2019　長崎大学　教育学部A，経済学部，環境科学部，水産学部＝$\boxed{1}\boxed{2}$　　教育学部B，薬学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{7}$
医学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{8}$　　歯学部，工学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{7}$

$\boxed{1}$

以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\cos^2 x-\sin x$ $(0 \leqq x<2\pi)$ の最大値および最小値を求めよ。また，そのときの x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{3}$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n+6n^2+4n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ。

(4) 平面上の 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ において

$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=3|\vec{c}|=6k$ （k は正の定数）

$\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$

が成り立っている。このとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表し，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を k を用いて表せ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がなす角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ の値を求めよ。

(1)

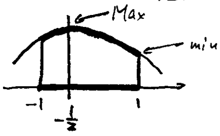
$y=\cos^2 x-\sin x$

$=(1-\sin^2 x)-\sin x$

$=-\sin^2 x-\sin x+1$

$=-\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

$0 \leqq x<2\pi$ で $-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より



$\begin{cases} \mathrm{Max}=\frac{5}{4} & \left(x=\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right) \\ \min=-1 & \left(x=\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$

$\sin x=1$

(2)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}$ より

$xy \neq 0$ のもとで

$3y+3x=2xy$

$2xy-3x-3y=0$

	y	$-\frac{3}{2}$
$2x$	$2xy$	$-3x$
-3	$-3y$	$\frac{9}{2}$

$+\frac{9}{2}$　　$+\frac{9}{2}$

$(2x-3)\left(y-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$

$(2x-3)(2y-3)=9$

（ここで $x \geqq 1$，$y \geqq 1$ より
$2x-3 \geqq -1$，$2y-3 \geqq -1$）

$2x-3$	9	3	1
$2y-3$	1	3	9

$(x, y)=(6,2),(3,3),(2,6)$

(3)

$a_{n+1}=a_n+2^n+6n^2+4n-1$

より

$\boxed{a_{n+1}-a_n=2^n+6n^2+4n-1}$

$n=1$　$\cancel{a_2}-a_1=2^1+6\times1^2+4\times1-1$

$n=2$　$\cancel{a_3}-\cancel{a_2}=2^2+6\times2^2+4\times2-1$

$n=3$　$\cancel{a_4}-\cancel{a_3}=2^3+6\times3^2+4\times3-1$

⋮

$n=n-1$　$a_n-\cancel{a_{n-1}}=2^{n-1}+6(n-1)^2+4(n-1)-1$　$(+$　$(n \geqq 2)$

$a_n-a_1=2+2^2+\cdots+2^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(6k^2+4k-1)$

3 …… $4n-5$
$n-1$ こ

$a_n-a_1=\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}+6\times\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{(3+4n-5)(n-1)}{2}$

$a_n-a_1=2^n-2+(n-1)n(2n-1)+(2n-1)(n-1)$　（$n=1$ でも成り立つ）

$a_n-1=2^n-2+(n-1)(2n-1)(n+1)$

よって　$a_n=2^n-1+(n+1)(n-1)(2n-1)$

(4)

$\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}=\vec{0}$ より

$\vec{c}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

よって　$|\vec{c}|=\left|-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}\right|$

両辺を 2 乗して

$|\vec{c}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}|^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{9}|\vec{b}|^2$

（ここで
$|\vec{a}|=2|\vec{b}|=3|\vec{c}|=6k$　より
$|\vec{a}|=6k$ かつ $|\vec{b}|=3k$ かつ $|\vec{c}|=2k$）

$4k^2=4k^2+\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}+4k^2$

$-\frac{4}{9}\vec{a}\cdot\vec{b}=4k^2$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=-9k^2$

$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=-9k^2$

$6k\cdot3k\cos\theta=-9k^2$

$k \neq 0$ より

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より

$\theta=\frac{2}{3}\pi$

2019 長崎大学 教育学部A，経済学部，環境科学部，水産学部＝$\boxed{1}\boxed{2}$ 教育学部B，薬学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{7}$
医学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{8}$ 歯学部，工学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{7}$

$\boxed{2}$

実数α，β $(\alpha \leqq \beta)$に対し，p，qを$p=\alpha+\beta$，$q=\alpha\beta$とする。以下の問いに答えよ。

(1) $p=3$，$q=-1$のとき，α，βの値を求めよ。

(2) 実数α，βを解とするxの2次方程式をp，qを用いて表せ。また，このときのp，qが満たす不等式を求めよ。

(3) (2)の実数α，βが，さらに不等式$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3 \leqq 0$を満たすとき，点P$(p,\ q)$が存在する領域$E$を$pq$平面に図示せよ。また，領域$E$の面積$S$を求めよ。

(4) (3)のとき，$\alpha\beta+\alpha+\beta$の最大値および最小値を求めよ。また，そのときの実数αとβの値を求めよ。

(1)

$p=3,\ q=-1$ のとき

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=-1$

α, β を解にもつ 2次方程式の1つは

$x^2-3x-1=0$

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

$\alpha \leqq \beta$ に注意して

$\alpha=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2},\ \beta=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$

(2)

α, β を解にもつ 2次方程式の1つは

$x^2-px+q=0$

解が実数 なので 判別式 $D \geqq 0$ となるとよく

$D=p^2-4q \geqq 0$

(3)

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-3 \leqq 0$ より

$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3 \leqq 0$

$p^2-q-3 \leqq 0$

よって

$E: \begin{cases} p^2-4q \geqq 0 \\ p^2-q-3 \leqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} q \leqq \frac{1}{4}p^2 \\ q \geqq p^2-3 \end{cases}$

ここで

$q=\frac{1}{4}p^2$ と $q=p^2-3$ を連立して

$p^2-3=\frac{1}{4}p^2$

$\frac{3}{4}p^2=3$

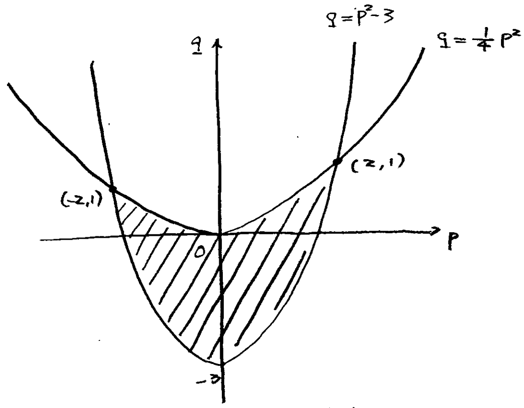
$p^2=4$

$p=\pm 2$

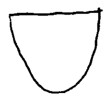
このとき $q=1$

よって

交点 $(2,1),(-2,1)$



領域 E は図の斜線部
ただし，境界を含む

$S=$  $-$ 

$=\int_{-2}^{2}\{1-(p^2-3)\}dp-\int_{-2}^{2}\{1-\frac{1}{4}p^2\}dp$

$=-\int_{-2}^{2}(p-2)(p+2)dp+\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(p-2)(p+2)dp$

$=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{6}\right)\times 4^3$

$=8$

(4)

$\alpha\beta+\alpha+\beta=q+p=k$ とおくと，

$q=-p+k$ (傾き -1，q切片 k の直線) —— ①

これが E と共有点をもつように動くとよい。

最大となるのは

① が点 $(2,1)$ を通るときであり，

$k=2+1=3$

このとき (2) より

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

よって $\alpha=\beta=1$

最小となるのは

① が E と接するときであり，

$q=p^2-3$ と連立して

$-p+k=p^2-3$

$p^2+p-k-3=0$ —— ②

判別式 $D=0$ となるとよく

$D=1-4(-k-3)$

$=4k+13=0$

$k=-\frac{13}{4}$

このとき ② は

$p^2+p+\frac{1}{4}=0$

$4p^2+4p+1=0$

$(2p+1)^2=0$

$p=-\frac{1}{2}$

このとき

$q=\frac{1}{4}-3=-\frac{11}{4}$

(2) より

$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}=0$

$4x^2+2x-11=0$

$x=\dfrac{-1\pm3\sqrt{5}}{4}$

$\alpha \leqq \beta$ より

$\alpha=\dfrac{-1-3\sqrt{5}}{4},\ \beta=\dfrac{-1+3\sqrt{5}}{4}$

以上により

$\begin{cases} \mathrm{Max}=3 & (\alpha=1,\ \beta=1) \\ \min=-\frac{13}{4} & \left(\alpha=\frac{-1-3\sqrt{5}}{4},\ \beta=\frac{-1+3\sqrt{5}}{4}\right) \end{cases}$

２０１９　長崎大学　教育学部A，経済学部，環境科学部，水産学部＝$\boxed{1}\boxed{2}$　　教育学部B，薬学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{6}\boxed{7}$
医学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{8}$　　歯学部，工学部＝$\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}\boxed{7}$

$\boxed{3}$

以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。

(1) ３次方程式 $x^3-3px+p=0$ が異なる３つの実数解をもつように，実数 p の値の範囲を定めよ。

(2) 関数 $y=\log x\ (x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \log t)$ における接線を ℓ とする。また，点Pを通り，ℓ に垂直な直線を m とする。２本の直線 ℓ，m および y 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。$S=5$ となるときの点Pの座標を求めよ。

(3) 空間内に，３点 $\mathrm{A}(3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 4)$，$\mathrm{C}(1,\ 0,\ 4)$ がある。点Cから直線ABに垂線を引き，交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とおくとき，実数 t の値と線分CHの長さを求めよ。

(4) 原点をOとする座標平面上に，曲線 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ があり，C 上に x 座標を t とする第１象限の点Pをとる。このとき，点Pから x 軸および y 軸に垂線を下ろし，交点をそれぞれQ，Rとする。四角形OQPRを x 軸のまわりに１回転してできる立体の体積 V の最大値と，そのときのPの座標を求めよ。

(1) $x^3-3px+p=0$

$f(x)=x^3-3px+p$

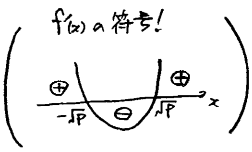
とおくと

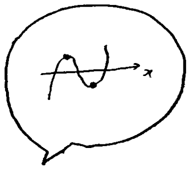
$f'(x)=3x^2-3p=3(x^2-p)$

$f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつためには

$p>0$ が必要

このとき　$f'(x)$ の符号!





$f(-\sqrt{p})f(\sqrt{p})<0$　となるとよく

$(-p\sqrt{p}+3p\sqrt{p}+p)(p\sqrt{p}-3p\sqrt{p}+p)<0$

$(2p\sqrt{p}+p)(-2p\sqrt{p}+p)<0$

$p^2(2\sqrt{p}+1)(2\sqrt{p}-1)>0$

$p>0$ より

$(2\sqrt{p}+1)(2\sqrt{p}-1)>0$

$4p-1>0$

よって　$\underline{\underline{p>\frac{1}{4}}}$　（$p>0$ を満たす.）

(2)

接点 $\mathrm{P}(t,\log t)$

$y'=\frac{1}{x}$

$y'_{(x=t)}=\frac{1}{t}$

$\ell:\ y-\log t=\frac{1}{t}(x-t)$

$y=\frac{1}{t}x+\log t-1$

また

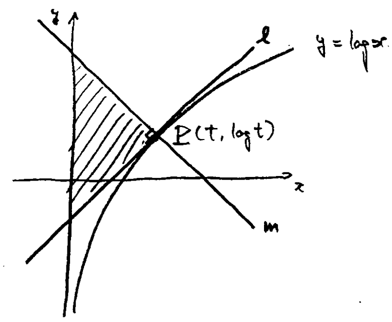
$\ell\perp m$ より

(mの傾き) $=-t$

より

$m:\ y-\log t=-t(x-t)$

$y=-tx+t^2+\log t$



$S=\frac{1}{2}\{(t^2+\log t)-(\log t-1)\}\times t$

$=\frac{1}{2}(t^2+1)t=5$

$t^3+t-10=0$

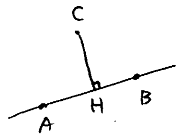
$$\left(\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 0 & 1 & -10 \\ & & 2 & 4 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 5 & \boxed{0} \end{array}\right)$$

$(t-2)(t^2+2t+5)=0$

$t>0$ より　$t=2$

よって　$\underline{\underline{\mathrm{P}(2,\log 2)}}$

(3)



$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より

$-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=(1-t)(3,-1,1)+t(0,2,4)$

$=(3-3t,-1+t,1-t)+(0,2t,4t)$

$=(-3t+3,3t-1,3t+1)$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}$

$=(-1,0,-4)+(-3t+3,3t-1,3t+1)$

$=(-3t+2,3t-1,3t-3)$

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より.

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

（ここで

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$=(-3,1,-1)+(0,2,4)$

$=(-3,3,3)$ ）

$9t-6+9t-3+9t-9=0$

$27t=18$

$\underline{\underline{t=\frac{2}{3}}}$

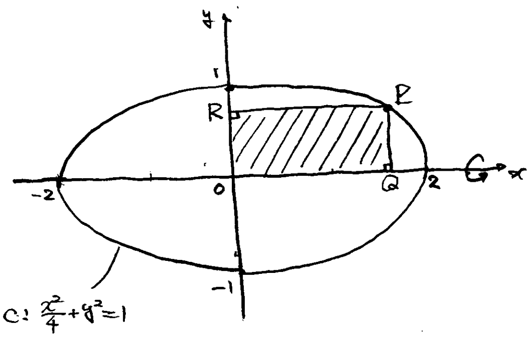
このとき

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(0,1,-1)$　より

$\underline{\underline{|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|=\sqrt{2}}}$

（裏に続く）

(4)



$P(x, y)$ とおくと

$V = \pi y^2 \times x$

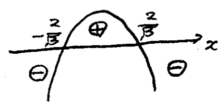
$= \pi x \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)$

$= \pi \left(-\frac{1}{4}x^3 + x\right)$

$V' = \pi \left(-\frac{3}{4}x^2 + 1\right)$

$= -\frac{\pi}{4}(3x^2 - 4)$

V' の符号!



x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	(2)
V'		$+$	0	$-$	
V		↗		↘	

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

$\frac{1}{4} \times \frac{4}{3} + y^2 = 1$

$y^2 = \frac{2}{3}$

$0 < y < 1$ より $y = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

このとき

$V = \pi \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$

よって

$\text{Max}\, V = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$, $P\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

[4]

△OABの2辺OA，OB上にそれぞれ点C，Dがあり，直線CDは△OABの重心Gを通るものとする。

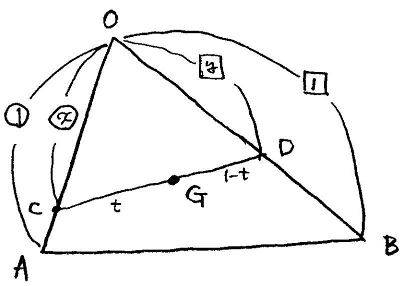
$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=x\vec{a}\quad(0<x<1),\ \overrightarrow{OD}=y\vec{b}\quad(0<y<1)$$

とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) CG：GD＝$t:(1-t)$，$0<t<1$ とする。このとき，x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(2) y を x の式で表せ。また，$0<y<1$ より x の値の範囲を求めよ。

(3) △OCDの面積を S_1，△OABの面積を S_2 とし，$f(x)=\dfrac{S_1}{S_2}$ とする。関数 $f(x)$ の増減表をつくり，$f(x)$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ。



(1) $\overrightarrow{OC}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{OD}=y\vec{b}$

であり

点Gは線分CDを $t:(1-t)$ に内分するので

$$\overrightarrow{OG}=\frac{(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OD}}{t+(1-t)}$$

$$=(1-t)x\vec{a}+ty\vec{b}\quad\text{——①}$$

また，

点Gは△OABの重心なので

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\quad\text{——②}$$

①＝② かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は1次独立なので

$(1-t)x=\dfrac{1}{3}$ かつ $ty=\dfrac{1}{3}$

$0<t<1$ より

$$x=\frac{1}{3(1-t)},\ y=\frac{1}{3t}$$

(2) $(1-t)x=\dfrac{1}{3}$ より

$1-t=\dfrac{1}{3x}$

$t=1-\dfrac{1}{3x}=\dfrac{3x-1}{3x}$

$ty=\dfrac{1}{3}$ に代入して

$\dfrac{3x-1}{3x}\times y=\dfrac{1}{3}$

$(3x-1)y=x$

ここで

$t\neq 0$ より

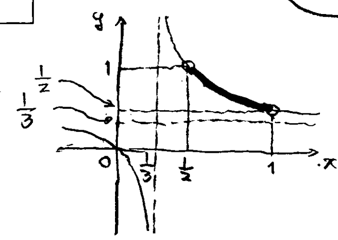
$3x-1\neq 0$

よって

$$y=\frac{x}{3x-1}$$

$$y=\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3x-1)}$$

$3x-1\,)\,x$ 商 $\frac{1}{3}$，$x-\frac{1}{3}$，余り $\frac{1}{3}$



$0<y<1$ かつ $0<x<1$ より

$$\frac{1}{2}<x<1$$

(3) $f(x)=\dfrac{S_1}{S_2}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot x|\vec{a}|\cdot y|\vec{b}|\cdot\sin\angle AOB}{\frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle AOB}$$

$=xy$

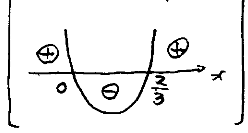
$=\dfrac{x^2}{3x-1}$

$$f'(x)=\frac{2x(3x-1)-x^2\cdot 3}{(3x-1)^2}$$

$$=\frac{3x^2-2x}{(3x-1)^2}$$

$$=\frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2}$$

$x(x-2)$ の符号！



x	$(\frac{1}{2})$ …… $\frac{2}{3}$ …… (1)
$f'(x)$	−　0　＋
$f(x)$	↘　$\frac{4}{9}$　↗

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき $y=\dfrac{2}{3}$ であり

$$\min f(x)=\frac{4}{9}\quad\left(x=\frac{2}{3},\ y=\frac{2}{3}\right)$$

[5]

曲線C：$y=\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$上の$x$座標が0の点をA，$x$座標が$\frac{2}{3}\pi$の点をBとする。点P$(p,\ \sin p)$が曲線$C$上を動くとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分APの中点をM$(x,\ y)$とする。ただし，PがAと一致するときは，中点MはAとする。このとき，xとyをそれぞれpを用いて表せ。また，Mがえがく曲線をC_1：$y=f(x)$とするとき，関数$f(x)$とxの範囲を求めよ。

(2) 線分PBの中点をN$(x,\ y)$とする。ただし，PがBと一致するときは，中点NはBとする。このとき，xとyをそれぞれpを用いて表せ。また，Nがえがく曲線をC_2：$y=g(x)$とするとき，関数$g(x)$とxの範囲を求めよ。さらに，$y=g(x)$の最大値と，そのときのxの値を求めよ。

(3) 曲線Cと直線ABとで囲まれる図形の面積Sを求めよ。

(4) 3つの曲線C，C_1，C_2の概形をえがき，3つの曲線で囲まれる図形の面積Tを求めよ。

(1) $A(0,0)$，$B\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$であり

M(x,y)は線分APの中点なので

$$x=\frac{p}{2},\quad y=\frac{\sin p}{2}$$

pを消去して

$$y=\frac{1}{2}\sin 2x$$

また，$0\leqq p\leqq\frac{2}{3}\pi$より

$$0\leqq 2x\leqq\frac{2}{3}\pi$$
$$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$$

よって $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}\right)$

(2) N(x,y)は線分PBの中点なので

$$x=\frac{p+\frac{2}{3}\pi}{2}=\frac{1}{2}p+\frac{\pi}{3}$$
$$y=\frac{\sin p+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{1}{2}\sin p+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって $x=\frac{1}{2}p+\frac{\pi}{3},\ y=\frac{1}{2}\sin p+\frac{\sqrt{3}}{4}$

$$\iff p=2x-\frac{2}{3}\pi,\ y=\frac{1}{2}\sin p+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

pを消去して

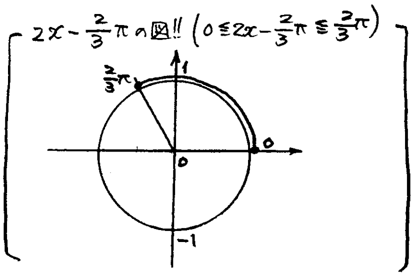
$$y=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

また，$0\leqq p\leqq\frac{2}{3}\pi$より

$$0\leqq 2x-\frac{2}{3}\pi\leqq\frac{2}{3}\pi$$
$$\frac{2}{3}\pi\leqq 2x\leqq\frac{4}{3}\pi$$
$$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi$$

よって $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\ \left(\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$

$2x-\frac{2}{3}\pi$の図!! $\left(0\leqq 2x-\frac{2}{3}\pi\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$

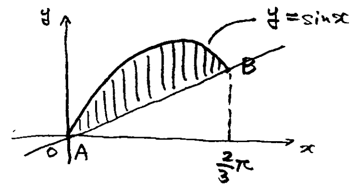


$$0\leqq\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)\leqq 1$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\leqq\frac{1}{2}\sin\left(2x-\frac{2}{3}\pi\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\leqq\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\leqq g(x)\leqq\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$2x-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{2}$
$2x=\frac{7}{6}\pi$

よって $\mathrm{Max}\ g(x)=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\ \left(x=\frac{7}{12}\pi\right)$

(3)

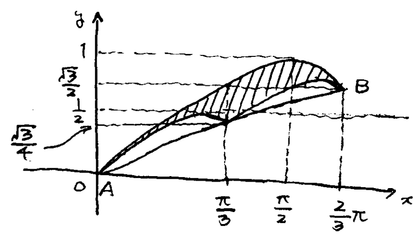


求める領域は図の斜線部であり，

$$\mathrm{AB}:\ y=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{3}\pi}x=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}x$$

$$S=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(\sin x-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}x\right)dx$$
$$=\left[-\cos x-\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}x^2\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=-\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{3\sqrt{3}}{8\pi}\times\frac{4\pi^2}{9}-(-1)$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

(4)



求める領域は図の斜線部であり

$y=g(x)$のグラフは$y=f(x)$のグラフをx軸方向に$\frac{\pi}{3}$，y軸方向に$\frac{\sqrt{3}}{4}$だけ平行移動したものである。

$\sin x=\frac{1}{2}\sin 2x$ とおくと，
$\sin x=\sin x\cos x$
$\sin x\neq 0$のとき
$\cos x=1$
$0<x<\frac{\pi}{3}$に解は存在しない。

$$T=S-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}x\right)dx$$
$$=S-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\times\frac{\pi^2}{9}\right)-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}\pi}{12}$$

$\boxed{6}$

2次方程式 $x^2-x+1=0$ の２つの解を α，$\beta\,(-\pi<\arg\beta<\arg\alpha<\pi)$ とする。数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\alpha^n+\beta^n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_n=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，b_1，b_2 の値を求めよ。

(2) α，β を極形式で表し，一般項 a_n，b_n を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して，a_n，b_n は整数であることを示せ。

(4) 複素数平面上の異なる３点 A(1)，B(α^n)，C(β^n) について，等式
$$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$$
が成り立つとき，△ABC はどのような形になるか。また，このときの a_n と b_n の値を求めよ。

(1) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=1$.

$a_1=\alpha+\beta=1$

$a_2=\alpha^2+\beta^2$
$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=1-2$
$=-1$

$b_1=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1$
$=1-1+1$
$=1$

$b_2=(\alpha\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)+1$
$=1-(-1)+1$
$=3$

よって

$\underline{\underline{a_1=1,\ a_2=-1,\ b_1=1,\ b_2=3}}$

(2) $x^2-x+1=0$

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$-\pi<\arg\beta<\arg\alpha<\pi$ より

$\underline{\underline{\alpha=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3},\ \beta=\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)}}$

$a_n=\alpha^n+\beta^n$
$=\left(\cos\dfrac{n}{3}\pi+i\sin\dfrac{n}{3}\pi\right)+\left(\cos\left(-\dfrac{n}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{n}{3}\pi\right)\right)$
$=\cos\dfrac{n}{3}\pi+i\sin\dfrac{n}{3}\pi+\cos\dfrac{n}{3}\pi-i\sin\dfrac{n}{3}\pi$
$=\underline{\underline{2\cos\dfrac{n}{3}\pi}}$

$b_n=(\alpha\beta)^n-(\alpha^n+\beta^n)+1$
$=1^n-a_n+1$
$=\underline{\underline{2-2\cos\dfrac{n}{3}\pi}}$

(3)（証明）

$a_{n+6}=2\cos\dfrac{n+6}{3}\pi$
$=2\cos\left(\dfrac{n}{3}\pi+2\pi\right)$
$=2\cos\dfrac{n}{3}\pi=a_n$

よって　$a_{n+6}=a_n$　が成り立つので

数列 $\{a_n\}$ は周期 6 であり

$a_1=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$，$a_2=2\cos\dfrac{2}{3}\pi=-1$，
$a_3=2\cos\pi=-2$，$a_4=2\cos\dfrac{4}{3}\pi=-1$，
$a_5=2\cos\dfrac{5}{3}\pi=1$

よって，$\forall n\in\mathbb{N}$ に対し，$a_n\in\mathbb{Z}$ である．

このとき

$b_n=2-2\cos\dfrac{n}{3}\pi$
$=2-a_n\in\mathbb{Z}$

よって　$a_n,\ b_n\in\mathbb{Z}$ ■

(4) $\alpha^n-\beta^n=\left(\cos\dfrac{n}{3}\pi+i\sin\dfrac{n}{3}\pi\right)-\left(\cos\dfrac{n}{3}\pi-i\sin\dfrac{n}{3}\pi\right)$
$=2i\sin\dfrac{n}{3}\pi$

より

$|\alpha^n-\beta^n|^2=4\sin^2\dfrac{n}{3}\pi$

$b_n=|\alpha^n-\beta^n|^2$ より

$2-2\cos\dfrac{n}{3}\pi=4\sin^2\dfrac{n}{3}\pi$

$1-\cos\dfrac{n}{3}\pi=2\left(1-\cos^2\dfrac{n}{3}\pi\right)$

$2\cos^2\dfrac{n}{3}\pi-\cos\dfrac{n}{3}\pi-1=0$

$\left(2\cos\dfrac{n}{3}\pi+1\right)\left(\cos\dfrac{n}{3}\pi-1\right)=0$

$\cos\dfrac{n}{3}\pi=-\dfrac{1}{2},\ 1$.

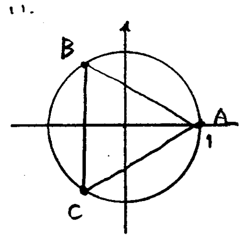
$2\cos\dfrac{n}{3}\pi=-1,\ 2$

$a_n=-1,\ 2$

・よって　$n=2,\ 4$　としてよい。

(i) $n=2$ のとき

$$\begin{cases}\alpha^2=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\\ \beta^2=\cos\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{2}{3}\pi\right)\end{cases}$$



このとき　△ABC は正三角形

(ii) $n=4$ のとき

$$\begin{cases}\alpha^4=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi\\ \beta^4=\cos\left(-\dfrac{4}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\dfrac{4}{3}\pi\right)\end{cases}$$

このとき　△ABC は正三角形

(i)，(ii) より

$\underline{\underline{\triangle ABC \text{ は正三角形}\quad (a_n,\ b_n)=(-1,\ 3)}}$

$\boxed{7}$

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ と $g_n(x)$ を次のように定める。

$$f_n(x)=\frac{a_n}{x}\qquad (x>0)$$

$$g_n(x)=x(x-1)^{2n}\quad (x\geqq 0)$$

ただし，a_n は各自然数 n に対して定まり，x とは無関係な正の実数である。以下の問いに答えよ。

(1) $x=t\ (0<t<1)$ における $y=f_n(x)$ の接線を ℓ とするとき，ℓ の式を t および a_n を用いて表せ。

(2) (1)の接線 ℓ は，$x=t\ (0<t<1)$ において，$y=g_n(x)$ にも接しているものとする。すなわち，$f_n(t)=g_n(t)$，$f'_n(t)=g'_n(t)$ が同時に成り立つ。このとき，t および a_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 曲線 $y=g_n(x)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とするとき，S_n を n の式で表せ。

(4) (2)において，接線 ℓ と x 軸および y 軸とで囲まれる図形の面積を T_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$ の値を e を用いて表せ。ただし，$e=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とする。

(1) 接点 $\left(t,\ \frac{a_n}{t}\right)$

$f_n'(x)=-\frac{a_n}{x^2}$

$f_n'(t)=-\frac{a_n}{t^2}$ より

$\ell:\ y-\frac{a_n}{t}=-\frac{a_n}{t^2}(x-t)$

$$y=-\frac{a_n}{t^2}x+\frac{2a_n}{t}$$

(2) $f_n(t)=g_n(t)$ より

$\frac{a_n}{t}=t(t-1)^{2n}$

$a_n=t^2(t-1)^{2n}$ ――― ①

$g_n(x)=x(x-1)^{2n}$ より

$g_n'(x)=(x-1)^{2n}+x\cdot 2n(x-1)^{2n-1}$

$f_n'(t)=g_n'(t)$ より

$-\frac{a_n}{t^2}=(t-1)^{2n}+2nt(t-1)^{2n-1}$ ――― ②

①，② より

$-(t-1)^{2n}=(t-1)^{2n}+2nt(t-1)^{2n-1}$

$t\neq 1$ より

$-(t-1)=(t-1)+2nt$

$(2n+2)t=2$

$n>0$ より

$$t=\frac{1}{n+1}$$

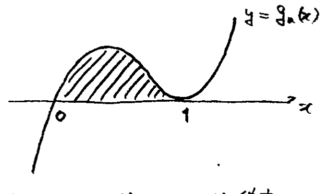
① に代入して

$a_n=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{n+1}-1\right)^{2n}$

$=\left(\frac{1}{n+1}\right)^2\left(\frac{-n}{n+1}\right)^{2n}$

$$=\frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}$$

(3)



求める領域は図の斜線部

$S_n=\int_0^1 x(x-1)^{2n}dx$

$\left(\begin{array}{ll} x-1=t & \text{とおくと} \\ dx=dt & \begin{array}{c|c} x & 0\to 1 \\ \hline t & -1\to 0 \end{array}\end{array}\right)$

$S_n=\int_{-1}^{0}(t+1)t^{2n}dt$

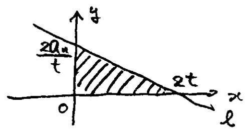
$=\int_{-1}^{0}(t^{2n+1}+t^{2n})dt$

$=\left[\frac{1}{2n+2}t^{2n+2}+\frac{1}{2n+1}t^{2n+1}\right]_{-1}^{0}$

$=-\left(\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2}+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)$

$$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$$

(4) $a_n>0$ より $-\frac{a_n}{t^2}<0$



求める領域は図の斜線部

$T_n=\frac{1}{2}\times 2t\times\frac{2a_n}{t}=2a_n$

$=\frac{2n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}}$

よって

$\frac{S_n}{T_n}=\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)\times\frac{(n+1)^{2n+2}}{2n^{2n}}$

$=\frac{(n+1)^{2n+2}}{4(2n+1)(n+1)n^{2n}}$

$=\frac{(n+1)^{2n+1}}{4(2n+1)n^{2n}}$

$=\frac{n+1}{4(2n+1)}\times\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n}$

$=\frac{1+\frac{1}{n}}{4\left(2+\frac{1}{n}\right)}\times\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^2$

$\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\frac{1}{4\times 2}\times e^2$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}=\frac{e^2}{8}$$

$\boxed{8}$

方程式 $z^3=1$ の解を z_1，z_2，z_3 とし，$0\leqq \arg z_1<\arg z_2<\arg z_3<2\pi$ とする。複素数平面上に 3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ をとるとき，以下の問いに答えよ。

(1) $z_1+z_2+z_3$，$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$，$z_1z_2z_3$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，線分の長さの 2 乗の和 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ および線分の長さの積 $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ の値を，α を用いてそれぞれ表せ。

(3) 複素数平面上の点 $\mathrm{P}(\alpha)$ について，α が $\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri\ (r>0)$ を満たすとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最大値および，そのときの r と α の値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

(4) (3) において，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ が最大となるときの $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ の値を求めよ。

(1) $z^3=1$ より $z^3-1=0$

解と係数の関係より

$z_1+z_2+z_3=0$，$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$，$z_1z_2z_3=1$

(2) $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$

$=|-z_1+\alpha|^2+|-z_2+\alpha|^2+|-z_3+\alpha|^2$

$=(\alpha-z_1)(\overline{\alpha}-\overline{z_1})+(\alpha-z_2)(\overline{\alpha}-\overline{z_2})+(\alpha-z_3)(\overline{\alpha}-\overline{z_3})$

$=\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{z_1}-\overline{\alpha}z_1+z_1\overline{z_1}$

$+\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{z_2}-\overline{\alpha}z_2+z_2\overline{z_2}$

$+\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{z_3}-\overline{\alpha}z_3+z_3\overline{z_3}$

$=3|\alpha|^2-\alpha(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})-\overline{\alpha}(z_1+z_2+z_3)+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2$

（ここで

$|z^3|=1$ より $|z|^3=1$ よって $|z|=1$

$z_1+z_2+z_3=0$ より $\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0$ ）

$=3|\alpha|^2+3$

$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$

$=|-z_1+\alpha|\,|-z_2+\alpha|\,|-z_3+\alpha|$

$=|(\alpha-z_1)(\alpha-z_2)(\alpha-z_3)|$

$=|\alpha^3-(z_1+z_2+z_3)\alpha^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)\alpha-z_1z_2z_3|$

$=|\alpha^3-1|$

(3) $z^3-1=0$ より

$(z-1)(z^2+z+1)=0$

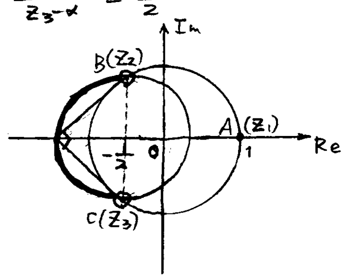
$z=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$0\leqq \arg z_1<\arg z_2<\arg z_3<2\pi$ より

$z_1=1$，$z_2=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$，$z_3=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$.

$\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=ri\ (r>0)$ より

$\arg\dfrac{z_2-\alpha}{z_3-\alpha}=\dfrac{\pi}{2}$



よって $\mathrm{P}(\alpha)$ の存在範囲は図の太線部であり

$3|\alpha|^2+3$ が最大となる α は 原点からの距離が最大となるときである。

$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$ なので、

$\alpha=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

このとき $r=1$

また、

$\mathrm{Max}(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)=3\left|-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2+3$

$=3\times\dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}+3$

$=6+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(4) (3)のとき

$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}=\left|\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3-1\right|$

$=\left|\dfrac{-1-3\sqrt{3}-9-3\sqrt{3}}{8}-1\right|$

$=\dfrac{18+6\sqrt{3}}{8}$

$=\dfrac{9+3\sqrt{3}}{4}$