[1]

$$\int_0^1 (\sin(2n\pi t) - xt - y)^2 dt$$

$$= \int_0^1 \{\sin^2(2n\pi t) + x^2t^2 + y^2 - 2xt\sin(2n\pi t) + 2xyt - 2y\sin(2n\pi t)\} dt$$

ここで

$$\int_0^1 \sin^2(2n\pi t) dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1-\cos(4n\pi t)}{2} dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{8n\pi}\sin(4n\pi t)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 (x^2t^2 + y^2 + 2xyt) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^2t^3 + xyt^2 + y^2t\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}x^2 + xy + y^2$$

$$\int_0^1 t\sin(2n\pi t) dt$$

$$= \left[-\frac{t}{2n\pi}\cos(2n\pi t)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi t)\right) dt$$

$$= -\frac{1}{2n\pi} + \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi t)\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2n\pi}$$

$$\int_0^1 \sin(2n\pi t) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2n\pi}\cos(2n\pi t)\right]_0^1$$

$$= 0$$

よって

$$(与式) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 + xy + y^2 + \frac{x}{n\pi}$$

$$= y^2 + xy + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{n\pi}x + \frac{1}{2}$$

$$= \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{n\pi}x + \frac{1}{2}$$

$$= \left(y + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\left(x + \frac{6}{n\pi}\right)^2 - \frac{3}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2}$$

よって $y = -\frac{x}{2}$ かつ $x = -\frac{6}{n\pi}$

つまり $x = -\frac{6}{n\pi}$ かつ $y = \frac{3}{n\pi}$ のとき

$$I_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{n^2\pi^2}$$

よって $\underline{\underline{\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{2}}}$

[2] $f(x^2)=(x^2+2)g(x)+7$ —— ①

$g(x^3)=x^4f(x)-3x^2g(x)-6x^2-2$ —— ②

(1) (証明)

$\begin{cases} f(x): \ell \text{次式} & (\ell \geqq 3) \\ g(x): m \text{次式} & (m \geqq 3) \end{cases}$

と仮定する

① より $2\ell=2+m \iff m=2\ell-2$ —— ①'

② より $3m=\mathrm{Max}\{4+\ell, 2+m, 2, 0\}$ —— ②'

ここで

$\mathrm{Max}\{4+m, 2+m, 2\}=2+m$ のとき

$3m=2+m$ より $m=1$

となり $m \geqq 3$ に不合理

$\mathrm{Max}\{4+m, 2+m, 2\}=2$ のとき

$3m=2$ より $m=\frac{2}{3}$

となり $m \geqq 3$ に不合理

$\mathrm{Max}\{4+m, 2+m, 2, 0\}=0$ のとき

$3m=2$ より $m=0$.

となり $m \geqq 3$ に不合理

よって $\mathrm{Max}\{4+\ell, 2+m, 2, 0\}=4+\ell$

$3m=4+\ell$

このとき ①' より.

$3(2\ell-2)=4+\ell$

$5\ell=10$

$\ell=2$

これは $\ell \geqq 3$ に矛盾する.

よって $\ell \leqq 2$.

$\ell \leqq 2$ かつ $m \geqq 3$ のとき.

同様の議論から $\ell=2$

このとき ① より $m=2$

これは $m \geqq 3$ に矛盾する.

よって. $m \leqq 2$.

以上により

$f(x)$ と $g(x)$ の次数はともに 2以下である. ■

(2) (1) より.

$\ell \leqq 2$, $m \leqq 2$

(i) $m=0$ のとき

①' より $2\ell=2$.

$\ell=1$

つまり.

$f(x)=ax+b$, $g(x)=c$. $(a, b, c \in \mathbb{R})$

とできる. (ただし, $a \neq 0$, $c \neq 0$)

このとき

① より

$ax^2+b=(x^2+2)c+7$.

$ax^2+b=cx^2+(2c+7)$.

x についての恒等式なので

$a=c$ かつ $b=2c+7$.

つまり

$f(x)=cx+2c+7$, $g(x)=c$

② より.

$c=x^4(cx+2c+7)-3x^2 \cdot c-6x^2-2$

$c=cx^5+(2c+7)x^4-3cx^2-6x^2-2$

x についての恒等式 となるような

c は存在しない.

よって $m \neq 0$

(ii) $m=1$ のとき

①' より $\ell=\frac{3}{2}$

$\ell \in \mathbb{Z}$ に不合理

よって $m \neq 1$

(iii) $m=2$ のとき.

① より $\ell=2$

つまり

$\begin{cases} f(x)=ax^2+bx+c \\ g(x)=px^2+qx+r \end{cases}$

$(a, b, c, p, q, r \in \mathbb{R})$

とできる ただし $(a \neq 0, p \neq 0)$

このとき

① より

$ax^4+bx^2+c=(x^2+2)(px^2+qx+r)+7$

ax^4+bx^2+c

$=px^4+qx^3+(2p+r)x^2+2qx+(2r+7)$

x についての恒等式なので

$p=a$ かつ $q=0$ かつ $2p+r=b$

かつ $2q=0$ かつ $2r+7=c$

より

$p=a$ かつ $q=0$ かつ $r=b-2a$ かつ $c=2b-4a+7$

つまり

$$\begin{cases} f(x)=ax^2+bx+(2b-4a+7) \\ g(x)=ax^2+(b-2a) \end{cases}$$

② より

$$ax^6+(b-2a)=x^4\{ax^2+bx+(2b-4a+7)\}-3x^2\{ax^2+(b-2a)\}-6x^2-2.$$

$$ax^6+(b-2a)=ax^6+bx^5+(-7a+2b+7)x^4+(6a-3b-6)x^2-2.$$

xについての恒等式 より

$b=0$ かつ $-7a+2b+7=0$ かつ $6a-3b-6=0$ かつ $-2=b-2a.$

これを解いて

$a=1,\ b=0$

このとき

$c=3,\ p=1,\ q=0,\ r=-2$

(i) 〜 (iii) より

$$\underline{\underline{f(x)=x^2+3,\quad g(x)=x^2-2}}$$

[3]

(1) $z_1 = z_2$ のとき

$ax^2 + bx + c = 0$ ——— (*)

は重解をもつので

判別式 $D = 0$ となるとよい.

よって $b^2 - 4ac = 0$.

$b^2 = 4ac$ を満たすのは

$(a, c, b) = (1,1,2), (1,4,4), (2,2,4),$
$(3,3,6), (4,1,4)$

の 5通り.

全事象 $6^3 = 216$ (通り) なので

求める確率は

$\underline{\underline{\dfrac{5}{216}}}$

(2) (i) $\{z_1, z_2\} = \{1, -1\}$ のとき.

(*) は

$a(x-1)(x+1) = 0$

$ax^2 - a = 0$

これは $b \neq 0$ に不合理

(ii) $(z_1, z_2) = (1,1), (-1,-1)$ のとき

(1) より

$(a, c, b) = (1,1,2), (2,2,4), (3,3,6)$

の 3通り

(iii) $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ のとき.

$D < 0$ より

$b^2 - 4ac < 0 \iff b^2 < 4ac$ —— ①

また (*) より

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a} i$ ——— (**)

$|x| = 1$ より $|x|^2 = 1$ であり

$\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\right)^2 = 1$

$\dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{-b^2+4ac}{4a^2} = 1$

$\dfrac{c}{a} = 1$

よって $a = c$

(ア) $a = c = 1$ のとき.

① より $b^2 < 4$

よって $b = 1$ の 1通り.

(イ) $a = c = 2$ のとき

① より $b^2 < 16$

よって $b = 1, 2, 3$ の 3通り.

(ウ) $a = c = 3$ のとき

① より $b^2 < 36$

よって $b = 1, 2, 3, 4, 5$ の 5通り.

(エ) $a = c \geqq 4$ のとき

① より $b^2 < 64$

よって $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

で、それぞれ 6通りずつ.

(ア)〜(エ) より

$1 + 3 + 5 + 6 \times 3 = 27$ (通り).

(i)〜(iii) より

$3 + 27 = 30$ (通り)

よって $\dfrac{30}{216} = \underline{\underline{\dfrac{5}{36}}}$

(3) $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ のとき.

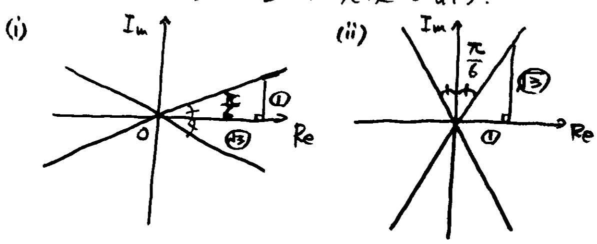
l_1 と l_2 のなす角は $0°$ となり不合理.

よって $z_1, z_2 \notin \mathbb{R}$ で考えるとよい.

つまり ① のもとで考える.

ここで (**) より

z_1 と z_2 は互いに共役であり.



の 2通りを考えるとよい.

(i) のとき

$\left|-\dfrac{b}{2a}\right| : \left|\pm\dfrac{\sqrt{-b^2+4ac}}{2a}\right| = \sqrt{3} : 1$

$b : \sqrt{-b^2+4ac} = \sqrt{3} : 1$

$b = \sqrt{3}\sqrt{-b^2+4ac}$

$$\ell^2 = 3(-\ell^2+4ac)$$

$$4\ell^2 = 12ac$$

$$\ell^2 = 3ac \quad \text{———— ②}$$

これは ① を満たしており

ℓ は 3の倍数 であることを示しているので

(ア) $\ell = 3$ のとき

② は $9 = 3ac$

$ac = 3$.

よって $(a,c) = (1,3), (3,1)$

の 2通り

(イ) $\ell = 6$ のとき

② は $36 = 3ac$

$ac = 12$

よって $(a,c) = (2,6), (3,4), (4,3), (6,2)$

の 4通り.

(ア), (イ) より

$2+4 = 6$ (通り)

(ii) のとき

$$\left|-\frac{\ell}{2a}\right| : \left|\pm\frac{\sqrt{-\ell^2+4ac}}{2a}\right| = 1 : \sqrt{3}.$$

$$\ell : \sqrt{-\ell^2+4ac} = 1 : \sqrt{3}.$$

$$\sqrt{3}\,\ell = \sqrt{-\ell^2+4ac}$$

$$3\ell^2 = -\ell^2+4ac$$

$$\ell^2 = ac. \quad \text{———— ③}$$

これは ① を満たしており.

(ウ) $\ell = 1$ のとき

③ は $ac = 1$

よって $(a,c) = (1,1)$

の 1通り

(エ) $\ell = 2$ のとき

③ は $ac = 4$

よって $(a,c) = (1,4), (2,2), (4,1)$

の 3通り

(オ) $\ell = 3$ のとき

③ は $ac = 9$

よって $(a,c) = (3,3)$

の 1通り

(カ) $\ell = 4$ のとき

③ は $ac = 16$

よって $(a,c) = (4,4)$

の 1通り

(キ) $\ell = 5$ のとき

③ は $ac = 25$

よって $(a,c) = (5,5)$

の 1通り

(ク) $\ell = 6$ のとき

③ は $ac = 36$

よって $(a,c) = (6,6)$

の 1通り

(ウ) ～ (ク) より

$1+3+1+1+1+1 = 8$ (通り)

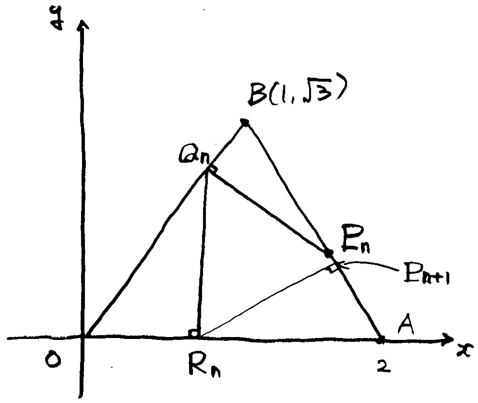
(i), (ii) より

$6+8 = 14$ (通り)

よって

$$\frac{14}{216} = \underline{\underline{\frac{7}{108}}}$$

[4]



AB: $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$　上の

点 $P_n(p_n, -\sqrt{3}p_n+2\sqrt{3})$　とおく

OB: $y=\sqrt{3}x$　であり

P_nQ_n: $y-(-\sqrt{3}p_n+2\sqrt{3})=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-p_n)$

$$y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p_n+2\sqrt{3}.$$

OB と P_nQ_n を連立して

$$\sqrt{3}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p_n+2\sqrt{3}.$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}p_n+2\sqrt{3}.$$

$$x=-\frac{1}{2}p_n+\frac{3}{2}$$

よって　$R_n\left(-\frac{1}{2}p_n+\frac{3}{2}, 0\right)$

R_nP_n: $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}p_n-\frac{3}{2}\right)$

AB と R_nP_n を連立して

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}p_n-\frac{3}{2}\right)=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$$

$$x+\frac{1}{2}p_n-\frac{3}{2}=-3x+6$$

$$4x=-\frac{1}{2}p_n+\frac{15}{2}$$

$$x=-\frac{1}{8}p_n+\frac{15}{8}$$

よって

$$p_{n+1}=-\frac{1}{8}p_n+\frac{15}{8}$$

$$-)\quad \frac{5}{3}=-\frac{1}{8}\times\frac{5}{3}+\frac{15}{8}$$

$$p_{n+1}-\frac{5}{3}=-\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{5}{3}\right)$$

$\alpha=-\frac{1}{8}\alpha+\frac{15}{8}$

$\frac{9}{8}\alpha=\frac{15}{8}$

$\alpha=\frac{5}{3}$

$$p_n-\frac{5}{3}=\left(p_1-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

$$p_n=\left(p_1-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}+\frac{5}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{5}{3}$$

このとき

$$y=-\frac{5\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって

点 $\left(\frac{5}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

[5]

(ア) で

$z=i$ のとき $w=i$ より

$$i=\frac{ai+b}{ci+1}$$

$$-c+i=b+ai$$

$$b+c+(a-1)i=0 \quad \text{———①}$$

$z=-i$ のとき $w=-i$ より

$$-i=\frac{-ai+b}{-ci+1}$$

$$-c-i=-ai+b$$

$$b+c+(-a+1)i=0 \quad \text{———②}$$

①+② より

$$2(b+c)=0$$

$$b+c=0 \iff b=-c$$

①−② より

$$2(a-1)i=0$$

$$a=1$$

よって

$$w=\frac{z-c}{cz+1}$$

$$w(cz+1)=z-c$$

$$(cw-1)z=-w-c \quad \text{———③}$$

(i) $cw\neq 1$ ———④ のとき

$$z=\frac{-w-c}{cw-1}$$

ここで

点 z は虚軸全体を動くので

$$z=-\bar{z}$$

$$\frac{-w-c}{cw-1}=-\overline{\left(\frac{-w-c}{cw-1}\right)}$$

$$\frac{-w-c}{cw-1}=-\frac{-\bar{w}-\bar{c}}{\bar{c}\bar{w}-1}$$

$$-(w+c)(\bar{c}\bar{w}-1)=(\bar{w}+\bar{c})(cw-1)$$

$$-cw\bar{w}+w-c\bar{c}\bar{w}+c$$
$$=cw\bar{w}-\bar{w}+c\bar{c}w-\bar{c}$$

$$(c+\bar{c})w\bar{w}+(c\bar{c}-1)w+(c\bar{c}-1)\bar{w}=c+\bar{c}$$

(ここで

c は純虚数ではないので

$c\neq-\bar{c}$)

よって

$$w\bar{w}+\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}w+\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\bar{w}=1$$

$+\left|\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right|^2$

	$\bar{w}$	$\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}$
w	$w\bar{w}$	$\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}w$
$\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}$	$\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\bar{w}$	$\left\lvert\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right\rvert^2$

$+\left|\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right|^2$

$$\left(w+\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right)\left(\bar{w}+\frac{\bar{c}c-1}{\bar{c}+c}\right)=1+\left|\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right|^2$$

$$\left|w+\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right|^2=1+\left|\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right|^2$$

よって

$$\left|w+\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right|^2=\sqrt{1+\left|\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}\right|^2}$$

(イ) で

$|w|=1$ より

$$\frac{c\bar{c}-1}{c+\bar{c}}=0$$

よって $|c|^2=1$

つまり $|c|=1$

ここで ④ より $w\neq\frac{1}{c}$ より

点 w の軌跡は単位円

ただし，点 $\frac{1}{c}$ を除く。

(ウ) より

$\frac{1}{c}=-1$ つまり $c=-1$

以上により

$a=1,\ b=1,\ c=-1$

(ii) $cw=1$ のとき.

④ は

$0=-w-c$

$c=-w$

このとき

$-w^2=1$

$w^2=-1$

$w=\pm i$

$\begin{cases} w=i \text{ のとき } c=-i \\ w=-i \text{ のとき } c=i \end{cases}$

これらは c が純虚数でないことに不合理

(i), (ii) より

$\underline{\underline{a=1,\ b=1,\ c=-1}}$