2019 ⅡB

第1問

[1] (1) $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$

$f(0)=\underset{アイ}{-1}$

$f(\frac{\pi}{3})=3\times\frac{3}{4}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$=\frac{9}{4}+\frac{4\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}$

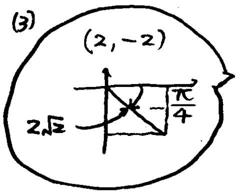
$=\underset{ウエ}{2+\sqrt{3}}$

(2) $\left\{\begin{array}{l}\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{\underset{オカ}{2}},\quad \sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}\\ \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta\end{array}\right.$ より.

$f(\theta)=3\times\frac{1-\cos2\theta}{2}+4\times\frac{1}{2}\sin2\theta-\frac{1+\cos2\theta}{2}$

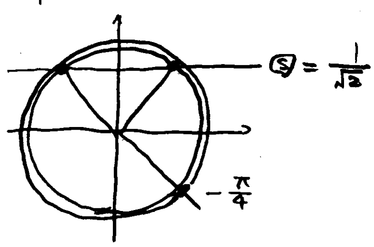
$=\underset{キ}{2}\sin2\theta-\underset{ク}{2}\cos2\theta+\underset{ケ}{1}$

(3)



$f(\theta)=\underset{コサ}{2\sqrt{2}}\sin(2\theta-\underset{シ}{\frac{\pi}{4}})+1$

$2\theta-\frac{\pi}{4}$ の図!! $(-\frac{\pi}{4}\leqq2\theta-\frac{\pi}{4}\leqq2\pi-\frac{\pi}{4})$



$-1\leqq\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})\leqq1$ より

$-2\sqrt{2}\leqq2\sqrt{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})\leqq2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}+1\leqq\underbrace{2\sqrt{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})+1}_{f(\theta)}\leqq2\sqrt{2}+1$

$2<2\sqrt{2}<3$ より

$3<2\sqrt{2}+1<4$

よって, $m=\underset{ス}{3}$

$f(\theta)=3$ となるとき

$2\sqrt{2}\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})+1=3$

$\sin(2\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

よって $\theta=\underset{セ}{\frac{\pi}{4}},\ \underset{ソ}{\frac{\pi}{2}}$

[2] $\left\{\begin{array}{ll}\log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 & \text{——②}\\ \left(\frac{1}{3}\right)^y-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 & \text{——③}\end{array}\right.$

(真数) >0 より

$x+2>0$ かつ $y+3>0$

$\Leftrightarrow x>-2$ かつ $y>-3$. $\underset{タ}{②}$

$\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2(y+3)}{\underset{チ}{2}}$

より. ② は

$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1.$

$\log_2(y+3)=\log_2(x+2)+1.$

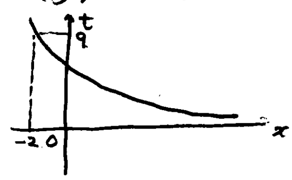
$\log_2(y+3)=\log_2(x+2)+\log_2 2$

$\log_2(y+3)=\log_2 2(x+2)$

$y+3=2(x+2)$

$y=\underset{ツ}{2}x+\underset{テ}{1}$ ——④

$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおくと



$t>0$

③ は ④ より

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}-11\times\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0$

$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}-\frac{11}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^x+6=0$

$\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+6=0$

$t^2-\underset{トナ}{11}t+\underset{ニヌ}{18}=0$

$(t-2)(t-9)=0$

ここで

$x>-2$ かつ $y>-3$ より

$x>-2$ かつ $2x+1>-3$

$x>-2$ かつ $x>-2$

$x>-2$

つまり

$\underset{ネ}{0}<t<\underset{ノ}{9}$

よって

$$t = 2 \quad \text{ハ}$$

つまり

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2.$$

$$\log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_3 2.$$

$$-x = \log_3 2.$$

$$x = -\log_3 2$$

$$= \log_3 2^{-1}$$

$$= \log_3 \frac{1}{2} \quad \text{ヒフ}$$

$$y = 2x + 1$$

$$= -2\log_3 2 + 1.$$

$$= -\log_3 4 + \log_3 3.$$

$$= \log_3 \frac{3}{4} \quad \text{ヘホ}$$

第2問

(1) $f(x)=x^3+px^2+qx$

$f'(x)=3x^2+2px+q$

$x=-1$ で極値をとるので

$f'(-1)=\underset{ア}{0}$ が必要

$3-2p+q=0$

また、$f(-1)=2$ より

$-1+p-q=2$

$p-q=3$.

これらを解いて

$p=0\ ,\ q=-3$

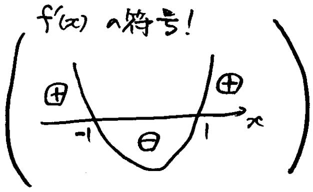
このとき

$f(x)=x^3-3x$

$f'(x)=3x^2-3$

$=3(x^2-1)$

$f'(x)$ の符号!



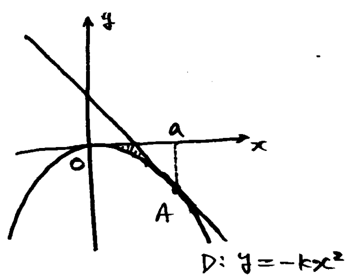
x	…	-1	…	1	…
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	↗	2	↘	-2	↗

確かに $x=-1$ で極値をとる。

よって $p=\underset{イ}{0}$, $q=\underset{ウエ}{-3}$ (十分)

また、$x=\underset{オ}{1}$ で 極小値 $\underset{カキ}{-2}$

(2)



接点 $A(a,-ka^2)$

$y'=-2kx$

$y'(x=a)=-2ka$

l: $y+ka^2=-2ka(x-a)$

$y=\underset{クケ}{-2}kax+ka^{\underset{コ}{2}}$ —— ①

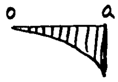
$y=0$ として

$-2kax+ka^2=0$

$2kax=ka^2$.

$ka\neq0$ より

$x=\dfrac{a}{\underset{サシ}{2}}$

 $=\underset{スセ}{\dfrac{k}{3}}a^3$

$S=\dfrac{k}{3}a^3-$ 

$=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{2}\times ka^2$

$=\dfrac{k}{3}a^3-\dfrac{k}{4}a^3$

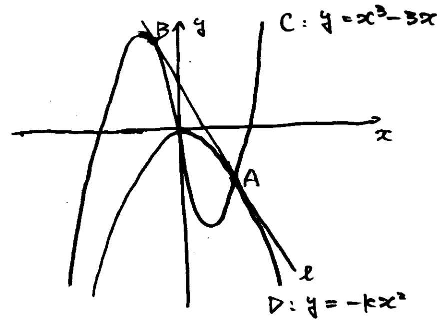
$=\underset{ソタ}{\dfrac{k}{12}}a^3$

(3) $A(a,-ka^2)$ が $C: y=x^3-3x$ 上にあるとき

$-ka^2=a^3-3a$

$a\neq0$ より

$k=\underset{チツテ}{\dfrac{3}{a}-a}$



接点 $B(b,b^3-3b)$

$y'=3x^2-3$

$y'(x=b)=3b^2-3$.

l: $y-b^3+3b=(3b^2-3)(x-b)$

$y=(3b^2-3)x-2b^3$

$=\underset{ト}{3}(b^2-\underset{ナ}{1})x-\underset{ニ}{2}b^3$ —— ② $g(x)$ とおく

$f(x)-g(x)=x^3-3x-3(b^2-1)x+2b^3$

$=x^3-3b^2x+2b^3$

$=(x-\underset{ヌ}{b})^2(x+\underset{ネ}{2}b)$

$x=b$ で接し，$x=-2b$ で交わる
ことを意味するので

$$a=-2b \iff b=-\frac{a}{2}$$

① $=$ ② なので

$$-2ka=3(b^2-1)$$

であり

$$-2\left(\frac{3}{a}-a\right)a=3\left(\frac{a^2}{4}-1\right)$$

$$-6+2a^2=\frac{3}{4}a^2-3$$

$$\frac{5}{4}a^2=3$$

$$a^2=\underbrace{\frac{12}{5}}$$ ノハヒ

このとき

$$S=\frac{k}{12}a^3$$

$$=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{a}-a\right)a^3$$

$$=\frac{1}{12}(3a^2-a^4)$$

$$=\frac{1}{12}\left(3\times\frac{12}{5}-\frac{144}{25}\right)$$

$$=\frac{1}{12}\times\frac{180-144}{25}$$

$$=\frac{36}{12\times25}$$

$$=\underbrace{\frac{3}{25}}$$ フヘホ

第3問

(1) $S_1 = 3$, $S_2 = 3 + 12 = \underset{アイ}{15}$

$\{T_n\}: -1 \underbrace{\quad}_{\substack{3\\ \shortparallel \\ S_1}} \underset{ウ}{2}, \cdots, T_n \underbrace{\quad}_{S_n} T_{n+1}$

(2) $S_n = \dfrac{3(4^n-1)}{4-1} = \underset{エオ\ カ}{\underset{①}{4^n - 1}}$

$$\boxed{T_{n+1} - T_n = S_n}$$

n=1 $\cancel{T_2} - T_1 = 4^1 - 1$

n=2 $\cancel{T_3} - \cancel{T_2} = 4^2 - 1$

n=3 $\cancel{T_4} - \cancel{T_3} = 4^3 - 1$

$\vdots$

n=n-1 $T_n - \cancel{T_{n-1}} = 4^{n-1} - 1$ $(+$ $(n \geqq 2)$

$T_n - T_1 = \dfrac{4(4^{n-1}-1)}{4-1} - (n-1)$ (n=1でも成り立つ)

$T_n + 1 = \dfrac{4^n - 4}{3} - n + 1$

$T_n = \underset{キクケ}{\underset{①}{\dfrac{4^n}{3}}} - n - \underset{コサ}{\dfrac{4}{3}}$

(3) $a_1 = -3$

$n a_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n$ —— (*)

$b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$ —— ①

$\left(b_1 = \dfrac{a_1 + 2T_1}{1} = -3 - 2 = \underset{シス}{-5} \right)$

(2) で

$T_n = \dfrac{4^n}{3} - n - \dfrac{4}{3}$ より

$3T_n = 4^n - 3n - 4$

$4^n = 3T_n + 3n + 4$

$4^{n+1} = 3T_{n+1} + 3(n+1) + 4$

$4 \times 4^n = 3T_{n+1} + 3n + 7$

$4(3T_n + 3n + 4) = 3T_{n+1} + 3n + 7$

$3T_{n+1} = 12T_n + 9n + 9$

よって $T_{n+1} = \underset{セ}{4}T_n + \underset{ソ}{3}n + \underset{タ}{3}$

$2T_{n+1} = 8T_n + 6n + 6$ —— ②

(*) より

$a_{n+1} = 4\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)a_n + \dfrac{8}{n}T_n$

$a_{n+1} = 4a_n + \dfrac{4}{n}(a_n + 2T_n)$ —— ③

② + ③ として

$a_{n+1} + 2T_{n+1} = 4(a_n + 2T_n)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + 6n + 6$

$a_{n+1} + 2T_{n+1} = 4(a_n + 2T_n) \times \dfrac{n+1}{n} + 6(n+1)$

$\dfrac{a_{n+1} + 2T_{n+1}}{n+1} = 4 \times \dfrac{a_n + 2T_n}{n} + 6$

$b_{n+1} = \underset{チ}{4} b_n + \underset{ツ}{6}$

$\alpha = 4\alpha + 6$
$-3\alpha = 6$
$\alpha = -2$

$-)\ \ -2 = 4 \times (-2) + 6$

$b_{n+1} + 2 = 4(b_n + 2)$

$b_n + 2 = (b_1 + 2) \times 4^{n-1}$

$b_n + 2 = -3 \times 4^{n-1}$

$b_n = \underset{テト}{-3} \times \underset{ナ}{\underset{⓪}{4^{n-1}}} - \underset{ニ}{2}$

① より

$n b_n = a_n + 2T_n$

$a_n = n b_n - 2T_n$

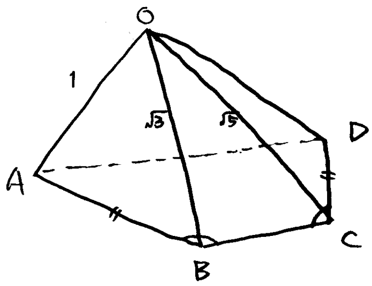
$= n(-3 \times 4^{n-1} - 2) - 2 \times \left(\dfrac{4^n}{3} - n - \dfrac{4}{3}\right)$

$= -3n \times 4^{n-1} - \cancel{2n} - \dfrac{8}{3} \times 4^{n-1} + \cancel{2n} + \dfrac{8}{3}$

$= \left(-3n - \dfrac{8}{3}\right) \times 4^{n-1} + \dfrac{8}{3}$

$= \dfrac{-(9n+8) \times 4^{n-1} + 8}{3}$ ヌネノハヒ

第4問



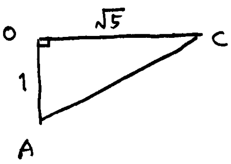
$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

(1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より

$\angle AOC = \underset{\sim}{90^\circ}$ アイ



$S(\triangle OAC)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{5}$

$=\underset{\sim}{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ ウエ

(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(-\vec{b}+\vec{a})\cdot(-\vec{b}+\vec{c})$

$=|\vec{b}|^2-\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$=3-3-1+0$

$=\underset{\sim}{-1}$ オカ

$|\overrightarrow{BA}|^2=|-\vec{b}+\vec{a}|^2$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$

$=3-2+1$

$=2$

よって $|\overrightarrow{BA}|=\underset{\sim}{\sqrt{2}}$ キ

$|\overrightarrow{BC}|^2=|-\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2$

$=3-6+5$

$=2$

よって $|\overrightarrow{BC}|=\underset{\sim}{\sqrt{2}}$ ク

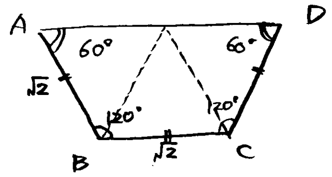
ここで

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC$ より

$-1=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\angle ABC$

$\cos\angle ABC=-\frac{1}{2}$

よって $\angle ABC=\underset{\sim}{120^\circ}$ ケコサ



$\angle BAD=\angle ADC=\underset{\sim}{60^\circ}$ ミス

$\overrightarrow{AD}=\underset{\sim}{2}\overrightarrow{BC}$ より
セ

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{BC}$

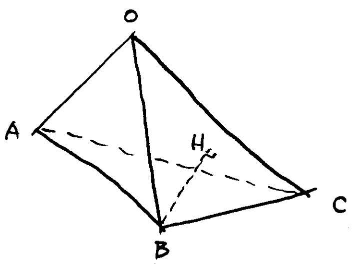
$=\vec{a}+2(-\vec{b}+\vec{c})$

$=\vec{a}\underset{\text{ソ}}{\underset{\sim}{-2}}\vec{b}+\underset{\text{タ}}{\underset{\sim}{2}}\vec{c}$

$S(\square ABCD)=3\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin 60^\circ$

$=\underset{\sim}{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ チツテ

(3)



$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$ とおくと.

$\overrightarrow{BH}\perp$ 平面ABC より

$\begin{cases}\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OA}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{OC}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=\underset{\sim}{0} & ト \text{ ——①}\\ \overrightarrow{BH}\cdot\vec{c}=0 & \text{——②}\end{cases}$

(ここで
$\overrightarrow{BH}=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OH}$
$=s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c}$)

① より

$(s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$s|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+t\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$s-1=0$

$s=\underset{\sim}{1}$ ナ

② より

$(s\vec{a}-\vec{b}+t\vec{c})\cdot\vec{c}=0$

$s\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}+t|\vec{c}|^2=0$

$-3+5t=0$

$t=\underset{\sim}{\frac{3}{5}}$ ニヌ

このとき

$$\overrightarrow{BH} = \vec{a} - \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$

であり

$$|\overrightarrow{BH}|^2 = \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BO}$$

$$= \left(\vec{a} - \vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right)\cdot(-\vec{b})$$

$$= -\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 - \frac{3}{5}\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$= -1 + 3 - \frac{9}{5}$$

$$= \frac{1}{5}$$

よって $|\overrightarrow{BH}| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \underset{\text{ネノ}}{\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}}$

よって

$$V = \frac{1}{3}\times S(\triangle OAC)\times|\overrightarrow{BH}|$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \underset{\text{ハヒ}}{\underline{\frac{1}{6}}}$$

(4)

$S(\triangle ABC) : S(\square ABCD) = 1 : 3$ より

$V : V(OABCD) = 1 : 3$.

よって $V(OABCD) = \underset{\text{フ}}{\underline{3}}V$

このとき

$$\frac{1}{3}\times S(\square ABCD)\times h = 3V$$

$$\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times h = 3\times\frac{1}{6}$$

$$h = \frac{1}{\sqrt{3}} = \underset{\text{ヘホ}}{\underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$

第5問

(1) $\{\sigma(X)\}^2 = E(X^2) - \{E(X)\}^2$

より $25 = E(X^2) - 49$

$E(X^2) = \underline{74}$ アイ

$E(W) = E(1000X)$

$= 1000\,E(X)$

$= -7000$

$= -7 \times \underline{10^3}$ ウ

$V(W) = V(1000X)$

$= 1000^2\,V(X)$

$= 10^6\{\sigma(X)\}^2$

$= \underset{エ}{\underline{5}}{}^2 \times \underset{オ}{\underline{10}}{}^6$

$X \geqq 0$ より

$X + 7 \geqq 7$

$\dfrac{X+7}{5} \geqq \dfrac{7}{5}$

(2) $P(X \geqq 0) = P\left(\dfrac{X+7}{5} \geqq \underline{1.4}\right)$ カキ

正規分布表から

$P(Z \geqq 1.4) = 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.4)$

$= 0.5 - 0.4192$

$= 0.0808$

$\fallingdotseq 0.\underline{08}$ クケ

M は二項分布 $B(50, 0.08)$

に従うので、

$E(M) = 50 \times 0.08$

$= \underline{4.0}$ コサ

$\sigma(M) = \sqrt{50 \times 0.08 \times 0.92}$

$= \sqrt{4 \times 0.92}$

$= \sqrt{3.68}$

$\fallingdotseq \sqrt{\underline{3.7}}$ シス

(3) $\sigma(\overline{Y}) = \dfrac{6}{\sqrt{100}} = \dfrac{6}{10} = \underline{0.6}$ セソ

$\overline{Y}$ の分布が正規分布で近似できるとき、

$Z = \dfrac{\overline{Y} - m}{0.6}$

であり、

$P(|Z| \leqq 1.64) = 2 \times 0.4495$

$= 0.899$

$\fallingdotseq \underline{0.90}$ タチ

このとき

$|Z| \leqq 1.64$ より

$-1.64 \leqq Z \leqq 1.64$

$-1.64 \leqq \dfrac{-10.2 - m}{0.6} \leqq 1.64$

$-0.984 \leqq -10.2 - m \leqq 0.984$

$9.216 \leqq -m \leqq 11.184$

よって

$-11.184 \leqq m \leqq -9.216$

$\underline{②}$ ツ