

- [1] $a > 0, r > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を初項 a , 公比 r の等比数列とする。また, 数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される。

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) b_n を a, r および n を用いて表せ。

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち,

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$$

とする。このとき, 一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。

〔 2 〕 n を自然数とし、 p を $0 < p < 1$ を満たす実数とする。一方の面に 0、もう一方の面に 1 と書いたカードがある。最初、このカードは 0 と書かれた面が上になるように置いてある。表の出る確率が p のコインを投げ、裏が出たときだけカードを裏返すという試行を n 回繰り返して行う。 n 回の試行の後、カードの上の面に書かれた数字が 0 である確率を P_n とおく。次の問いに答えよ。

(1) P_n を p および n を用いて表せ。

(2) $n \geq 2$ とする。 n 回の試行の後、カードの上の面に書かれた数字が 0 であり、さらに、途中でカードが少なくとも 1 回裏返されたことがわかっている。このとき、ちょうど 2 回裏返された確率を p および n を用いて表せ。

〔 3 〕 座標平面上の二つの曲線

$$C : y = x^3, \quad C' : y = 8x^3$$

と曲線 C 上の点 $P_1(1, 1)$ を考える。点 P_1 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_1 とし、点 Q_1 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_2 とする。次に、点 P_2 を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_2 とし、点 Q_2 を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_3 とする。このように、自然数 n に対して、点 P_n を通り x 軸と平行な直線と曲線 C' の交点を Q_n とし、点 Q_n を通り y 軸と平行な直線と曲線 C の交点を P_{n+1} とする。点 P_n の x 座標を a_n とおく。次の問いに答えよ。

- (1) a_n を n を用いて表せ。
- (2) 点 P_{n+1} における曲線 C の接線、直線 $x = a_n$ および曲線 C で囲まれる部分のうち、 $a_{n+1} \leq x \leq a_n$ の領域にある面積を S_n とする。 S_n を n を用いて表せ。
- (3) $T_n = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$ とおく。 T_n を n を用いて表せ。

〔 4 〕 原点を O とする座標平面上において、点 $A(0, 3)$, $B(0, -1)$ および x 軸上の正の部分動く点 $P(t, 0)$ があり、 $\angle APB$ は鈍角でないとする。 $\triangle ABP$ の垂心を H 、頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D 、頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。その交点のことを、三角形の垂心という。

(1) $\angle APB$ が直角となる t の値を求めよ。

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では、 t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3) 点 H が $\triangle ODE$ の内心であることを証明せよ。ただし、1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを、証明なしに利用してもよい。

(4) $\triangle ODE$ の内接円の半径を t を用いて表せ。

