

- [1] $a > 0, r > 0$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を初項 a , 公比 r の等比数列とする。また, 数列 $\{b_n\}$ は次のように定義される。

$$b_1 = a_1, \quad b_{n+1} = b_n a_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

(1) b_n を a, r および n を用いて表せ。

(2) 一般項が

$$c_n = \frac{\log_2 b_n}{n}$$

である数列 $\{c_n\}$ は等差数列であることを証明せよ。

(3) (2) で与えられた数列 $\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの平均を M_n とする。すなわち,

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$$

とする。このとき, 一般項が

$$d_n = 2^{M_n}$$

である数列 $\{d_n\}$ は等比数列であることを証明せよ。

〔 2 〕 箱の中に 1 から N までの数が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。ただし、 N を 2 以上の自然数とする。「カードをよく混ぜて 1 枚取り出し、そのカードに書かれた数を読み取り、そのカードをもとに戻す」という試行を 4 回繰り返す。1 回目、2 回目、3 回目および 4 回目に取り出したカードに書かれた数を、それぞれ a_1, a_2, a_3, a_4 とする。また、座標平面上に 4 点 $P_1(a_1, 0)$, $P_2(a_1, a_2)$, $P_3(a_1 - a_3, a_2)$, $P_4(a_1 - a_3, a_2 - a_4)$ を定める。次の問いに答えよ。

- (1) P_4 が原点 $O(0, 0)$ に一致する確率を N を用いて表せ。
- (2) P_4 が連立不等式 $x \geq 0, y \leq 0$ の表す領域にある確率を N を用いて表せ。
- (3) P_4 が直線 $y = x$ 上にある確率を N を用いて表せ。
- (4) $N = 2^m$ とする。ただし、 m を自然数とする。 P_4 が原点 O に一致し、かつ、四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積が 2^m となる確率を m を用いて表せ。

〔 3 〕 関数 $f(x)$ は実数全体で連続で、すべての実数 x に対して

$$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - \int_0^x e^{x-t}f(t)dt$$

を満たすとする。ただし、 e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

- (1) $f(0)$ の値を求めよ。また、 $f'(x) = 2(x-1)\cos x$ が成り立つことを示せ。
- (2) $f(x)$ を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ は、 $0 < x < \pi$ の範囲にただ一つの解をもつことを示せ。
- (4) (3) のただ一つの解を α とする。曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \alpha$), x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を S_1 とし、曲線 $y = f(x)$ ($\alpha \leq x \leq \pi$), x 軸および直線 $x = \pi$ によって囲まれる部分の面積を S_2 とする。 S_1 と S_2 の大小を判定せよ。

〔 4 〕 i を虚数単位とし、複素数 z に対して、

$$w = z^2 + 2z + 1 - 2i$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) w の実部が 0 となる複素数 z 全体を複素数平面上に図示せよ。
- (2) $w = 0$ を満たす複素数 z の個数は 2 個であることを証明し、それぞれを $a + bi$ (a, b は実数) の形に書き表せ。
- (3) (2) で求めた二つの複素数のうち実部の大きい方を α 、実部の小さい方を β とし、対応する複素数平面上の点をそれぞれ A, B とする。また、線分 AB の中点を M とする。複素数 z に対応する複素数平面上の点が、線分 AM 上 (両端を含む) を動くとき、複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。
- (4) 複素数 z に対応する複素数平面上の点が、点 A を通り線分 AB に垂直な直線上を動くとき、複素数 w の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

〔 5 〕 原点を O とする座標平面上において、点 $A(0, 3)$, $B(0, -1)$ および x 軸上の正の部分動く点 $P(t, 0)$ があり、 $\angle APB$ は鈍角でないとする。 $\triangle ABP$ の垂心を H 、頂点 A から辺 BP に下ろした垂線と辺 BP との交点を D 、頂点 B から辺 PA に下ろした垂線と辺 PA との交点を E とする。次の問いに答えよ。ただし、三角形の各頂点から対辺、またはその延長に下ろした 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。その交点のことを、三角形の垂心という。

(1) $\angle APB$ が直角となる t の値を求めよ。

(2) 点 H の座標を t を用いて表せ。

以下では、 t が (1) で求めた値よりも大きい値をとるとする。

(3) 点 H が $\triangle ODE$ の内心であることを証明せよ。ただし、1 組の対角の和が 180° である四角形は円に内接することを、証明なしに利用してもよい。

(4) $\triangle ODE$ の内接円の半径を t の関数 $f(t)$ として表せ。

(5) (4) で求めた関数 $f(t)$ は最大値をもつことを示せ。ただし、最大値を与える t の値を求める必要はない。

