

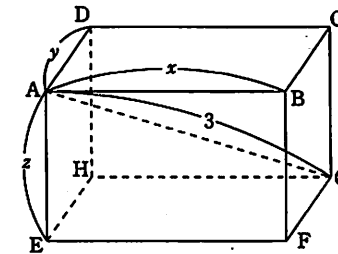
- 1 (1) ともに零ベクトルでない2つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ が $3|\vec{a}|=|\vec{b}|$ であり, $3\vec{a}-2\vec{b}$ と $15\vec{a}+4\vec{b}$ が垂直であるとき, $\vec{a}, \vec{b}$ のなす角 $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ を求めよ。
- (2) $a=4^{50}, b=6^{40}, c=15^{25}$ の常用対数の値を求めよ。また, a, b, c の大小を不等式で表せ。
ただし, $\log_{10} 2=0.3010, \log_{10} 3=0.4771$ とする。
- (3) $x=t+\frac{1}{t}$ とする。 $t>0$ のとき, $x \geq 2$ であることを示せ。また, 関数
- $$y=t^2+\frac{1}{t^2}-2a\left(t+\frac{1}{t}\right) \quad (t>0)$$
- の最小値と, そのときの x の値を求めよ。ただし, a は定数とする。
- (4) $f(n)=(n-1)n(n+1), g(n)=n^5-n$ とする。このとき, すべての整数 n に対して, $f(n)$ は6の倍数, $g(n)$ は30の倍数であることをそれぞれ証明せよ。

- 2 xy 平面上に直線 $\ell: y=x-1$ と放物線 $C: y=x^2$ がある。直線 ℓ 上の点 $P(t, t-1)$ から放物線 C に2本の接線 m_1 と m_2 を引き, 接点をそれぞれ $Q_1(s_1, s_1^2)$ と $Q_2(s_2, s_2^2)$ とする。ただし, $s_1 < s_2$ である。このとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) 2つの接点のうち, 1つの点 $Q(s, s^2)$ とする。 $Q(s, s^2)$ における接線の式を s を用いて表せ。また, この接線が点 $P(t, t-1)$ を通ることから, s の2次方程式を作り, 和 s_1+s_2 および積 s_1s_2 の値を, それぞれ t を用いて表せ。
- (2) 直線 Q_1Q_2 の式を t を用いて表せ。
- (3) 直線 Q_1Q_2 は t の値にかかわらず定点 N を通る。 N の座標を求めよ。また, この点 N が線分 Q_1Q_2 の中点 M と一致するときの t の値を求めよ。
- (4) 直線 Q_1Q_2 と放物線 C とで囲まれる図形の面積 S とするとき, S を t を用いて表せ。また, S を最小にする点 P の座標を求めよ。

- 3 以下はそれぞれ個別の問題である。各問いに答えよ。
- (1) $-\pi \leq x \leq \pi$ で定義された関数 $f(x)=3\sin x \sin 2x + \cos 3x$ がある。 $f(x)$ を $\cos x$ の式で表し, $f(x)$ の最大値および最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。
- (2) 不等式 $\frac{2}{3} + \log_3(2x^2-x+1) \leq \log_3(x+1)$ を解け。
- (3) 0でなく, かつ1でもない複素数 z に対して, 複素数平面上に3点 $P\left(\frac{1}{z}\right), Q\left(\frac{1}{1-z}\right), R(1)$ とする。点 R が線分 PQ を $t:(1-t) (0 \leq t \leq 1)$ の比に分けるときの, z は実数ではないことを示せ。
- (4) $\alpha=1+\sqrt{2}, \beta=1-\sqrt{2}$ に対して, $P_n=\alpha^n+\beta^n$ とする。このとき, P_1 および P_2 の値を求めよ。また, すべての自然数 n に対して, P_n は4の倍数ではない偶数であることを証明せよ。

- 4 平面上に $\triangle ABC$ がある。点 O を $\triangle ABC$ の外心とし, 外接円の半径を R とする。
また, 点 H は $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{OH}$ を満たす点とする。ただし, 点 H は3点 A, B, C と異なる点であるとする。
 $\vec{OA}=\vec{a}, \vec{OB}=\vec{b}, \vec{OC}=\vec{c}$ とするとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) $\vec{AH}$ と $\vec{CH}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表し, $AH \perp BC, CH \perp AB$ であることを示せ。
- (2) 線分 OH の中点を P とし, $\triangle ABC$ の各辺 AB, BC, CA の中点を, それぞれ L, M, N とする。このとき, $\vec{PL}, \vec{PM}, \vec{PN}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表し, P は $\triangle LMN$ の外心になることを示せ。
- (3) 線分 AH の中点を D とするとき, P は線分 DM の中点になることを示せ。
- (4) 頂点 A から直線 BC に垂線を下ろし, 直線 BC との交点を E とするとき, E は $\triangle LMN$ の外接円の周上にあることを示せ。

- 5 下図のように, $AB=x, AD=y, AE=z$ であるような直方体 $ABCD-EFGH$ が空間内にある。直方体の対角線 AG の長さを3, 表面積 S を16 とするとき, 以下の問いに答えよ。
- (1) $x+y+z$ の値を求めよ。
- (2) $y+z$ と yz を x の式で表し, x を用いて y, z を解とする t の2次方程式を作れ。
- (3) x の値の取り得る範囲を求めよ。
- (4) この直方体の体積を V とするとき, V の最大値および最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。



- 6 自然数 n に対して,
- $$a_n = \int_1^e x^2 (\log x)^n dx \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$
- とする。以下の問いに答えよ。
- (1) a_1 の値を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。また, これを利用して, a_2, a_3, a_4 の値をそれぞれ求めよ。
- (3) $x>0$ で定義された関数 $f(x)=x(\log x-1)^2$ の増減およびグラフの凹凸を調べ, 極値と変曲点を求めよ。
- (4) (3) の関数 $f(x)$ について, $x \geq 1$ における曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた図形を F とする。このとき, F を x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を a_1, a_2, a_3, a_4 を用いて表し, その値を求めよ。

表題

- 7 各自然数 n に対して、平面上の2つの曲線

$$C_n: y = a_n \sin 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$D_n: y = a_{n+1} \cos x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

を考える。ただし、 $\{a_n\}$ は、 $a_1=1$, $a_n \geq a_{n+1} > 0$ ($n=1, 2, 3, \dots$) を満たす x によらない数列とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_n , D_n の2つの交点のうち、 x 軸上にない交点の x 座標を p_n とする。このとき、 $\sin p_n$ を a_n , a_{n+1} を用いて表し、 $0 < p_n \leq \frac{\pi}{6}$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C_n と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とするとき、 S_n を a_n を用いて表せ。また、 $x \geq p_n$ において、曲線 C_n と D_n とで囲まれる図形の面積を T_n とするとき、 T_n を a_n , a_{n+1} を用いて表せ。
- (3) すべての自然数 n に対して $T_n = r^2 S_n$ (r は正の定数) が成り立つとき、一般項 a_n を求めよ。また、数列 $\{a_n\}$ が収束するような r の値の範囲を求めよ。
- (4) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ が収束するような r の値の範囲を求めよ。また、そのときの和を求めよ。

- 8 長さが a のひもを使って、周の長さが a の正三角形、正方形、正五角形、正六角形、…と順次、正多角形を作ることとする。頂点が n 個の正 n 角形 F_n (n は3以上の整数) の面積を S_n 、 F_n の外接円の半径を r_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) S_3 と S_4 をそれぞれ a を用いて表せ。
- (2) r_n および S_n をそれぞれ a , n を用いて表せ。
- (3) $0 < x \leq \frac{\pi}{3}$ で定義された関数 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ の増減を調べよ。
- (4) (3) を利用して、3以上の整数 n に対して、 $S_n < S_{n+1}$ であることを示せ。また、極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

さらに、この極限値が図形的にどのような意味を表しているか、簡単に説明せよ。

- 9 A市の有権者のうち、ある政策に対する賛成者の母比率を p ($0 < p < 1$) とする。A市の有権者100人を無作為に選んだときの、この政策に対する賛成者数を確率変数 X として、 $X=k$ のときの確率を $P(X=k)$

($k=0, 1, 2, \dots, 100$) とする。以下の問いに答えよ。なお、必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

- (1) $P(X=k)$ を p , k を用いて表せ。
- (2) 「100人中1人だけが賛成者」ではない確率が、「100人中2人だけが賛成者」ではない確率よりも大きくなるとき、 p の値の範囲を求めよ。
- (3) $X=80$ のとき、 p に対する信頼度95%の信頼区間を求めよ。
- (4) $P(X=k)$ の自然対数 $\log P(X=k)$ を最大にする p を求めよ。ただし、 $k=1, 2, \dots, 99$ とする。