[1]

(1) $a_n = ar^{n-1}$ より

$b_{n+1} = b_n \cdot ar^n$

($b_1 = a_1 > 0$ かつ $b_{n+1} = b_n \cdot ar^n$ より

「$b_k > 0$ のとき $b_{k+1} > 0$」

帰納法 により $b_n > 0$)

よって $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = ar^n$

$$\begin{array}{ccccccccc} n=1 & & n=2 & & n=3 & & & & n=n-1 \\ \dfrac{\cancel{b_2}}{b_1} & \times & \dfrac{\cancel{b_3}}{\cancel{b_2}} & \times & \dfrac{\cancel{b_4}}{\cancel{b_3}} & \times & \cdots\cdots & \times & \dfrac{b_n}{\cancel{b_{n-1}}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & & & \shortparallel \\ ar & \times & ar^2 & \times & ar^3 & \times & \cdots\cdots & \times & ar^{n-1} \end{array} \quad (n \geqq 2)$$

よって

$\dfrac{b_n}{b_1} = a^{n-1} \times r^{1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)}$ ($n=1$でも成り立つ)

$\underline{\underline{b_n = a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)n}}}$

(2) (証明)

$C_{n+1} - C_n = \dfrac{\log_2 b_{n+1}}{n+1} - \dfrac{\log_2 b_n}{n}$

$= \dfrac{1}{n+1} \log_2 a^{n+1} r^{\frac{1}{2}n(n+1)} - \dfrac{1}{n} \log_2 a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)n}$

$= \log_2 a \cdot r^{\frac{1}{2}n} - \log_2 a r^{\frac{1}{2}(n-1)}$

$= \log_2 \dfrac{ar^{\frac{1}{2}n}}{ar^{\frac{1}{2}(n-1)}}$

$= \log_2 r^{\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{2} \log_2 r$ (=一定)

よって

数列 $\{C_n\}$ は等差数列 である。■

(3) (証明)

$M_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} C_k$

$= \dfrac{1}{n} \times \dfrac{(C_1 + C_n)n}{2}$

$= \dfrac{C_1 + C_n}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\log_2 b_1 + \dfrac{\log_2 b_n}{n}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\log_2 a + \dfrac{1}{n} \log_2 a^n r^{\frac{1}{2}(n-1)n}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\log_2 a + \log_2 a r^{\frac{1}{2}(n-1)}\right)$

$= \dfrac{1}{2} \log_2 a^2 r^{\frac{1}{2}(n-1)}$

$= \log_2 a r^{\frac{1}{4}(n-1)}$

より

$d_n = 2^{M_n}$

$= 2^{\log_2 a r^{\frac{1}{4}(n-1)}}$

$= a r^{\frac{1}{4}(n-1)}$

よって

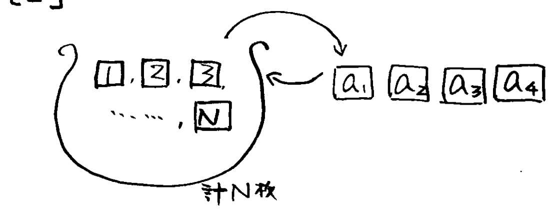
$\dfrac{d_{n+1}}{d_n} = \dfrac{a r^{\frac{1}{4}n}}{a r^{\frac{1}{4}(n-1)}}$

$= r^{\frac{1}{4}}$ (=一定)

よって

数列 $\{d_n\}$ は等比数列である。■

[2]



(1) $a_1 - a_3 = 0$ かつ $a_2 - a_4 = 0$

$\Leftrightarrow a_1 = a_3$ かつ $a_2 = a_4$

となるとよい。

a_1 と a_2 は任意なので

求める確率は

$$\frac{N}{N} \times \frac{N}{N} \times \frac{1}{N} \times \frac{1}{N}$$

$$= \frac{1}{N^2}$$

(2) $a_1 - a_3 \geqq 0$ かつ $a_2 - a_4 \leqq 0$

$\Leftrightarrow a_1 \geqq a_3$ かつ $a_2 \leqq a_4$

となるとよい。

$a_1 = k \quad (k = 1, 2, 3, \cdots, N)$

のとき

$a_3 \leqq k$ より

$a_3 = 1, 2, 3, \cdots, k$

の k 通り

$a_2 = \ell \quad (\ell = 1, 2, 3, \cdots, N)$

のとき

$a_4 \geqq \ell$ より

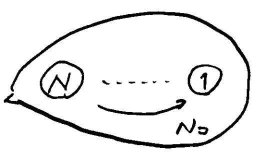
$a_4 = \ell, \ell+1, \ell+2, \cdots, N$

の $N - (\ell - 1) = N - \ell + 1$ (通り)

よって，求める確率は

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \times \frac{k}{N}\right) \times \left(\sum_{\ell=1}^{N} \frac{1}{N} \times \frac{N-\ell+1}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N^4}\left(\sum_{k=1}^{N} k\right) \times \left(\sum_{\ell=1}^{N} (N - \ell + 1)\right)$$



$$= \frac{1}{N^4} \times \frac{1}{2} N(N+1) \times \frac{(N+1)N}{2}$$

$$= \frac{(N+1)^2}{4N^2}$$

(3) $a_1 - a_3 = a_2 - a_4$

$\Leftrightarrow a_1 + a_4 = a_2 + a_3$

となるとよい。

$a_1 + a_4 = k \quad (k = 2, 3, 4, \cdots, 2N)$

とおくと

k	(a_1, a_4)	場合の数
2	(1,1)	1
3	(1,2), (2,1)	2
4	(1,3), (2,2), (3,1)	3
⋮		⋮
N+1	(1,N), (2,N−1), ……, (N,1)	N
N+2	(2,N), (3,N−1), ……, (N,2)	N−1
N+3	(3,N), (4,N−1), ……, (N,3)	N−2
⋮		⋮
2N−1	(N−1,N), (N,N−1)	2
2N	(N,N)	1

$a_1 + a_4 = k$ のとき $a_2 + a_3 = k$

なので

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2}_{} + \underbrace{(N-1)^2 + (N-2)^2 + \cdots + 1^2}_{}$$

$$= \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1) + \frac{1}{6}(N-1)N(2N-1)$$

$$= \frac{1}{6}N\left((N+1)(2N+1) + (N-1)(2N-1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}N\left(2N^2 + 3N + 1 + 2N^2 - 3N + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}N(4N^2 + 2)$$

$$= \frac{1}{3}N(2N^2 + 1) \quad (通り)$$

よって，求める確率は

$$\frac{\frac{1}{3}N(2N^2+1)}{N^4} = \frac{2N^2+1}{3N^3}$$

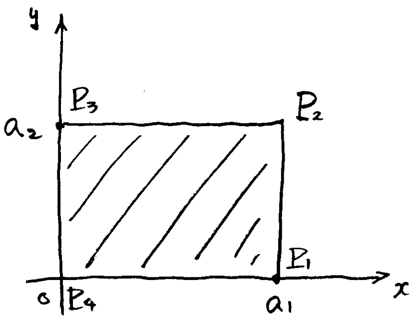
(4) $P_4 = O$ なので

$a_3 = a_1$ かつ $a_4 = a_2$ ——①

より

$P_1(a_1, 0)$, $P_2(a_1, a_2)$, $P_3(0, a_2)$

である。



$S(\square P_1P_2P_3P_4) = 2^m$ より

$a_1 \cdot a_2 = 2^m$

となるとよい.

$(a_1, a_2) = (1, 2^m), (2, 2^{m-1}), (2^2, 2^{m-2}),$
$\cdots\cdots, (2^m, 1)$

の $m+1$ 通り.

①にも注意して.
求める確率は

$$\frac{m+1}{(2^m)^2} \times \frac{1}{(2^m)^2}$$

$$= \frac{m+1}{2^{4m}}$$

[3]

(1) $f(0) = 1\cdot\cos 0 + 0 - \int_0^0 e^{-t} f(t)\,dt$

$= \underline{\underline{1}}$

(証明)

$f(x) = (1-x)\cos x + x\sin x - e^x\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$ ——— $(*)$

$f'(x) = -\cos x + (1-x)(-\sin x)$

$\quad + 1\cdot\sin x + x\cos x$

$\quad - e^x\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt - e^x\cdot e^{-x} f(x)$

$= (x-1)\cos x + x\sin x - e^x\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt - f(x)$

(ここで $(*)$ より

$-e^x\int_0^x e^{-t} f(t)\,dt - f(x)$

$= (x-1)\cos x - x\sin x$ より)

$f'(x) = (x-1)\cos x + x\sin x + (x-1)\cos x - x\sin x$

$= 2(x-1)\cos x$ ■

(2)

$f(x) = \int f'(x)\,dx$

$= \int 2(x-1)\cos x\,dx$

$= 2(x-1)\sin x - 2\int \sin x\,dx$

$= 2(x-1)\sin x + 2\cos x + C$

$f(0) = 1$ より

$2 + C = 1$

$C = -1$

よって

$\underline{\underline{f(x) = 2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1}}$

(3) (証明)

$f'(x)$ の符号!

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\cos x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(1)	$\searrow$	$2\cos 1 - 1$	$\nearrow$	$\pi - 3$	$\searrow$	(-3)

($1(\text{rad}) = \frac{180^\circ}{\pi}$ より

$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$

よって

$\frac{1}{2} < \cos 1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$

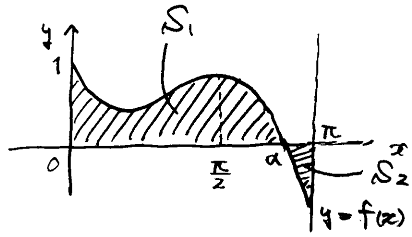
$0 < 2\cos 1 - 1 < \sqrt{2} - 1$)

よって $f(x) = 0$ は

$0 < x < \pi$ $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$ に

ただ一つの解をもつ。■

(4)



$S_1 - S_2 = \int_0^\alpha f(x)\,dx - \int_\alpha^\pi (-f(x))\,dx$

$= \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\pi f(x)\,dx$

$= \int_0^\pi f(x)\,dx$

$= \int_0^\pi \{2(x-1)\sin x + 2\cos x - 1\}\,dx$

(ここで

$\int_0^\pi (x-1)\sin x\,dx = \left[(x-1)(-\cos x)\right]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\,dx$

$= (\pi - 1) - (-1)(-1) + \left[\sin x\right]_0^\pi$

$= \pi - 2$

$\int_0^\pi (2\cos x - 1)\,dx = \left[2\sin x - x\right]_0^\pi = -\pi$.)

$S_1 - S_2 = 2(\pi - 2) - \pi$

$= \pi - 4 < 0$

よって

$\underline{\underline{S_1 < S_2}}$

[4]

(1) $w = z^2+2z+1-2i$

$= (z+1)^2-2i$

$\mathrm{Re}(w)=0$ より

$w = -\overline{w}$ が成り立つので

$(z+1)^2-2i = -(\overline{z}+1)^2-2i$

$(z+1)^2 = -(\overline{z}+1)^2$

$z = a+bi \quad (a, b \in \mathbb{Z})$ とおくと

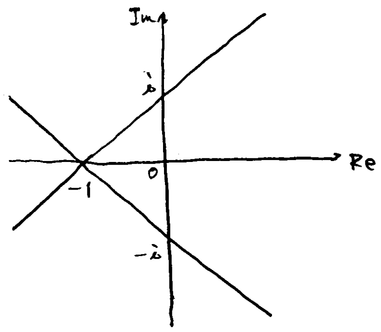
$(a+bi+1)^2 = -(a-bi+1)^2$

$(a+1)^2+2(a+1)bi-b^2 = -(a+1)^2+2(a+1)bi+b^2$

$b^2 = (a+1)^2$

$b = a+1,\ -a-1$

よって，点 z の存在範囲は下図．



(2) (証明)

$w=0$ より

$(z+1)^2-2i=0$

$(z+1)^2=2i$

ここで

$z+1 = r(\cos\theta+i\sin\theta)$

$(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと．

$(z+1)^2 = r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$

$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

であり．

$(z+1)^2=2i$ より．

$$\begin{cases} r^2=2 \\ 2\theta = \frac{\pi}{2}+2n\pi \quad (n\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} r^2=2 \\ \theta = \frac{4n+1}{4}\pi \quad (n\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

ここで $0\leqq\theta<2\pi$ より

$0 \leqq \frac{4n+1}{4}\pi < 2\pi$.

$0 \leqq 4n+1 < 8$

$-\frac{1}{4} \leqq n < \frac{7}{4}$

$n\in\mathbb{Z}$ より $n=0,1$.

よって

$w=0$ を満たす z は2個である．■

$r=\sqrt{2}$ かつ $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$

(i) $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき

$z+1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z = i$

(ii) $\theta = \frac{5}{4}\pi$ のとき．

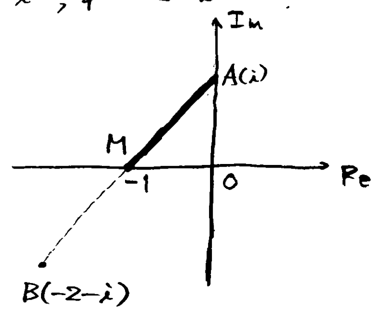
$z+1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right)$

$z = -2-i$

(i), (ii) より

$\underline{\underline{z = i,\ -2-i}}$

(3) $\alpha = i,\ \beta = -2-i$



$w = X+Yi$，$z=a+bi$ $(X, Y, a, b\in\mathbb{R})$

とおくと

$w = (z+1)^2-2i$

$= (a+bi+1)^2-2i$

$= (a+1)^2+2(a+1)bi-b^2-2i$

$= (a+1)^2-b^2+(2ab+2b-2)i$

$X, Y, a, b\in\mathbb{R}$ より

$$\begin{cases} X = (a+1)^2-b^2 & \text{―― ①} \\ Y = 2(ab+b-1) & \text{―― ②} \end{cases}$$

ここで 点 z は 線分 AM 上 にあるので

$b = a+1 \quad (-1 \leqq a \leqq 0)$

を満たす.

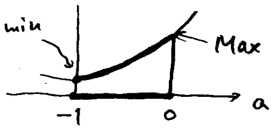
このとき

① より

$X = b^2 - b^2 = 0$

② より

$$Y = 2\left(b(a+1)-1\right)$$
$$= 2\left((a+1)^2-1\right)$$
$$= 2(a+1)^2-2$$



よって $\quad -2 \leqq Y \leqq 0$

以上により

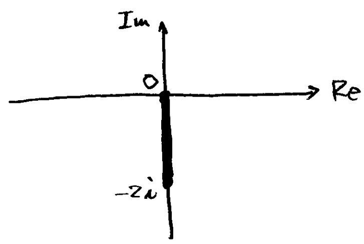
$w = X+Yi$ は

$X=0$ かつ $-2 \leqq Y \leqq 0$

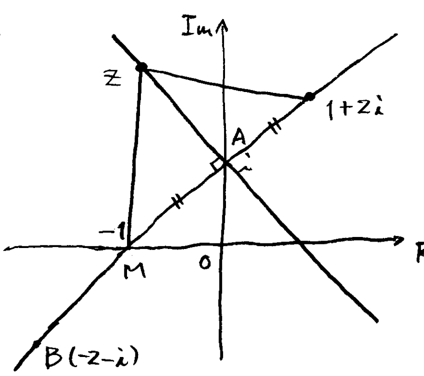
を満たす.

よって

点 w の描く図形は下図の太線部



(4)



点 z は 2点 -1, $1+2i$ を結ぶ

線分の 垂直二等分線 上 にあるので

$|z+1| = |z-1-2i|$

両辺を2乗して

$$|z+1|^2 = |z-1-2i|^2$$
$$(z+1)(\overline{z}+1) = (z-1-2i)(\overline{z}-1+2i)$$
$$z\overline{z}+z+\overline{z}+1 = z\overline{z}+(-1+2i)z+(-1-2i)\overline{z}+5$$
$$(2-2i)z+(2+2i)\overline{z} = 4$$
$$(1-i)z+(1+i)\overline{z} = 2$$

$z = a+bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$ とおくと

$$(1-i)(a+bi)+(1+i)(a-bi) = 2$$
$$2a+2b = 2$$
$$b = -a+1$$

$w = X+Yi \quad (X, Y \in \mathbb{R})$ とおくと

(3) と同様に ①, ② を満たす.

① より

$$X = (a+1)^2-(-a+1)^2$$
$$= 4a$$

よって $\quad a = \dfrac{X}{4}$ ——— ③

② より

$$Y = 2\left(a(-a+1)+(-a+1)-1\right)$$
$$= -2a^2 \text{ ——— ④}$$

③, ④ より

$$Y = -2\times\frac{X^2}{16}$$
$$= -\frac{1}{8}X^2$$

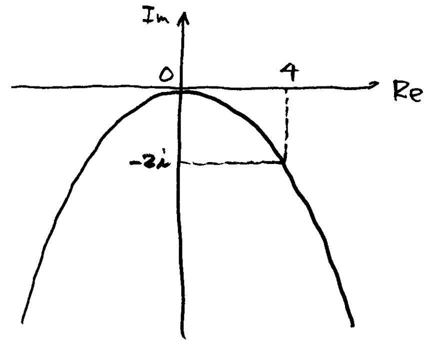
よって

$w = X+Yi$ は

$Y = -\dfrac{1}{8}X^2$ を満たす.

よって,

点 w の描く図形は, 下図.



[5]

(1) $\angle APB = 90^\circ$ のとき

$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$ より $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = 0$

ここで

$$\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} = (-t, 0) + (0, 3) = (-t, 3)$$

$$\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB} = (-t, 0) + (0, -1) = (-t, -1)$$

よって

$$t^2 - 3 = 0$$

$$t = \pm\sqrt{3}$$

$t > 0$ より

$$t = \sqrt{3}$$

(2) $H(h, 0)$ とおく。

$\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{BH}$ より $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BH} = 0$

ここで

$$\overrightarrow{PA} = (-t, 3)$$

$$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH} = (0, 1) + (h, 0) = (h, 1)$$

よって

$$-th + 3 = 0$$

$$th = 3$$

$t \neq 0$ より $h = \dfrac{3}{t}$

よって、$H\left(\dfrac{3}{t}, 0\right)$

(3) (証明)

$\triangle ABE \sim \triangle APO$ より

$\angle ABE = \angle APO$ ——①

ここで

$\angle HOB = \angle HDB = 90^\circ$

$\angle HDP = \angle HEP = 90^\circ$ より

□OBDH と□HDPE は円に内接する。

このとき 円周角のTh より

$(\angle ABE =)\ \angle OBH = \angle ODH$ ——②

$\angle HDE = \angle EPH\ (= \angle APO)$ ——③

①,②,③ より

$\angle ODH = \angle HDE$

よって

DH は$\angle ODE$ の二等分線である。——④

また

$\triangle ABD \sim \triangle PBO$ より

$\angle BAD = \angle BPO$ ——⑤

ここで

$\angle AOH = \angle AEH = 90^\circ$ より

□AOHE は円に内接する。

このとき 円周角のTh より

$(\angle BAD =)\ \angle OAH = \angle OEH$ ——⑥

□HDPE についても円周角のTh より

$(\angle BPO =)\ \angle DPH = \angle DEH$ ——⑦

⑤,⑥,⑦ より

$\angle OEH = \angle DEH$

よって

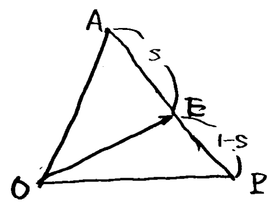
EH は$\angle OED$ の二等分線である。——⑧

④,⑧ より

点Hは角の二等分線の交点として得られるので

$\triangle ODE$ の内心である。■

(4) 点Eは AP と BH の交点であり、

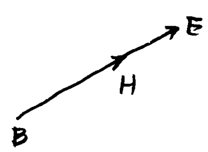


$$\overrightarrow{OE} = \frac{(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OP}}{s + (1-s)}$$

$$= (1-s)(0, 3) + s(t, 0)$$

$$= (0, 3-3s) + (st, 0)$$

$$= (st, 3-3s)$$ ——⑨



$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{BH}$$

$$= \overrightarrow{OB} + u(-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH})$$

$$= (1-u)\overrightarrow{OB} + u\overrightarrow{OH}$$

$$= (1-u)(0, -1) + u\left(\frac{3}{t}, 0\right)$$

$$= (0, -1+u) + \left(\frac{3u}{t}, 0\right)$$

$$= \left(\frac{3u}{t}, u-1\right)$$ ——⑩

⑨=⑩ より

$$\begin{cases} st = \dfrac{3u}{t} & \text{——⑪} \\ 3-3s = u-1 & \text{——⑫} \end{cases}$$

⑪ より $u = \frac{1}{3}st^2$

⑫に代入して

$$3-3s = \frac{1}{3}st^2 - 1$$

$$\left(\frac{1}{3}t^2+3\right)s = 4$$

$$(t^2+9)s = 12$$

$t^2+9 \neq 0$ より

$$s = \frac{12}{t^2+9}$$

このとき

$$u = \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{t^2+9}\cdot t^2$$

$$= \frac{4t^2}{t^2+9}$$

よって $\overrightarrow{OE} = \left(\dfrac{12t}{t^2+9}, \dfrac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

つまり $E\left(\dfrac{12t}{t^2+9}, \dfrac{3t^2-9}{t^2+9}\right)$

よって

$$OE: y = \frac{3t^2-9}{12t}x$$

$$y = \frac{t^2-3}{4t}x$$

$$(t^2-3)x - 4ty = 0$$

点 $H\left(\frac{3}{t}, 0\right)$ と直線 $OE: (t^2-3)x-4ty=0$ との距離 が $f(t)$ であり

$$f(t) = \frac{\left|\dfrac{3(t^2-3)}{t}\right|}{\sqrt{(t^2-3)^2+(-4t)^2}}$$

$$= \frac{\left|\dfrac{3(t^2-3)}{t}\right|}{\sqrt{t^4+10t^2+9}}$$

(ここで $t>\sqrt{3}$ より $t^2-3>0$ であり)

$$f(t) = \frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{t^4+10t^2+9}}$$

(5)

($t^2-3 = X$ とおくと $X>0$.
$t^2 = X+3$
$t>\sqrt{3}$ より $t = \sqrt{X+3}$)

$$f(t) = \frac{3(t^2-3)}{t\sqrt{(t^2-3)^2+16t^2}}$$

$$= \frac{3X}{\sqrt{X+3}\sqrt{X^2+16(X+3)}}$$

$$= \frac{3X}{\sqrt{X+3}\sqrt{X^2+16X+48}}$$

$$= 3\sqrt{\frac{X^2}{(X+3)(X+4)(X+12)}} = 3\sqrt{g(X)}$$

とおくと

$$g(X) = \frac{X^2}{(X+3)(X+4)(X+12)}$$

$$= \frac{X^2}{X^3+19X^2+96X+144}$$

$$g'(X) = \frac{2X(X^3+19X^2+96X+144)-X^2(3X^2+38X+96)}{(X+3)^2(X+4)^2(X+12)^2}$$

$$= \frac{-X^4+96X^2+288X}{(X+3)^2(X+4)^2(X+12)^2}$$

$$= \frac{-X(X^3-96X-288)}{(X+3)^2(X+4)^2(X+12)^2}$$

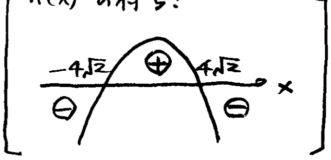
ここで $X>0$ より

$h(X) = -X^3+96X+288$ とおくと

$$h'(X) = -3X^2+96$$

$$= -3(X^2-32)$$

$h'(X)$ の符号!



$h'(X)$ の符号と $g'(X)$ の符号は一致し、

X	(0)	$\cdots$	$4\sqrt{2}$	$\cdots$
$g'(X)$		+	0	−
$g(X)$		↗		↘

$g(X)$ が最大のとき $f(t)$ は最大となる
増減表より $f(t)$ は $X=4\sqrt{2}$ を満たす t で最大値をとる。■