

〔 1 〕 a, b を正の定数とする。 $0 < \theta < \pi$ を満たす実数 θ に対し、平面上で、次の三つの条件 (i), (ii), (iii) を満たす三角形 PAB, およびこの三角形と辺 AB を共有する長方形 ABCD を考える。

(i) $PA = a, PB = b, \angle APB = \theta$ である。

(ii) 2 点 C, D はともに直線 AB に関して点 P と反対側にある。

(iii) $AB = 3AD$ である。

三角形 PAB の面積と長方形 ABCD の面積の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1) 辺 AB の長さを a, b, θ を用いて表せ。

(2) S を a, b, θ を用いて表せ。

(3) θ が $0 < \theta < \pi$ の範囲を動くときの S の最大値を M とし、 S が最大値 M をとるときの θ の値を β とする。 M を a, b を用いて表せ。また、 $\sin \beta$ および $\cos \beta$ の値をそれぞれ求めよ。

(4) $a = 16, b = 25$ とする。また、 β を (3) で定めた値とする。 $\theta = \beta$ のときの、点 P と直線 AB の距離を求めよ。

〔 2 〕 i を虚数単位とする。 $z \neq -1$ を満たす複素数 z に対し,

$$w = \frac{z-i}{z+1}$$

とおく。次の問いに答えよ。

- (1) $z \neq -1$ のとき $w \neq 1$ であることを示せ。また、 $w \neq 1$ のとき、 z を w を用いて表せ。
- (2) t を -1 と異なる実数とする。複素数平面において、実部が t である複素数全体の描く直線を ℓ_t とおく。点 z が直線 ℓ_t 上を動くとき、点 w はある円 S_t から 1 点を取り除いた図形の上を動く。この円 S_t の中心 P_t に対応する複素数を t を用いて表せ。
- (3) P_t を (2) で定義した点とする。 t が -1 以外の実数全体を動くときに P_t が描く図形を、複素数平面上に図示せよ。

〔 3 〕 関数 $f(x) = xe^{-2x^2}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底とする。

- (1) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。また、極大値をとるとき
の x の値、および極小値をとるとき x の値を求めよ。
- (2) $a > 0$ とし、点 $A(a, 0)$ を考える。また、座標平面上の曲線 $y = f(x)$
上の点 $(t, f(t))$ における接線を ℓ_t とおく。 ℓ_t が点 A を通るような実
数 t がちょうど二つあるとする。このとき、 a の値を求めよ。さらに、
その二つの t の値を p, q (ただし、 $p < q$) とおくとき、 p, q を求めよ。
- (3) q を (2) で定めた値とする。曲線 $y = f(x)$ 、直線 $x = q$ および x 軸で
囲まれた図形の面積を求めよ。

〔 4 〕 n を正の整数とする。次の問いに答えよ。

(1) 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \, dx$$

の値を求めよ。

(2) 定積分

$$\int_0^{\pi} |\sin nx| \, dx$$

の値を求めよ。

(3) 座標平面において連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2}, \quad y \leq |\sin nx|$$

の表す図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

(4) 座標平面において連立不等式

$$0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x} |\sin nx|$$

の表す図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

- 〔 5 〕 1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出た目を a_1 , 2 回目に出た目を a_2 , 3 回目に出た目を a_3 とする。次に, 1 枚の硬貨を 3 回投げる。 $k = 1, 2, 3$ に対し, k 回目に表が出た場合は $b_k = 1$, 裏が出た場合は $b_k = a_k$ とおく。ベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

を考える。次の問いに答えよ。

- (1) $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である確率を求めよ。
- (2) $b_1 = 1$ である確率を求めよ。
- (3) $\vec{b} = (1, 1, 1)$ であつたとき, $\vec{a} = (1, 1, 5)$ である条件付き確率を求めよ。
- (4) $\vec{b} = (1, 1, 1)$ であつたとき, $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ である条件付き確率を求めよ。