[1] は文理共通問題

[2]

(1)

$$\begin{tikzcd}
\text{n回目} & \text{n+1回目} \\
0\ (P_n) \arrow[r, "p"] & 0\ (P_{n+1}) \\
1\ (1-P_n) \arrow[ur, "1-p"'] &
\end{tikzcd}$$

1回で

そのまま　p

裏返す　$1-p$

$$P_{n+1} = P_n \times p + (1-P_n)\times(1-p)$$

$$P_{n+1} = (2p-1)P_n - p + 1$$

$$-)\ \frac{1}{2} = (2p-1)\cdot\frac{1}{2} - p + 1$$

$$P_{n+1} - \frac{1}{2} = (2p-1)\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$$

$\alpha = (2p-1)\alpha - p + 1$

$(2p-2)\alpha = p-1$

$p \neq 1$ より　$\alpha = \frac{1}{2}$

よって

$$P_n - \frac{1}{2} = \left(P_1 - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1}$$

（ここで

$P_1 = p$　より）

$$P_n - \frac{1}{2} = \left(p - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1}$$

$$\underline{\underline{P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n}}$$

(2) n回目に数字が0で，途中少なくとも1回は裏返されている確率は

$$P_n - p^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n - p^n$$

n回目までにちょうど2回裏返されている確率は

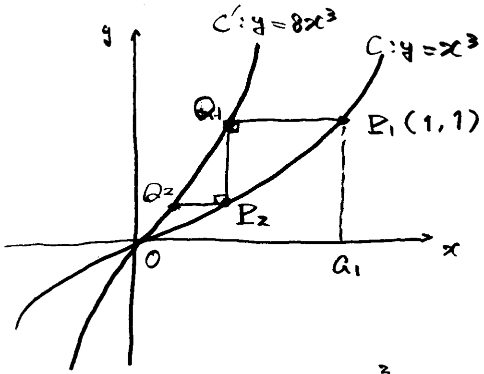
$${}_nC_2(1-p)^2{}_{n-2}C_{n-2}\,p^{n-2}$$

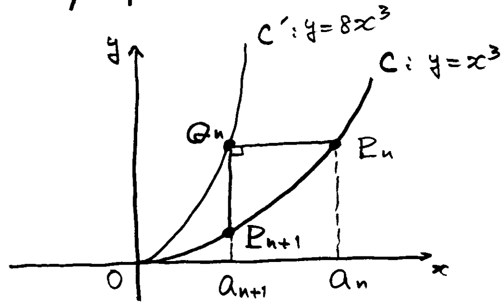
$$= \frac{n(n-1)}{2}(1-p)^2p^{n-2}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{2}n(n-1)(1-p)^2p^{n-2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n - p^n} = \underline{\underline{\frac{n(n-1)(1-p)^2p^{n-2}}{1+(2p-1)^n - 2p^n}}}$$

[3]





(1) $a_1=1$ であり

$P_n\ (a_n,\ a_n^3)$ より

$y=a_n^3$ と $C': y=8x^3$ の交点は

$8x^3=a_n^3$

$x^3=\frac{1}{8}a_n^3$

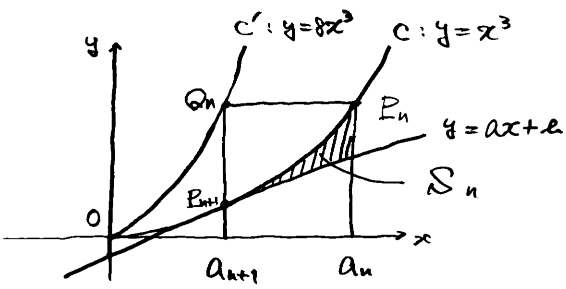
よって $x=\frac{1}{2}a_n$

つまり $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

よって $a_n=a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)



$$S_n=\int_{a_{n+1}}^{a_n}\left\{x^3-(ax+b)\right\}dx$$

(ここで

$x^3-ax-b=0$

の解は $a_{n+1},\ a_{n+1},\ \alpha$ とでき.

解と係数の関係より

$a_{n+1}+a_{n+1}+\alpha=0$.

$\alpha=-2a_{n+1}$

よって

$x^3-ax-b=(x-a_{n+1})^2(x+2a_{n+1})$

とできる.)

よって

$$S_n=\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_{n+1})^2(x+2a_{n+1})\,dx$$

$$=\int_{a_{n+1}}^{a_n}(x-a_{n+1})^2(x-a_{n+1}+3a_{n+1})\,dx$$

$$=\int_{a_{n+1}}^{a_n}\left\{(x-a_{n+1})^3+3a_{n+1}(x-a_{n+1})^2\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}(x-a_{n+1})^4+a_{n+1}(x-a_{n+1})^3\right]_{a_{n+1}}^{a_n}$$

$$=\frac{1}{4}(a_n-a_{n+1})^4+a_{n+1}(a_n-a_{n+1})^3$$

$$=\left(\frac{a_n-a_{n+1}}{4}+a_{n+1}\right)(a_n-a_{n+1})^3$$

$$=\frac{a_n+3a_{n+1}}{4}(a_n-a_{n+1})^3$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+3\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^3$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{5}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)^3$$

$$=\frac{5}{8}\times\frac{1}{8}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^4$$

$$=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n}$$

(3) $S_n=\frac{5}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^n$ であり

$$T_n=S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n$$

$$=\frac{5}{4}\left\{\frac{1}{16}+\left(\frac{1}{16}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}$$

$$=\frac{5}{4}\times\frac{\frac{1}{16}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{16}}$$

$$=\frac{1}{12}\left\{1-\left(\frac{1}{16}\right)^n\right\}$$

[4] は 理5 と共通問題