

## 数学Ⅱ・数学B

| 問 題   | 選 択 方 法                       |
|-------|-------------------------------|
| 第 1 問 | 必 答                           |
| 第 2 問 | 必 答                           |
| 第 3 問 | }<br>いずれか 2 問を選択し、<br>解答しなさい。 |
| 第 4 問 |                               |
| 第 5 問 |                               |

第1問 (必答問題) (配点 30)

[1]

(1)  $0 \leq \theta < 2\pi$  のとき

$$\sin \theta > \sqrt{3} \cos \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

となる  $\theta$  の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3} \cos \left( \theta - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}} \cos \theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}} \sin \theta$$

である。よって、三角関数の合成を用いると、 $\textcircled{1}$  は

$$\sin \left( \theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}} \right) < 0$$

と変形できる。したがって、求める範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} \pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \pi$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

- (2)  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  とし,  $k$  を実数とする。  $\sin \theta$  と  $\cos \theta$  は  $x$  の 2 次方程式  $25x^2 - 35x + k = 0$  の解であるとする。このとき, 解と係数の関係により  $\sin \theta + \cos \theta$  と  $\sin \theta \cos \theta$  の値を考えれば,  $k = \boxed{\text{ケコ}}$  であることがわかる。

さらに,  $\theta$  が  $\sin \theta \geq \cos \theta$  を満たすとする,  $\sin \theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ ,

$\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$  である。このとき,  $\theta$  は  $\boxed{\text{ソ}}$  を満たす。  $\boxed{\text{ソ}}$  に

当てはまるものを, 次の①～⑤のうちから一つ選べ。

- ①  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{12}$       ②  $\frac{\pi}{12} \leq \theta < \frac{\pi}{6}$       ③  $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{4}$   
 ④  $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{\pi}{3}$       ⑤  $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{5}{12}\pi$       ⑥  $\frac{5}{12}\pi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ・数学B

{ 2 }

(1)  $t$  は正の実数であり,  $t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$  を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\text{タチ}}$$

である。さらに

$$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}}, \quad t - t^{-1} = \boxed{\text{トナニ}}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第1問は次ページに続く。)

(2)  $x, y$  は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leq 5 & \dots\dots\dots ② \\ \log_{81}\frac{y}{x^3} \leq 1 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

について考える。

$X = \log_3 x, Y = \log_3 y$  とおくと, ②は

$$\boxed{\text{ヌ}} X + Y \leq \boxed{\text{ネノ}} \dots\dots\dots ④$$

と変形でき, ③は

$$\boxed{\text{ハ}} X - Y \geq \boxed{\text{ヒフ}} \dots\dots\dots ⑤$$

と変形できる。

$X, Y$ が④と⑤を満たすとき,  $Y$ のとり得る最大の整数の値は

$\boxed{\text{ヘ}}$  である。また,  $x, y$ が②, ③と  $\log_3 y = \boxed{\text{ヘ}}$  を同時に満た

すとき,  $x$ のとり得る最大の整数の値は  $\boxed{\text{ホ}}$  である。

## 数学Ⅱ・数学B

### 第2問 (必答問題) (配点 30)

$a > 0$  とし,  $f(x) = x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 + 1$  とおく。座標平面上で, 放物線  $y = x^2 + 2x + 1$  を  $C$ , 放物線  $y = f(x)$  を  $D$  とする。また,  $\ell$  を  $C$  と  $D$  の両方に接する直線とする。

(1)  $\ell$  の方程式を求めよう。

$\ell$  と  $C$  は点  $(t, t^2 + 2t + 1)$  において接するとすると,  $\ell$  の方程式は

$$y = \left( \boxed{\text{ア}} t + \boxed{\text{イ}} \right) x - t^2 + \boxed{\text{ウ}} \quad \dots\dots\dots \text{①}$$

である。また,  $\ell$  と  $D$  は点  $(s, f(s))$  において接するとすると,  $\ell$  の方程式は

$$y = \left( \boxed{\text{エ}} s - \boxed{\text{オ}} a + \boxed{\text{カ}} \right) x - s^2 + \boxed{\text{キ}} a^2 + \boxed{\text{ク}} \quad \dots\dots\dots \text{②}$$

である。ここで, ①と②は同じ直線を表しているので,  $t = \boxed{\text{ケ}}$ ,  $s = \boxed{\text{コ}}$   $a$  が成り立つ。

したがって,  $\ell$  の方程式は  $y = \boxed{\text{サ}} x + \boxed{\text{シ}}$  である。

(数学Ⅱ・数学B第2問は次ページに続く。)

(2) 二つの放物線  $C$ ,  $D$  の交点の  $x$  座標は ス である。

$C$  と直線  $\ell$ , および直線  $x =$ ス $$  で囲まれた図形の面積を  $S$  とすると,

$$S = \frac{a^{\text{セ}}}{\text{ソ}}$$

(3)  $a \geq \frac{1}{2}$  とする。二つの放物線  $C$ ,  $D$  と直線  $\ell$  で囲まれた図形の中で

$0 \leq x \leq 1$  を満たす部分の面積  $T$  は,  $a >$ タ $$  のとき,  $a$  の値によらず

$$T = \frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$$

であり,  $\frac{1}{2} \leq a \leq$ タ $$  のとき

$$T = -\text{テ}a^3 + \text{ト}a^2 - \text{ナ}a + \frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$$

である。

(4) 次に, (2), (3) で定めた  $S$ ,  $T$  に対して,  $U = 2T - 3S$  とおく。 $a$  が

$$\frac{1}{2} \leq a \leq \text{タ} \text{ の範囲を動くとき, } U \text{ は } a = \frac{\text{ネ}}{\text{ノ}} \text{ で最大値 } \frac{\text{ハ}}{\text{ヒフ}}$$

をとる。

第3問 (選択問題) (配点 20)

数列 $\{a_n\}$ は、初項 $a_1$ が0であり、 $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき次の漸化式を満たすものとする。

$$a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1} \{3a_n + 3^{n+1} - (n+1)(n+2)\} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

(1)  $a_2 = \boxed{\text{ア}}$  である。

(2)  $b_n = \frac{a_n}{3^n(n+1)(n+2)}$  とおき、数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。

$\{b_n\}$ の初項 $b_1$ は  $\boxed{\text{イ}}$  である。①の両辺を $3^{n+1}(n+2)(n+3)$ で割ると

$$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\left(n + \boxed{\text{エ}}\right)\left(n + \boxed{\text{オ}}\right)} - \left(\frac{1}{\boxed{\text{カ}}}\right)^{n+1}$$

を得る。ただし、 $\boxed{\text{エ}} < \boxed{\text{オ}}$  とする。

したがって

$$b_{n+1} - b_n = \left( \frac{\boxed{\text{キ}}}{n + \boxed{\text{エ}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{n + \boxed{\text{オ}}} \right) - \left( \frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{n+1}$$

である。

(数学Ⅱ・数学B第3問は次ページに続く。)



$n$  を 2 以上の自然数とするとき

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{\boxed{\text{キ}}}{k + \boxed{\text{工}}} - \frac{\boxed{\text{キ}}}{k + \boxed{\text{オ}}} \right) = \frac{1}{\boxed{\text{ク}}} \left( \frac{n - \boxed{\text{ケ}}}{n + \boxed{\text{コ}}} \right)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^{k+1} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} - \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \left( \frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^n$$

が成り立つことを利用すると

$$b_n = \frac{n - \boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}} (n + \boxed{\text{チ}})} + \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}} \left( \frac{1}{\boxed{\text{カ}}} \right)^n$$

が得られる。これは  $n = 1$  のときも成り立つ。

(3) (2) により,  $\{a_n\}$  の一般項は

$$a_n = \boxed{\text{ツ}}^{n - \boxed{\text{テ}}} (n^2 - \boxed{\text{ト}}) + \frac{(n + \boxed{\text{ナ}})(n + \boxed{\text{ニ}})}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

で与えられる。ただし,  $\boxed{\text{ナ}} < \boxed{\text{ニ}}$  とする。

このことから, すべての自然数  $n$  について,  $a_n$  は整数となることがわかる。

(4)  $k$  を自然数とする。  $a_{3k}$ ,  $a_{3k+1}$ ,  $a_{3k+2}$  を 3 で割った余りはそれぞれ

$\boxed{\text{ネ}}$ ,  $\boxed{\text{ノ}}$ ,  $\boxed{\text{ハ}}$  である。また,  $\{a_n\}$  の初項から第 2020 項まで

の和を 3 で割った余りは  $\boxed{\text{ヒ}}$  である。

第4問 (選択問題) (配点 20)

点Oを原点とする座標空間に2点

$$A(3, 3, -6), \quad B(2 + 2\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}, -4)$$

をとる。3点O, A, Bの定める平面を $\alpha$ とする。また、 $\alpha$ に含まれる点Cは

$$\vec{OA} \perp \vec{OC}, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 24 \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を満たすとする。

(1)  $|\vec{OA}| = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ ,  $|\vec{OB}| = \boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}$  であり,  
 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \boxed{\text{オカ}}$  である。

(2) 点Cは平面 $\alpha$ 上にあるので、実数 $s, t$ を用いて、 $\vec{OC} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ と表  
 することができる。このとき、 $\textcircled{1}$ から $s = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ ,  $t = \boxed{\text{コ}}$  である。し  
 たがって、 $|\vec{OC}| = \boxed{\text{サ}} \sqrt{\boxed{\text{シ}}}$  である。

(数学Ⅱ・数学B第4問は次ページに続く。)

- (3)  $\vec{CB} = \left( \boxed{\text{ス}}, \boxed{\text{セ}}, \boxed{\text{ソタ}} \right)$  である。したがって、平面  $\alpha$  上の四角形 OABC は  $\boxed{\text{チ}}$ 。  $\boxed{\text{チ}}$  に当てはまるものを、次の①～④のうちから一つ選べ。ただし、少なくとも一組の対辺が平行な四角形を台形という。

- ① 正方形である
- ② 正方形ではないが、長方形である
- ③ 長方形ではないが、平行四辺形である
- ④ 平行四辺形ではないが、台形である
- ⑤ 台形ではない

$\vec{OA} \perp \vec{OC}$  であるので、四角形 OABC の面積は  $\boxed{\text{ツテ}}$  である。

- (4)  $\vec{OA} \perp \vec{OD}$ ,  $\vec{OC} \cdot \vec{OD} = 2\sqrt{6}$  かつ  $z$  座標が 1 であるような点 D の座標は

$$\left( \boxed{\text{ト}} + \frac{\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}, \boxed{\text{ヌ}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}, 1 \right)$$

である。このとき  $\angle COD = \boxed{\text{ハヒ}}^\circ$  である。

3 点 O, C, D の定める平面を  $\beta$  とする。 $\alpha$  と  $\beta$  は垂直であるので、三角形 ABC を底面とする四面体 DABC の高さは  $\sqrt{\boxed{\text{フ}}}$  である。したがって、四面体 DABC の体積は  $\boxed{\text{ヘ}} \sqrt{\boxed{\text{ホ}}}$  である。

第5問 (選択問題) (配点 20)

以下の問題を解答するにあたっては、必要に応じて29ページの正規分布表を用いてもよい。

ある市の市立図書館の利用状況について調査を行った。

- (1) ある高校の生徒720人全員を対象に、ある1週間に市立図書館で借りた本の冊数について調査を行った。

その結果、1冊も借りなかった生徒が612人、1冊借りた生徒が54人、2冊借りた生徒が36人であり、3冊借りた生徒が18人であった。4冊以上借りた生徒はいなかった。

この高校の生徒から1人を無作為に選んだとき、その生徒が借りた本の冊数を表す確率変数を $X$ とする。

このとき、 $X$ の平均(期待値)は $E(X) = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり、 $X^2$ の平均は

$E(X^2) = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。よって、 $X$ の標準偏差は $\sigma(X) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ で

ある。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ・数学B

- (2) 市内の高校生全員を母集団とし、ある1週間に市立図書館を利用した生徒の割合(母比率)を  $p$  とする。この母集団から 600 人を無作為に選んだとき、その1週間に市立図書館を利用した生徒の数を確率変数  $Y$  で表す。

$p = 0.4$  のとき、 $Y$  の平均は  $E(Y) =$  キクケ、標準偏差は  $\sigma(Y) =$

コサ になる。ここで、 $Z = \frac{Y - \text{キクケ}}{\text{コサ}}$  とおくと、標本数 600 は十分

に大きいので、 $Z$  は近似的に標準正規分布に従う。このことを利用して、 $Y$  が 215 以下となる確率を求めると、その確率は 0. シス になる。

また、 $p = 0.2$  のとき、 $Y$  の平均は キクケ の  $\frac{1}{\text{セ}}$  倍、標準偏差は

コサ の  $\frac{\sqrt{\text{ソ}}}{3}$  倍である。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

## 数学Ⅱ・数学B

- (3) 市立図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とする。1回あたりの利用時間(分)を表す確率変数を  $W$  とし、 $W$  は母平均  $m$ 、母標準偏差 30 の分布に従うとする。この母集団から大きさ  $n$  の標本  $W_1, W_2, \dots, W_n$  を無作為に抽出した。

利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために

$$U_1 = W_1 - 60, U_2 = W_2 - 60, \dots, U_n = W_n - 60$$

とくと、確率変数  $U_1, U_2, \dots, U_n$  の平均と標準偏差はそれぞれ

$$E(U_1) = E(U_2) = \dots = E(U_n) = m - \boxed{\text{タチ}}$$

$$\sigma(U_1) = \sigma(U_2) = \dots = \sigma(U_n) = \boxed{\text{ツテ}}$$

である。

ここで、 $t = m - 60$  として、 $t$  に対する信頼度 95 % の信頼区間を求めよう。この母集団から無作為抽出された 100 人の生徒に対して  $U_1, U_2, \dots, U_{100}$  の値を調べたところ、その標本平均の値が 50 分であった。標本数は十分大きいことを利用して、この信頼区間を求めると

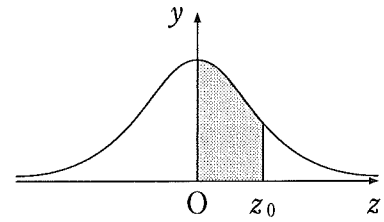
$$\boxed{\text{トナ}} \cdot \boxed{\text{ニ}} \leq t \leq \boxed{\text{ヌネ}} \cdot \boxed{\text{ノ}}$$

になる。

(数学Ⅱ・数学B第5問は次ページに続く。)

# 正 規 分 布 表

次の表は、標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである。



| $z_0$ | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0   | 0.0000 | 0.0040 | 0.0080 | 0.0120 | 0.0160 | 0.0199 | 0.0239 | 0.0279 | 0.0319 | 0.0359 |
| 0.1   | 0.0398 | 0.0438 | 0.0478 | 0.0517 | 0.0557 | 0.0596 | 0.0636 | 0.0675 | 0.0714 | 0.0753 |
| 0.2   | 0.0793 | 0.0832 | 0.0871 | 0.0910 | 0.0948 | 0.0987 | 0.1026 | 0.1064 | 0.1103 | 0.1141 |
| 0.3   | 0.1179 | 0.1217 | 0.1255 | 0.1293 | 0.1331 | 0.1368 | 0.1406 | 0.1443 | 0.1480 | 0.1517 |
| 0.4   | 0.1554 | 0.1591 | 0.1628 | 0.1664 | 0.1700 | 0.1736 | 0.1772 | 0.1808 | 0.1844 | 0.1879 |
| 0.5   | 0.1915 | 0.1950 | 0.1985 | 0.2019 | 0.2054 | 0.2088 | 0.2123 | 0.2157 | 0.2190 | 0.2224 |
| 0.6   | 0.2257 | 0.2291 | 0.2324 | 0.2357 | 0.2389 | 0.2422 | 0.2454 | 0.2486 | 0.2517 | 0.2549 |
| 0.7   | 0.2580 | 0.2611 | 0.2642 | 0.2673 | 0.2704 | 0.2734 | 0.2764 | 0.2794 | 0.2823 | 0.2852 |
| 0.8   | 0.2881 | 0.2910 | 0.2939 | 0.2967 | 0.2995 | 0.3023 | 0.3051 | 0.3078 | 0.3106 | 0.3133 |
| 0.9   | 0.3159 | 0.3186 | 0.3212 | 0.3238 | 0.3264 | 0.3289 | 0.3315 | 0.3340 | 0.3365 | 0.3389 |
| 1.0   | 0.3413 | 0.3438 | 0.3461 | 0.3485 | 0.3508 | 0.3531 | 0.3554 | 0.3577 | 0.3599 | 0.3621 |
| 1.1   | 0.3643 | 0.3665 | 0.3686 | 0.3708 | 0.3729 | 0.3749 | 0.3770 | 0.3790 | 0.3810 | 0.3830 |
| 1.2   | 0.3849 | 0.3869 | 0.3888 | 0.3907 | 0.3925 | 0.3944 | 0.3962 | 0.3980 | 0.3997 | 0.4015 |
| 1.3   | 0.4032 | 0.4049 | 0.4066 | 0.4082 | 0.4099 | 0.4115 | 0.4131 | 0.4147 | 0.4162 | 0.4177 |
| 1.4   | 0.4192 | 0.4207 | 0.4222 | 0.4236 | 0.4251 | 0.4265 | 0.4279 | 0.4292 | 0.4306 | 0.4319 |
| 1.5   | 0.4332 | 0.4345 | 0.4357 | 0.4370 | 0.4382 | 0.4394 | 0.4406 | 0.4418 | 0.4429 | 0.4441 |
| 1.6   | 0.4452 | 0.4463 | 0.4474 | 0.4484 | 0.4495 | 0.4505 | 0.4515 | 0.4525 | 0.4535 | 0.4545 |
| 1.7   | 0.4554 | 0.4564 | 0.4573 | 0.4582 | 0.4591 | 0.4599 | 0.4608 | 0.4616 | 0.4625 | 0.4633 |
| 1.8   | 0.4641 | 0.4649 | 0.4656 | 0.4664 | 0.4671 | 0.4678 | 0.4686 | 0.4693 | 0.4699 | 0.4706 |
| 1.9   | 0.4713 | 0.4719 | 0.4726 | 0.4732 | 0.4738 | 0.4744 | 0.4750 | 0.4756 | 0.4761 | 0.4767 |
| 2.0   | 0.4772 | 0.4778 | 0.4783 | 0.4788 | 0.4793 | 0.4798 | 0.4803 | 0.4808 | 0.4812 | 0.4817 |
| 2.1   | 0.4821 | 0.4826 | 0.4830 | 0.4834 | 0.4838 | 0.4842 | 0.4846 | 0.4850 | 0.4854 | 0.4857 |
| 2.2   | 0.4861 | 0.4864 | 0.4868 | 0.4871 | 0.4875 | 0.4878 | 0.4881 | 0.4884 | 0.4887 | 0.4890 |
| 2.3   | 0.4893 | 0.4896 | 0.4898 | 0.4901 | 0.4904 | 0.4906 | 0.4909 | 0.4911 | 0.4913 | 0.4916 |
| 2.4   | 0.4918 | 0.4920 | 0.4922 | 0.4925 | 0.4927 | 0.4929 | 0.4931 | 0.4932 | 0.4934 | 0.4936 |
| 2.5   | 0.4938 | 0.4940 | 0.4941 | 0.4943 | 0.4945 | 0.4946 | 0.4948 | 0.4949 | 0.4951 | 0.4952 |
| 2.6   | 0.4953 | 0.4955 | 0.4956 | 0.4957 | 0.4959 | 0.4960 | 0.4961 | 0.4962 | 0.4963 | 0.4964 |
| 2.7   | 0.4965 | 0.4966 | 0.4967 | 0.4968 | 0.4969 | 0.4970 | 0.4971 | 0.4972 | 0.4973 | 0.4974 |
| 2.8   | 0.4974 | 0.4975 | 0.4976 | 0.4977 | 0.4977 | 0.4978 | 0.4979 | 0.4979 | 0.4980 | 0.4981 |
| 2.9   | 0.4981 | 0.4982 | 0.4982 | 0.4983 | 0.4984 | 0.4984 | 0.4985 | 0.4985 | 0.4986 | 0.4986 |
| 3.0   | 0.4987 | 0.4987 | 0.4987 | 0.4988 | 0.4988 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4989 | 0.4990 | 0.4990 |