAC)$

$= -\cos\angle BAC$

$= \underline{\dfrac{1}{4}}$ クケ

$AD\cos\angle CAD = 1$ なので

$\dfrac{1}{4}AD = 1$

$AD = \underline{4}$ コ

$S(\triangle DBC) = S(\triangle ABC) \times \dfrac{7}{3}$

$= \dfrac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \dfrac{\sqrt{15}}{4} \times \dfrac{7}{3}$

$= \underline{\dfrac{7\sqrt{15}}{4}}$ サシスセ

[2]

(1) 2013年は $Max > 135$ より $\underline{③}$ ソ

2017年は $120 < Max < 125$ より $\underline{④}$ タ

(2) ⓪ は正しい。
(最小値が傾き1の実線上にある)

① は正しい。
(モンシロチョウの最大値が実線よりも下側にある。)

② は正しい
(図3から明らか。)

③ は正しい
(図3から明らか。)

④ は誤り
(図3から明らか。)

⑤ は正しい。
(図3からは微妙だが
図4から、上から10人、下から10人のライン
を取ると幅は15日以下であることが
わかる。)

⑥ は正しい。
(実線上に4点ある。)

⑦ は誤り。
(切片が15と−15の破線の間におさまらな
い点が存在する)

よって

$\underline{④, ⑦}$ チツ

(3)
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}\times\overline{x}\times n$

$= \overline{x} - \overline{x}$

$= 0$ …… ⓪ テ

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\overline{x}}{s}$

$= \frac{1}{s}\times\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}\times\overline{x}\times n\right)$

$= \frac{1}{s}\times(\overline{x}-\overline{x})$

$= 0$ …… ⓪ ト

X'の分散は，X'の平均値 $=0$ なので

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i'-0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i')^2$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\overline{x}}{s}\right)^2$

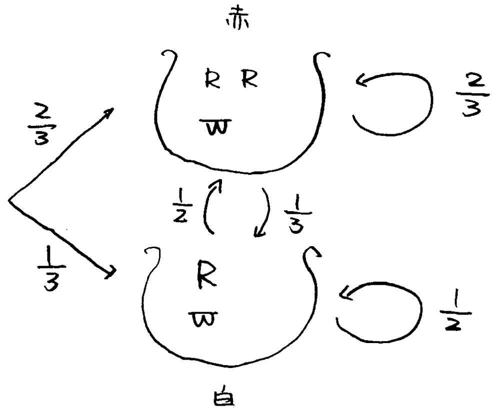
$= \frac{1}{s^2}\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$

$= \frac{1}{s^2}\times s^2$

$= 1$ …… ① ナ

M'とT'の散布図は
分布の仕方が変わらず
M'とT'の標準偏差が1
なので
すべてのデータが -1 と 1 の間
におさまることはない．
よって ② ニ

第3問



(1) 赤い袋でR.

$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ アイ

白い袋でR

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ ウエ

(2)

1回目の操作でWを取り出すとよい.

$$1-\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{6}\right)=1-\left(\frac{8}{18}+\frac{3}{18}\right)$$
$$=1-\frac{11}{18}$$
$$=\frac{7}{18}$$ オカキ

(3)

$P=\frac{7}{18}$ であり.

2回目にWを取り出すためには.

$$\left(\begin{array}{ccc} 1回目 & & 2回目 \\ R & \xrightarrow[\times\frac{1}{3}]{} & W \\ (1-P) & & \\ W & \nearrow \times\frac{1}{2} & \\ (P) & & \end{array}\right)$$

$$(1-P)\times\frac{1}{3}+P\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}P+\frac{1}{2}P$$
$$=\frac{1}{6}P+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\frac{7}{18}+\frac{1}{3}$$

クケ

$$=\frac{7}{108}+\frac{36}{108}$$
$$=\frac{43}{108}$$ コサシスセ

3回目にWを取り出すためには.

$$\left(\begin{array}{ccc} 2回目 & & 3回目 \\ R & \xrightarrow[\times\frac{1}{3}]{} & W \\ \frac{65}{108} & & \\ W & \nearrow \times\frac{1}{2} & \\ \frac{43}{108} & & \end{array}\right)$$

$$\frac{65}{108}\times\frac{1}{3}+\frac{43}{108}\times\frac{1}{2}=\frac{130}{108\times6}+\frac{129}{108\times6}$$
$$=\frac{259}{648}$$ ソタチツテト

(4) 2回目Wである確率は. $\frac{43}{108}$

2回目が白の袋からWである確率は.

$P\times\frac{1}{2}=\frac{7}{36}$

なので.

$$\frac{\frac{7}{36}}{\frac{43}{108}}=\frac{21}{43}$$ ナニヌネ

3回目Wである確率は $\frac{259}{648}$

3回目に初めてのWであるとき.

1回目		2回目		3回目
R	→	R	→	W

$\frac{11}{18}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{81}$

なので

$$\frac{\frac{11}{81}}{\frac{259}{648}}=\frac{88}{259}$$ ノハヒフヘ

第4問

(1) $49x-23y=1$

$(46+3)x-23y=1$

$23(2x-y)+3x=1.$

$\begin{cases} 2x-y=2 \\ x=-15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-15 \\ y=-32 \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} & 49x-23y=1 \\ -) & 49\times(-15)-23\times(-32)=1 \\ \hline & 49(x+15)-23(y+32)=0 \end{array}$$

$y+32=\dfrac{49}{23}(x+15).$

$x, y \in \mathbb{Z}$ より

$\begin{cases} x+15=23\ell. \\ y+32=49\ell \end{cases} \quad (\ell\in\mathbb{Z})$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=23\ell-15 \\ y=49\ell-32 \end{cases}$

$x, y\in\mathbb{N}$ のもとで $\ell=1$ のとき

$\min x=\underbrace{8}_{ア}, \quad y=\underbrace{17}_{イウ}$

ここで $\ell=k+1$ として

$x=23(k+1)-15=\underbrace{23}_{エオ}k+8$

$y=49(k+1)-32=\underbrace{49}_{カキ}k+17$

(2)

$A=49x \quad , B=23y \quad (x, y\in\mathbb{N})$

とおき

$|A-B|=1$ より

$|49x-23y|=1$

$49x-23y=\pm 1$

$49x-23y=1$ のとき

(1) より $\min x=8$

$49x-23y=-1$ のとき

$$\begin{array}{rl} & 49x-23y=-1 \\ -) & 49\times(-8)-23\times(-17)=-1 \\ \hline & 49(x+8)-23(y+17)=0 \end{array}$$

$y+17=\dfrac{49}{23}(x+8)$

$x, y\in\mathbb{Z}$ より

$\begin{cases} x+8=23m \\ y+17=49m \end{cases} \quad (m\in\mathbb{Z})$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=23m-8 \\ y=49m-17 \end{cases}$

$x, y\in\mathbb{N}$ のもとで $m=1$ のとき

$\min x=15$

よって $\min A$ となるのは

$x=8$ のときであり

$(A, B)=(49\times\underbrace{8}_{ク}, 23\times\underbrace{17}_{ケコ})$

$|A-B|=2$ のとき

$|49x-23y|=2$

$49x-23y=\pm 2$

$49x-23y=2$ のとき

$$\begin{array}{rl} & 49x-23y=2 \\ -) & 49\times16-23\times34=2 \\ \hline & 49(x-16)-23(y-34)=0. \end{array}$$

$y-34=\dfrac{49}{23}(x-16)$

$x, y\in\mathbb{Z}$ より

$\begin{cases} x-16=23k' \\ y-34=49k' \end{cases} \quad (k'\in\mathbb{Z})$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=23k'+16 \\ y=49k'+34 \end{cases}$

$x, y\in\mathbb{N}$ のもとで $k'=0$ のとき

$\min x=16.$

$49x-23y=-2$ のとき

$$\begin{array}{rl} & 49x-23y=-2 \\ -) & 49\times(-16)-23\times(-34)=-2 \\ \hline & 49(x+16)-23(y+34)=0 \end{array}$$

$y+34=\dfrac{49}{23}(x+16)$

$x, y\in\mathbb{Z}$ より

$\begin{cases} x+16=23m' \\ y+34=49m' \end{cases} \quad (m'\in\mathbb{Z})$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=23m'-16 \\ y=49m'-34 \end{cases}$

$x, y\in\mathbb{N}$ のもとで $m'=1$ のとき

$\min x=7 \quad , y=15$

よって $\min A$ となるのは

$(A, B)=(49\times\underbrace{7}_{サ}, 23\times\underbrace{15}_{シス})$

(3)

$$\begin{cases} a+1 = a\times 1 + 1 \\ a+2 = (a+1)\times 1 + 1 \\ a+2 = a\times 1 + 2 \end{cases}$$

互除法の原理より

$(a, a+1) = (a, 1) = 1$

$(a+1, a+2) = (a+1, 1) = 1$

$(a, a+2) = (a, 2) = 1, \underbrace{2}_{セ}$

よって

すべての $a \in \mathbb{N}$ で成り立つことに注意すると

$a(a+1)(a+2)$ は $3\times 2\times 1 = \underbrace{6}_{ソ}$ の倍数

(4)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 6762 \\ 3 & 3381 \\ 7 & 1127 \\ 7 & 161 \\ & 23 \end{array}$$

$6762 = \underbrace{2\times 3}_{タ}\times \underbrace{7^2}_{チ}\times \underbrace{23}_{ツテ}$

連続3整数の中に

7の倍数 と23の倍数は

ただ 1つずつ なので

$l, l+1, l+2$ のいずれかは

$7^2 = 49$, 23 の倍数である.

min l を求めるので

(2) で

$49x$ と $23y$ の差の絶対値が 2

のときを考える.

$49\times 7 = 343$, $23\times 15 = 345$

であり

$344 \div 2 = 172$ より $344 = 172\times 2$.

よって

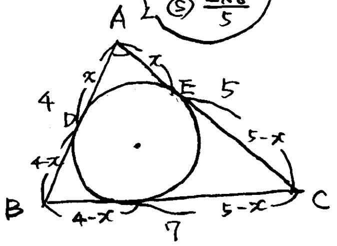
$(l, l+1, l+2) = (343, 344, 345)$

つまり $\underbrace{l = 343}_{トナニ}$

第5問

ⓒ $-\frac{1}{5}$

ⓢ $\frac{2\sqrt{6}}{5}$



$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$= 4\sqrt{6}$ より

内接円の半径

$r = \frac{2 \times 4\sqrt{6}}{4+7+5}$

$= \frac{8\sqrt{6}}{16}$

$= \frac{\sqrt{6}}{2}$ アイ

$AD = x$ とおくと、

接線の長さは等しいので、上図より

$(4-x) + (5-x) = 7$

$-2x + 9 = 7$

$-2x = -2$

$x = 1$

よって $AD = 1$ ウ

$\triangle ADE$ で余弦Th より

$DE^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{5}\right)$

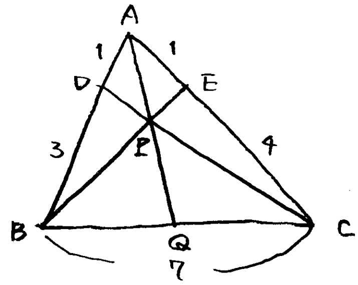
$DE^2 = 1 + 1 + \frac{2}{5}$

$DE^2 = \frac{12}{5}$

$DE > 0$ より

$DE = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{2\sqrt{15}}{5}$ エオカキ



チェバのTh より

$\frac{BQ}{QC} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{3} = 1$

$\frac{BQ}{QC} = \frac{3}{4}$ クケ

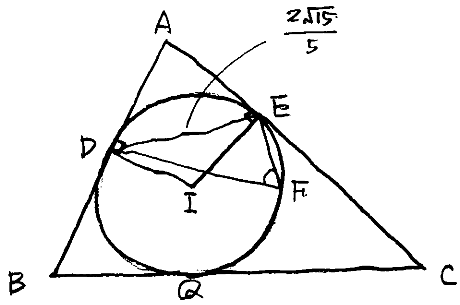
よって $BQ = 3$ コ

このとき

$\triangle ABC$ の内接円と BC の接点が

Q と一致するので

$IQ = r = \frac{\sqrt{6}}{2}$ サシ



$\triangle DFE$ で正弦Th より

$\frac{DE}{\sin\angle DFE} = 2 \times \frac{\sqrt{6}}{2}$

$\sqrt{6} \sin\angle DFE = \frac{2\sqrt{15}}{5}$

$\sin\angle DFE = \frac{2\sqrt{15}}{5\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

よって

$\sin^2\angle DFE + \cos^2\angle DFE = 1$ より

$\cos^2\angle DFE = 1 - \frac{10}{25}$

$\cos^2\angle DFE = \frac{15}{25}$

$\angle DFE < 90^\circ$ であり $\cos\angle DFE > 0$

よって $\cos\angle DFE = \frac{\sqrt{15}}{5}$ スセソ