2019 長崎大学 教育学部A，経済学部，環境科学部，水産学部＝$\boxed{1}\boxed{2}$ 教育学部B，薬学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{7}$
医学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{8}$ 歯学部，工学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{7}$

$\boxed{1}$

以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\cos^2 x-\sin x \quad (0\leqq x<2\pi)$ の最大値および最小値を求めよ。また，そのときの $x$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n+6n^2+4n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとき，一般項 $a_n$ を求めよ。

(4) 平面上の3つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ において

$$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=3|\vec{c}|=6k \quad (k\text{は正の定数})$$
$$\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$$

が成り立っている。このとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表し，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $k$ を用いて表せ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角 $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ の値を求めよ。

$\boxed{2}$

実数 $\alpha$，$\beta\ (\alpha\leqq\beta)$ に対し，$p$，$q$ を $p=\alpha+\beta$，$q=\alpha\beta$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $p=3$，$q=-1$ のとき，$\alpha$，$\beta$ の値を求めよ。

(2) 実数 $\alpha$，$\beta$ を解とする $x$ の2次方程式を $p$，$q$ を用いて表せ。また，このときの $p$，$q$ が満たす不等式を求めよ。

(3) (2)の実数 $\alpha$，$\beta$ が，さらに不等式 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3\leqq 0$ を満たすとき，点P $(p,\ q)$ が存在する領域 $E$ を $pq$ 平面に図示せよ。また，領域 $E$ の面積 $S$ を求めよ。

(4) (3)のとき，$\alpha\beta+\alpha+\beta$ の最大値および最小値を求めよ。また，そのときの実数 $\alpha$ と $\beta$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$

以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 3次方程式 $x^3-3px+p=0$ が異なる3つの実数解をもつように，実数 $p$ の値の範囲を定めよ。

(2) 関数 $y=\log x\ (x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線を $\ell$ とする。また，点Pを通り，$\ell$ に垂直な直線を $m$ とする。2本の直線 $\ell$，$m$ および $y$ 軸とで囲まれる図形の面積を $S$ とする。$S=5$ となるときの点Pの座標を求めよ。

(3) 空間内に，3点 $\mathrm{A}(3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 4)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 4)$ がある。点Cから直線ABに垂線を引き，交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおくとき，実数 $t$ の値と線分CHの長さを求めよ。

(4) 原点をOとする座標平面上に，曲線 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ があり，$C$ 上に $x$ 座標を $t$ とする第1象限の点Pをとる。このとき，点Pから $x$ 軸および $y$ 軸に垂線を下ろし，交点をそれぞれQ，Rとする。四角形OQPRを $x$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 $V$ の最大値と，そのときのPの座標を求めよ。

$\boxed{4}$

△OABの2辺OA，OB上にそれぞれ点C，Dがあり，直線CDは△OABの重心Gを通るものとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=x\vec{a}\quad(0<x<1),\ \overrightarrow{\mathrm{OD}}=y\vec{b}\quad(0<y<1)$$

とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{CG}:\mathrm{GD}=t:(1-t)$，$0<t<1$ とする。このとき，$x$ と $y$ をそれぞれ $t$ の式で表せ。

(2) $y$ を $x$ の式で表せ。また，$0<y<1$ より $x$ の値の範囲を求めよ。

(3) △OCDの面積を $S_1$，△OABの面積を $S_2$ とし，$f(x)=\dfrac{S_1}{S_2}$ とする。関数 $f(x)$ の増減表をつくり，$f(x)$ の最小値と，そのときの $x$ と $y$ の値を求めよ。

$\boxed{5}$

曲線 $C:y=\sin x \quad \left(0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi\right)$ 上の $x$ 座標が0の点をA，$x$ 座標が $\dfrac{2}{3}\pi$ の点をBとする。点 $\mathrm{P}(p,\ \sin p)$ が曲線 $C$ 上を動くとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分APの中点を $\mathrm{M}(x,\ y)$ とする。ただし，PがAと一致するときは，中点MはAとする。このとき，$x$ と $y$ をそれぞれ $p$ を用いて表せ。また，Mがえがく曲線を $C_1:y=f(x)$ とするとき，関数 $f(x)$ と $x$ の範囲を求めよ。

(2) 線分PBの中点を $\mathrm{N}(x,\ y)$ とする。ただし，PがBと一致するときは，中点NはBとする。このとき，$x$ と $y$ をそれぞれ $p$ を用いて表せ。また，Nがえがく曲線を $C_2:y=g(x)$ とするとき，関数 $g(x)$ と $x$ の範囲を求めよ。さらに，$y=g(x)$ の最大値と，そのときの $x$ の値を求めよ。

(3) 曲線 $C$ と直線ABとで囲まれる図形の面積 $S$ を求めよ。

(4) 3つの曲線 $C$，$C_1$，$C_2$ の概形をえがき，3つの曲線で囲まれる図形の面積 $T$ を求めよ。

$\boxed{6}$

2次方程式 $x^2-x+1=0$ の2つの解を $\alpha$，$\beta\ (-\pi<\arg\beta<\arg\alpha<\pi)$ とする。数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\alpha^n+\beta^n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_n=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1$，$a_2$，$b_1$，$b_2$ の値を求めよ。

(2) $\alpha$，$\beta$ を極形式で表し，一般項 $a_n$，$b_n$ を求めよ。

(3) すべての自然数 $n$ に対して，$a_n$，$b_n$ は整数であることを示せ。

(4) 複素数平面上の異なる3点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(\alpha^n)$，$\mathrm{C}(\beta^n)$ について，等式

$$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$$

が成り立つとき，△ABCはどのような形になるか。また，このときの $a_n$ と $b_n$ の値を求めよ。

２０１９　長崎大学　教育学部A，経済学部，環境科学部，水産学部＝$\boxed{1}\boxed{2}$　　教育学部B，薬学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{7}$
医学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{8}$　　歯学部，工学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{7}$

$\boxed{7}$

自然数 $n$ に対して，関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を次のように定める。

$$f_n(x)=\frac{a_n}{x} \qquad (x>0)$$

$$g_n(x)=x(x-1)^{2n} \quad (x\geqq 0)$$

ただし，$a_n$ は各自然数 $n$ に対して定まり，$x$ とは無関係な正の実数である。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=t\ (0<t<1)$ における $y=f_n(x)$ の接線を $\ell$ とするとき，$\ell$ の式を $t$ および $a_n$ を用いて表せ。

(2)　(1) の接線 $\ell$ は，$x=t\ (0<t<1)$ において，$y=g_n(x)$ にも接しているものとする。すなわち，$f_n(t)=g_n(t)$，$f'_n(t)=g'_n(t)$ が同時に成り立つ。このとき，$t$ および $a_n$ をそれぞれ $n$ の式で表せ。

(3)　曲線 $y=g_n(x)$ と $x$ 軸とで囲まれる図形の面積を $S_n$ とするとき，$S_n$ を $n$ の式で表せ。

(4)　(2) において，接線 $\ell$ と $x$ 軸および $y$ 軸とで囲まれる図形の面積を $T_n$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$ の値を $e$ を用いて表せ。ただし，$e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とする。

$\boxed{8}$

方程式 $z^3=1$ の解を $z_1$，$z_2$，$z_3$ とし，$0\leqq \arg z_1<\arg z_2<\arg z_3<2\pi$ とする。複素数平面上に3点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$z_1+z_2+z_3$，$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$，$z_1z_2z_3$ の値をそれぞれ求めよ。

(2)　複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，線分の長さの2乗の和 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ および線分の長さの積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ の値を，$\alpha$ を用いてそれぞれ表せ。

(3)　複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，$\alpha$ が $\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri\ (r>0)$ を満たすとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最大値および，そのときの $r$ と $\alpha$ の値を求めよ。ただし，$i$ は虚数単位である。

(4)　(3) において，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ が最大となるときの $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ の値を求めよ。